MATEMÁTICA BÁSICA

1.ª Edición Digital
2020

J. ARMANDO VENERO B.
LICENCIADO EN MATEMÁTICAS (U.N.I.)

EDICIONES GEMAR
LIMA PERÚ

MATEMÁTICA BÁSICA

Autor: *JESÚS ARMANDO VENERO BALDEÓN*
Estudios de Magister en **MATEMÁTICAS (P.U.C.P.)**

Dpto. de tipeo, diagramación y diseño
Ana María Vargas Loayza de Venero,
Lic. en Educación (U.N.M.S.M.)

1.ª Edición digital, SETIEMBRE 2020

Hecho el Depósito Legal en la Biblioteca Nacional del Perú Nº 202005376

ISBN IMPRESA : 978-603-45216-0-5

ISBN DIGITAL : 978-612-45216-8-3 **PDF** 978-612-48340-3-5 **EPUB**

Editado por:
© 2020, Representaciones GEMAR E.I.R.L.
Calle Río Vilcanota 168. COO 27 de abril, Ate - Lima
Teléfono: 446-6176
rep_gemar09@hotmail.com
https://www.facebook.com/veneromath/

Prohibida la reproducción parcial o total, por cualquier medio o método, de este libro sin la autorización legal del autor y/o de **REPRESENTACIONES GEMAR E.I.R.L.** LIMA – PERÚ.

PRÓLOGO

Este texto titulado MATEMÁTICA BÁSICA ha sido escrito en base a los temas que son tratados en los primeros cursos de Matemáticas Universitarias en las carreras de Ingeniería, Ciencias, Economía, Administración, de modo que va dirigido a los estudiantes de estas disciplinas, en las Universidades y los Institutos Superiores.

La forma en que se presentan los conceptos matemáticos resulta ser una prolongación natural del enfoque moderno de las matemáticas y que está siendo estudiado en los colegios secundarios. En este texto, tal como se ha podido comprobar en la práctica, se ha logrado combinar un nivel adecuado de rigor con la presentación y el consecuente manejo de las técnicas y artificios de cálculo, lo que permite que el estudiante pueda proceder a la resolución de los problemas y ejercicios propuestos casi inmediatamente después de haber estudiado la teoría correspondiente y los ejemplos que la ilustran gradual y adecuadamente.

Para lograr este objetivo, se ha apelado a nuestra experiencia en la enseñanza de las matemáticas a este nivel, así como en lo que respecta a la didáctica presentación y diagramación de todos los temas tratados.

Las definiciones importantes, teoremas y propiedades, están remarcados y explicados en una forma clara y amena con una esmerada graduación de los ejemplos resueltos y de los problemas propuestos. Y como se podrá apreciar en el desarrollo del libro, se utiliza cada nueva idea y notación tan frecuentemente como es posible con el fin de promover su aplicación inteligente por parte del estudiante.

En los Capítulos 1 y 2 de LÒGICA y CONJUNTOS se estudian sus conceptos y sus principales propiedades, los cuales vienen precisamente a conformar el lenguaje de las matemáticas modernas.

El Capítulo 3 trata de los NÚMEROS REALES, sus axiomas y propiedades, con los cuales se establecen las bases fundamentales para los siguientes capítulos.

Es así que a continuación se estudian los conceptos y técnicas relativas a las ECUACIONES e INECUACIONES POLINÓMICAS Y RACIONA-

LES, a las ECUACIONES e INECUACIONES CON RADICALES, y a las ECUACIONES e INECUACIONES EXPONENCIALES. Asimismo, se estudian también los conceptos importantes del VALOR ABSOLUTO y del MÁXIMO ENTERO de un número real.

En los capítulos 10, 11 y 12 se tratan los temas de las RELACIONES y de las FUNCIONES, así como sus gráficas. Aquí se estudia el tema de la FUNCIÓN INVERSA, que será de mucha utilidad en los cursos de Cálculo Diferencial e Integral, correspondientes a ciclos posteriores.

También se estudian las FUNCIONES LOGARÍTMICAS y los fundamentos necesarios para la resolución de ECUACIONES e INECUACIONES LOGARÍTMICAS.

En esta edición, se incluyen los capítulos referentes a las OPERACIONES BINARIAS y al ANÁLISIS COMBINATORIO.

Todos los capítulos contienen una o varias Series de Ejercicios Propuestos, seguidos de sus correspondientes Clave de Respuestas, que permiten aclarar las dudas del estudiante y afianzar su aprendizaje.

Con estas palabras finales, deseo agradecer al equipo académico y técnico de EDICIONES GEMAR, por las mejoras llevadas a cabo en esta segunda edición.

J. ARMANDO VENERO BALDEÓN

Matemática Básica

CONTENIDO

1 LÓGICA

1. Proposiciones Lógicas . . 1
2. Proposiciones Compuestas Básicas: la NEGACIÓN , la DISYUNCIÓN , la CONJUNCIÓN, la CONDICIONAL, la BICONDICIONAL, la DISYUNCIÓN EXCLUSIVA. Conectivos Lógicos. . . 2
3. Proposiciones Compuestas . . 6
4. Tautología y Contradicción . . 8
5. IMPLICACIÓN LÓGICA y EQUIVALENCIA LÓGICA . . 9
6. Proposiciones LÓGICAMENTE EQUIVALENTES . . 9
7. Leyes del Álgebra Proposicional . . 10
8. Variantes Condicionales . . 18
9. Inferencia Lógica (Argumento Lógico) . . 19
10. CIRCUITOS BOOLEANOS (Lógicos). Circuitos en Serie, Circuitos en Paralelo. . . 27

2 CONJUNTOS

1. Conjuntos . . 36
2. Conjuntos Numéricos. INTERVALOS . . 37
3. Cuantificador EXISTENCIAL y Cuantificador UNIVERSAL, Funciones Proposicionales, Negación de Proposiciones con Cuantificadores. . . 38
4. Inclusión de Conjuntos. SUBCONJUNTOS. Conjunto UNITARIO, Conjunto VACÍO, Conjunto Universal. Conjuntos IGUALES. . . 44
5. Operaciones entre Conjuntos: UNIÓN, INTERSECCIÓN, COMPLEMENTO de un Conjunto, DIFERENCIA de Conjuntos, DIFERENCIA SIMÉTRICA. . . 47
6. Operaciones de Conjuntos aplicadas a los Intervalos . . 51
7. Leyes del Álgebra de Conjuntos . . 54
8. Conjunto POTENCIA . . 64
9. Número de Elementos de un Conjunto . . 66

3 NÚMEROS REALES

1. EL SISTEMA DE LOS NÚMEROS REALES. Axiomas de los Números Reales. Axiomas de la Relación de IGUALDAD de Números Reales. Interpretación Geométrica. . . 73
2. Propiedades de los Números Reales. Principio de Sustitución de la Adición y de la Multiplicación. Sustitución. División. . . 76

4 ECUACIONES POLINÓMICAS

1. Ecuaciones LINEALES en una Variable . . 81
2. Sistemas de Ecuaciones Lineales con 2 Incógnitas . . 83
3. Sistemas de Ecuaciones Lineales con 3 Incógnitas . . 84
4. POLINOMIOS . . 88
5. EL ALGORITMO DE LA DIVISIÓN para Polinomios . . 90
6. DIVISIÓN SINTÉTICA . . 92
7. Teorema del RESIDUO y Teorema del FACTOR . . 97
8. Número de Raíces de un Polinomio. Teorema Fundamental del Álgebra. . . 110
9. Regla de los Signos de Descartes . . 112
10. Raíces Racionales de un Polinomio . . 116
11. Relaciones entre las Raíces y los Coeficientes . . 119
12. Resolución de la Ecuación de Segundo Grado. Método de Completar Cuadrados. . . 123
13. Ecuaciones de Grado Superior . . 130

5 INECUACIONES

1. Relación de ORDEN. Teoremas relativos a Desigualdades . . 132
2. La REGLA DE LOS SIGNOS . . 135
3. Desigualdades Lineales y Cuadráticas. INECUACIONES. . . 136
4. Regla Gráfica de los Signos para resolver Inecuaciones . . 142
5. MÉTODO DE LOS PUNTOS CRÍTICOS para resolver Inecuaciones . . 146
   Inecuaciones con FACTORES CUADRÁTICOS IRREDUCIBLES . . 154
6. Problemas de aplicación sobre Desigualdades. . . 156

6 LA ECUACIÓN DE SEGUNDO GRADO

1. La Ecuación de Segundo Grado . . 164
2. RAÍCES Y DISCRIMINANTE de la Ecuación Cuadrática . . 164
3. Ecuaciones reducibles a la Forma Cuadrática . . 173
4. ECUACIONES RECÍPROCAS. Características de las Ecuaciones Recíprocas. . . 175

7 INECUACIONES CON RADICALES

1. Ecuaciones con RADICALES. Ecuaciones con varios Radicales . . 180
2. Inecuaciones con Radicales . . 188

Matemática Básica

8 VALOR ABSOLUTO Y MÁXIMO ENTERO

1. VALOR ABSOLUTO. Definición. Interpretación Geométrica . . 201
   Propiedades. DESIGUALDAD TRIANGULAR. . . 206
2. Ecuaciones con Valor Absoluto. Teoremas relativos . . 211
3. Inecuaciones con Valor Absoluto. Teoremas relativos . . 216
4. Problemas de Aplicación. . . 219
5. EL MÁXIMO ENTERO. Propiedades . . 245
6. Inecuaciones con Máximo Entero. Teoremas relativos . . 251

9 INECUACIONES EXPONENCIALES

1. Ecuaciones Exponenciales . . 264
2. Inecuaciones Exponenciales . . 267

10 RELACIONES

1. Pares Ordenados. PRODUCTO CARTESIANO . . 274
2. RELACIONES. Tipos de Relaciones: REFLEXIVAS, SIMÉTRICAS, TRANSITIVAS, DE EQUIVALENCIA. Dominio y Rango de Relaciones . . 277
3. Gráficas de Relaciones definidas por Ecuaciones . . 287
   Gráficas de Relaciones definidas por Inecuaciones (A) . . 291
4. Relaciones INVERSAS. Gráfica de la Relación Inversa . . 295
5. DISTANCIA entre Dos puntos en el Plano Cartesiano . . 299
   Fórmula del PUNTO MEDIO . . 300
6. LA RECTA y sus Ecuaciones. PENDIENTE de una Recta . . 301
7. Rectas PARALELAS y Rectas PERPENDICULARES . . 305

11 GRÁFICAS DE RELACIONES

1. Gráfica de la PARÁBOLA . . 311
   Desplazamientos Horizontales y Verticales
2. Gráficas que involucran el Valor Absoluto . . 316
3. La CIRCUNFERENCIA. Rectas TANGENTES . . 317
4. Gráficas de algunas HIPÉRBOLAS . . 322
5. SIMETRÍAS de las Gráficas . . 323
6. La PARÁBOLA . . 325
7. Ecuación de la ELIPSE. Rectas Tangentes . . 329
8. Ecuación de la HIPÉRBOLA. Rectas Tangentes . . 330
9. Gráficas de Inecuaciones (B) . . 332

4 ECUACIONES POLINÓMICAS

1. Ecuaciones LINEALES en una Variable . . 81
2. Sistemas de Ecuaciones Lineales con 2 Incógnitas . . 83
3. Sistemas de Ecuaciones Lineales con 3 Incógnitas . . 84
4. POLINOMIOS . . 88
5. EL ALGORITMO DE LA DIVISIÓN para Polinomios . . 90
6. DIVISIÓN SINTÉTICA . . 92
7. Teorema del RESIDUO y Teorema del FACTOR . . 97
8. Número de Raíces de un Polinomio. Teorema Fundamental del Álgebra. . . 110
9. Regla de los Signos de Descartes . . 112
10. Raíces Racionales de un Polinomio . . 116
11. Relaciones entre las Raíces y los Coeficientes . . 119
12. Resolución de la Ecuación de Segundo Grado. Método de Completar Cuadrados. . . 123
13. Ecuaciones de Grado Superior . . 130

5 INECUACIONES

1. Relación de ORDEN. Teoremas relativos a Desigualdades . . 132
2. La REGLA DE LOS SIGNOS . . 135
3. Desigualdades Lineales y Cuadráticas. INECUACIONES. . . 136
4. Regla Gráfica de los Signos para resolver Inecuaciones . . 142
5. MÉTODO DE LOS PUNTOS CRÍTICOS para resolver Inecuaciones . . 146
   Inecuaciones con FACTORES CUADRÁTICOS IRREDUCIBLES . . 154
6. Problemas de aplicación sobre Desigualdades. . . 156

6 LA ECUACIÓN DE SEGUNDO GRADO

1. La Ecuación de Segundo Grado . . 164
2. RAÍCES Y DISCRIMINANTE de la Ecuación Cuadrática . . 164
3. Ecuaciones reducibles a la Forma Cuadrática . . 173
4. ECUACIONES RECÍPROCAS. Características de las Ecuaciones Recíprocas. . . 175

7 INECUACIONES CON RADICALES

1. Ecuaciones con RADICALES. Ecuaciones con varios Radicales . . 180
2. Inecuaciones con Radicales . . 188

Matemática Básica

8 VALOR ABSOLUTO Y MÁXIMO ENTERO

1. VALOR ABSOLUTO. Definición. Interpretación Geométrica . . 201
   Propiedades. DESIGUALDAD TRIANGULAR. . . 206
2. Ecuaciones con Valor Absoluto. Teoremas relativos . . 211
3. Inecuaciones con Valor Absoluto. Teoremas relativos . . 216
4. Problemas de Aplicación. . . 219
5. EL MÁXIMO ENTERO. Propiedades . . 245
6. Inecuaciones con Máximo Entero. Teoremas relativos . . 251

9 INECUACIONES EXPONENCIALES

1. Ecuaciones Exponenciales . . 264
2. Inecuaciones Exponenciales . . 267

10 RELACIONES

1. Pares Ordenados. PRODUCTO CARTESIANO . . 274
2. RELACIONES. Tipos de Relaciones: REFLEXIVAS, SIMÉTRICAS, TRANSITIVAS, DE EQUIVALENCIA. Dominio y Rango de Relaciones . . 277
3. Gráficas de Relaciones definidas por Ecuaciones . . 287
   Gráficas de Relaciones definidas por Inecuaciones (A) . . 291
4. Relaciones INVERSAS. Gráfica de la Relación Inversa . . 295
5. DISTANCIA entre Dos puntos en el Plano Cartesiano . . 299
   Fórmula del PUNTO MEDIO . . 300
6. LA RECTA y sus Ecuaciones. PENDIENTE de una Recta . . 301
7. Rectas PARALELAS y Rectas PERPENDICULARES . . 305

11 GRÁFICAS DE RELACIONES

1. Gráfica de la PARÁBOLA . . 311
   Desplazamientos Horizontales y Verticales
2. Gráficas que involucran el Valor Absoluto . . 316
3. La CIRCUNFERENCIA. Rectas TANGENTES . . 317
4. Gráficas de algunas HIPÉRBOLAS . . 322
5. SIMETRÍAS de las Gráficas . . 323
6. La PARÁBOLA . . 325
7. Ecuación de la ELIPSE. Rectas Tangentes . . 329
8. Ecuación de la HIPÉRBOLA. Rectas Tangentes . . 330
9. Gráficas de Inecuaciones (B) . . 332

12 FUNCIONES

1. FUNCIONES. Dominio, Rango y Gráfica. . . 336
   APLICACIONES de A en B. Regla de Correspondencia . . 339
2. Gráfica de una Función. . . 341
   Funciones Reales de una Variable Real
3. Conjunto IMAGEN. Conjunto IMAGEN INVERSA . . 345
4. Evaluación de una Función en un Punto . . 350
5. Cálculo de Dominios y Rangos de Funciones . . 356
   Funciones con Varias Reglas de Correspondencia . . 362
6. Funciones Especiales: Función IDENTIDAD, . . 367
   Función CONSTANTE, Función ESCALÓN UNITARIO,
   Función SIGNO, Función VALOR ABSOLUTO,
   Función MÁXIMO ENTERO, Función RAÍZ CUADRADA,
   Función CUADRÁTICA, POLINOMIOS,
   Función SENO y COSENO.
7. Trazado de Gráficas Especiales: . . 393
   Desplazamientos Verticales, Desplazamientos Horizontales,
   Reflexiones, Estiramientos, Contracciones.
   Gráficas de relaciones con Valor Absoluto y con Máximo Entero.
8. Funciones PARES, IMPARES y PERIÓDICAS . . 401
9. ÁLGEBRA DE FUNCIONES. IGUALDAD de Funciones, . . 414
   SUMA de Funciones, RESTA y MULTIPLICACIÓN de Funciones,
   COCIENTE de Funciones (Función COCIENTE).
10. COMPOSICIÓN DE FUNCIONES. Propiedades . . 427
11. Funciones INYECTIVAS, SURYECTIVAS y BIYECTIVAS . . 446
    Funciones MONÓTONAS: CRECIENTES y DECRECIENTES . . 460
    Cálculo de Rangos de Funciones Inyectivas Monótonas . . 462
12. FUNCIONES INVERSAS. . . 467
    Propiedad Fundamental de las Funciones Inversas . . 470
    Cálculo de la Función Inversa . . 472
    Función Inversa de una Composición de Funciones . . 477
13. Función EXPONENCIAL y Función LOGARITMO . . 491
14. Ecuaciones e Inecuaciones Logarítmicas y Exponenciales . . 518

13 OPERACIONES BINARIAS

1. OPERACIONES BINARIAS. Tablas de Definición . . 542
2. Tipos de Operaciones Binarias: CONMUTATIVAS, ASOCIATIVAS . . 544
3. DISTRIBUTIVIDAD de una Operación Binaria respecto a otra. . . 547
4. Los Elementos Notables: Elemento NEUTRO y Elemento INVERSO . . 549
   Propiedad Fundamental del Elemento Inverso . . 550

Matemática Básica

14 ANÁLISIS COMBINATORIO

1. Técnicas de CONTEO. Principio de Contec Aditivo . . 566
   Principio de Conteo Multiplicativo . . 568
2. PERMUTACIONES . . 578
   Permutaciones de n objetos tomados de r en r. . . 581
   Permutaciones Circulares . . 586
   Permutaciones Distinguibles . . 589
3. COEFICIENTES BINOMIALES Y MULTINOMIALES . . 595
   Triángulo de PASCAL. Teorema del Binomio de Newton . . 596
4. COMBINACIONES . . 601
   Problemas de Naipes . . 612
5. PARTICIONES Ordenadas y No Ordenadas . . 626
   Partición de un Conjunto . . 626

ÍNDICE ALFABÉTICO . . 638

De la semilla de una naranja no brota
una manzana. Es así que, según las
semillas que siembres, así
serán tus cosechas.

L.U.N.

1

LÓGICA

En la actualidad, el estudio serio de cualquier tema tanto en el campo de las Humanidades como en el de las Ciencias y la Técnica requiere conocer los fundamentos y métodos del razonamiento Lógico preciso que permita al estudiante o al profesional extraer y depurar sus conclus ones evitando el riesgo de modificar en forma equivocada la información que posee. Esto es aún más evidente en esta era de la Computación, herramienta que es empleada en todos los campos del desarrollo de una sociedad, y que por la velocidad a la cua se procesan los datos cualquier error de LÓGICA puede originar problemas técnicos y por lo tanto sociales y económicos.

En este primer capitulo presentaremos la teoría mínima necesaria de la LÓGICA FORMAL que será de suma utilidad para tales fines.

1. PROPOSICIONES LÓGICAS

Son aquellas expresiones u oraciones que pueden ser calificadas bien como ***verdaderas*** o bien como ***falsas***, sin ambigüedades. Las proposiciones lógicas serán denotadas con letras minúsculas generalmente:

p , q , r , ... , etc.

A la veracidad o falsedad de un enunciado (proposición) se le denomina ***valor veritativo o valor de verdad***.

1.1 EJEMPLOS DE PROPOSICIONES LÓGICAS

p :	$17 - 6 = 11$	...	VERDADERA (V)
q :	Viena es la capital de Austria	...	VERDADERA (V)
r :	$117 + 319 = 426$	...	FALSA (F)

1.2 EJEMPLOS DE EXPRESIONES QUE NO SON PROPOSICIONES LÓGICAS

" Buenos dias " , " No faltes " , "¿Quién llamó por teléfono? "

Estas expresiones no son proposiciones lógicas debido a que no es posible asignarles un valor definido de verdad o de falsedad.

1.3 NOTA En resumen, las Proposiciones Lógicas son expresiones de las que tiene sentido decir que son ***verdaderas*** o que son ***falsas***. También se les denomina simplemente PROPOSICIONES.

1.4 DEFINICIÓN Se llaman VALORES VERITATIVOS o VALORES DE VERDAD de una Proposición a sus dos valores posibles: verdadero o falso. Estos posibles valores se pueden esquematizar en una TABLA DE VERDAD como sigue:

p
V
F

1.5 CLASES DE PROPOSICIONES LÓGICAS

a) **PROPOSICIONES SIMPLES o ATÓMICAS.-** Son aquellas que se pueden representar por una sola variable, es decir, por una sola letra como

$$p: \ 1 + 4 = 5$$

b) **PROPOSICIONES COMPUESTAS o MOLECULARES.-** Son aquellas que se pueden representar por lo menos por una variable y algún o algunos de los símbolos que representan a las palabras siguientes:

no , ***implica*** , ***o*** , ***y*** , ***si y sólo si***

como veremos a continuación.

2 PROPOSICIONES COMPUESTAS BÁSICAS

2.1 LA NEGACIÓN

Dada una proposición p, se denomina **LA NEGACIÓN** de p, a otra proposición denotada por: $\sim p$, y que le asigna el valor veritativo opuesto al de p. Su tabla de verdad es:

p	~ p
V	F
F	V

Esta proposición $\sim p$ es también leída como:
"no p"
"no es cierto que p".

EJEMPLO.- Sean las proposiciones

p : $3 \times 4 = 12$ (V)
q : Helsinki es la capital de Polonia (F)

sus negaciones son:

$\sim p$: No es cierto que $3 \times 4 = 12$ [o sino, $3 \times 4 \neq 12$] (F)
$\sim q$: Helsinki no es la capital de Polonia (V)

La última negación $\sim q$ es VERDADERA pues la ciudad de Helsinki es la capital de Finlandia.

2.2 LA DISYUNCIÓN

Se le denota "$p \vee q$" y se lee "p o q". Es una proposición compuesta por la proposición p y la proposición q, ambas relacionadas por la palabra "o", en el sentido inclusivo de y/o, y está definida por la siguiente condición:

"La proposición $p \vee q$ es ***falsa*** únicamente en el caso en que p y q son ***ambas falsas***; en cualquier otro caso es verdadera."

En su tabla de verdad se anotan sus valores para todas las posibles combinaciones de valores veritativos de p y de q como sigue:

p	q	p ∨ q
V	V	V
V	F	V
F	V	V (*)
F	F	F

Por ejemplo, correspondiente a la combinación (*) de la tercera fila:

p : 8 es menor que 5 ... (F)
q : 6 es mayor que 3 ... (V)
$p \vee q$: 8 es menor que 5 *o* 6 es mayor que 3 ... (V)

A continuación presentamos otra nueva proposición compuesta fundamental.

2.3 LA CONJUNCIÓN

Se le simboliza "$p \wedge q$", y se lee como "p y q".
Se le define como una nueva proposición que resulta ***verdadera*** (V) en el único caso en que las proposiciones componentes p y q son ***ambas verdaderas*** (V). En todos los demás casos es **falsa** (F).
Su tabla de verdad es:

p	q	p ∧ q
V	V	V
V	F	F (*)
F	V	F
F	F	F

Por ejemplo, si p : 15012 es múltiplo de 3 ... (V)
q : $4 + 7 = 12$ ... (F)

$p \wedge q$: 15012 es múltiplo de 3 y $4 + 7 = 12$ ... (F)

2.4 LA CONDICIONAL

Se le simboliza " $p \rightarrow q$ " y se lee " ***si*** p ***entonces*** q ". Es una nueva proposición compuesta que es ***falsa*** únicamente en el caso en que la proposición p es ***verdadera*** y la proposición q es ***falsa***. Su tabla de verdad es

p	q	p → q
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

La proposición p es llamada **ANTECEDENTE** y la proposición q **CONSECUENTE**

2.5 OBSERVACIONES

1) Según las dos últimas filas de la tabla de verdad, basta que el antecedente p sea falso para que toda la condicional sea verdadera, independientemente del valor del consecuente q .

2) De las filas 1ra. y 3ra. se concluye que es suficiente que el consecuente q sea verdadero para que la condicional resulte verdadera.

3) Según la última fila, en el caso en que p y q sean ambas falsas, la condicional resulta verdadera.

En resumen, el único caso en que un procedimiento de deducción es incorrecto ocurre cuando a partir de una información verdadera se concluye una falsedad. Esta proposición $p \rightarrow q$ también se lee de las siguientes maneras:

" p implica q ", " p es una condición suficiente para que q ",
" q a menos que $\sim p$ ", " q es una condición necesaria para que p ",
" Es suficiente que p para que q ".

2.6 EJEMPLOS Explique por qué las condicionales siguientes tienen los valores veritativos indicados:

a) $2 + 3 = 8 \rightarrow 5 < 6$ (V)

b) $3 - 1 = 4 \rightarrow 2^4 < 2^3$ (V)

c) Si 5 es primo entonces 51 es un número par (F)

Estas condicionales tienen los valores de verdad indicados debido a que

a) p es falsa y q verdadera : condicional verdadera
b) p es falsa y q falsa : condicional verdadera
c) p es verdadera y q falsa : condicional falsa

2.7 PROBLEMA Utilizar las palabras " Si ... entonces ... ", para expresar de otra manera equivalente la proposición " Yo no me presento al examen de Química mañana a menos que lo posterguen una semana. "

SOLUCIÓN. Sean q : Yo no me presento al examen de Química mañana
p : No postergarán el examen una semana,

entonces la proposición dada corresponde a: " q a menos que $\sim p$ ", la cual precisamente se simboliza por: " $p \rightarrow q$ ". Así tenemos el enunciado equivalente:

" SI no postergan el examen de Química una semana ENTONCES yo no me presento a dicho examen mañana."

2.8 LA BICONDICIONAL

Se dencta " $p \leftrightarrow q$ ", y se lee " p si y sólo si q ".

Es aquella proposición compuesta que es ***verdadera*** en los casos en que ambas p y q tengan valores veritativos iguales (***ambas verdaderas o ambas falsas***); y es ***falsa*** en los casos en p y q tengan valores veritativos ***opuestos***.
Su tabla de verdad es como sigue:

p	q	p ↔ q
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

También se lee como:

" p si y sólo si q "

" p es una condición necesaria y suficiente para q ".

Por ejemplo, p : $2 < 4$ ... (V)
q : $2 + 6 < 4 + 6$ ... (V)
$p \leftrightarrow q$: $2 < 4$ si y solamente si $2 + 6 < 4 + 6$ ... (V)

2.9 LA DISYUNCIÓN EXCLUSIVA

Se le denota " $p \Delta q$ ", y se lee:
" O bien p *o* bien q ".

Es aquella proposición que es verdadera en los casos en que ambas proposiciones p y q tengan valores veritativos opuestos, y es falsa si ambas tienen idénticos valores de verdad. Su tabla de verdad es

p	q	p Δ q
V	V	F
V	F	V
F	V	V
F	F	F

También recibe el nombre de
DIFERENCIA SIMÉTRICA

2.10 CONECTIVOS LÓGICOS Se llaman así a los símbolos:

$$\vee \ , \ \wedge \ , \ \rightarrow \ , \ \leftrightarrow \ , \ \sim \ , \ \Delta \ .$$

3. PROPOSICIONES COMPUESTAS

Utilizando los conectivos lógicos se puede combinar cualquier cantidad finita de proposiciones compuestas básicas para obtener otras cuyos valores de verdad pueden ser conocidos construyendo sus tablas de verdad.

En tales tablas se indican los valores resultantes de estas proposiciones compuestas para todas las combinaciones posibles de valores de verdad de las proposiciones componentes.
Así tenemos la tabla de verdad de la proposición compuesta:

$$[(\sim p) \vee q] \rightarrow (r \wedge p) \qquad :$$

p	q	r	$\sim$ p	$(\sim p) \vee q$	$r \wedge p$	$[(\sim p) \vee q] \rightarrow (r \wedge p)$
V	V	V	F	V	V	V
V	V	F	F	V	F	F
V	F	V	F	F	V	V
V	F	F	F	F	F	V
F	V	V	V	V	F	F
F	V	F	V	V	F	F
F	F	V	V	V	F	F
F	F	F	V	V	F	F

3.1 EJERCICIO Sean p : 8 es un número par,
q : 8 es el producto de dos enteros.
Traduzca en símbolos cada una de las siguientes proposiciones:

a) 8 es un número par o es un producto de dos enteros.
b) 8 es impar y es un producto de dos enteros.
c) 8 es par y un producto de dos enteros o es un número impar y no un producto de dos enteros.

RPTA: a) $p \vee q$, b) $(\sim p) \wedge q$, c) $(p \wedge q) \vee [(\sim p) \wedge \sim q]$.

3.2 PROBLEMA Sean p , q y r tres proposiciones tales que p es verdadera, q es falsa y r es falsa . Indique cuáles de las siguientes proposiciones son verdaderas:

a) $(p \vee q) \vee r$, b) $(\sim p) \vee (q \wedge r)$
c) $[(p \wedge q) \vee ((\sim p) \wedge \sim q)] \wedge [((\sim p) \wedge q) \vee ((\sim q) \wedge p)]$
d) $[(\sim p) \vee \sim q] \wedge (p \vee \sim r) \wedge (q \vee p)]$

SOLUCIÓN.

a) Verdadera, pues

$$\begin{array}{ccccccc} (\ p & \vee & q\ ) & \vee & r \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ (\ V & \vee & F\ ) & \vee & F \\ & \downarrow & & & \downarrow \\ & V & & \vee & F \\ & & & \downarrow & \\ & & & V & \end{array} \quad , \text{ verdadera}$$

b) Esta proposición es FALSA, pues:

$$\begin{array}{ccccc} (\sim p) & \vee & (q \wedge r) \\ F & \vee & F \\ & F & \end{array}$$

c) Como esta proposición está constituida por proposiciones compuestas entre dos corchetes unidos por una conjunción $\wedge$, y como el primero de tales corchetes es FALSO (¿por qué?) entonces toda la proposición (b) será FALSA , independientemente del valor de la proposición compuesta del segundo corchete.

d) Esta proposición también es FALSA, en forma análoga a (c) , puesto que $(q \vee r)$ es falsa.

3.3 PROBLEMA Halle el valor de verdad de la proposición:

$$(\sqrt[4]{4} > \sqrt{2} \wedge 1 > 0) \rightarrow \left[\sqrt{2} \geq \sqrt[4]{4} \vee \left(1/\sqrt[4]{4} < 1/\sqrt{2} \leftrightarrow -1 < 0 \right) \right]$$

SOLUCIÓN. De $\sqrt[4]{4} = \sqrt[4]{2^2} = 2^{2/4} = 2^{1/2} = \sqrt{2}$, se tiene que $\sqrt[4]{4} > \sqrt{2}$ y $1/\sqrt[4]{4} < 1/\sqrt{2}$ son ambas falsas. Sin embargo, $\sqrt{2} \geq \sqrt[4]{4}$ es ***verdadera*** pues $\geq$ quiere decir $>$ o $=$.

Así se tiene que la proposición dada tiene el valor siguiente:

$$\begin{array}{rcl} (F \wedge V) & \rightarrow & [\ V \ \vee \ (F \leftrightarrow V)\ ] \\ F & \rightarrow & [\ V \ \vee \ (F \leftrightarrow V)\ ] \end{array}$$

y según una de las OBSERVACIONES (2.5), es suficiente que el antecedente sea falso para que toda la condicional sea VERDADERA, lo cual puede ser verificado completando lo del corchete.

3.4 JERARQUÍA DE LOS CONECTIVOS LÓGICOS

Cuando en una proposición compuesta se tiene varios conectivos lógicos, las operaciones se realizan luego de colocar los paréntesis adecuadamente comenzando con las proposiciones que se encuentran dentro de los paréntesis interio-

res. Siguen todas las negaciones y luego se avanza de izquierda a derecha. Los corchetes son considerados como paréntes s.

3.5 PROBLEMA Sean p, q, r, s y n cinco proposiciones lógicas. Si el valor de verdad de cada una de las proposiciones siguientes (a) y (b) es FALSA:

a) $[\sim(p \to q) \to r] \to (s \wedge r)$, b) $\sim p \vee q$,

¿cuál es el valor de verdad de (c) y (d) ? :

c) $[(n \to p) \wedge \sim r] \to p$, d) $s \to (p \leftrightarrow r)$

SOLUCIÓN. Que la condicional (a) sea FALSA quiere decir que

$$\begin{cases} \sim(p \to q) \to r & \text{es V} \quad (*) \\ s \wedge r & \text{es F} \quad (**) \end{cases} \quad , \quad y$$

Como $\sim p \vee q$ es F por hipótesis, entonces ambas $\sim p$ y q son F es decir, p es V y q es F, de donde resulta que $\sim(p \to q)$ es V y por lo tanto, r es V. Luego, de $(**)$ resulta que s es F. Así, la condicional (c) resulta V, pues el antecedente es F, ya que $\sim r$ es F, independientemente de los valores de n y p.
Asimismo, la condicional (d) resulta también ***verdadera*** (V), pues su antecedente s es **falso** (F).

4. TAUTOLOGÍA Y CONTRADICCIÓN

A toda proposición simple o compuesta cuyo valor es siempre **VERDADERO** para cualquier combinación de valores veritativos de sus componentes se le llama **TAUTOLOGÍA** y se le denota simplemente por **V**.

A toda proposición que es siempre **FALSA** para todas las combinaciones de valores veritativos de sus componentes se le llama **CONTRADICCIÓN**, y se le denota simplemente por **F**.

Una proposición cuya tabla de verdad contiene al menos un V y al menos un F recibe el nombre de **CONTINGENCIA**.

4.1 EJEMPLO La proposición: $[((\sim p) \vee q) \wedge \sim q] \to \sim p$, es una **TAUTOLOGÍA**. En efecto,

p	q	~p	~q	(~p) ∨ q	[((~p) ∨ q) ∧ ~q]	→	~p
V	V	F	F	V	F	V	F
V	F	F	V	F	F	V	F
F	V	V	F	V	F	V	V
F	F	V	V	V	V	V	V

4.2 EJEMPLO. La proposición: $[(p \wedge q) \vee q] \wedge \sim q$, es una CONTRADICCIÓN. En efecto,

p	q	~q	p ∧ q	(p ∧ q) ∨ q	[(p ∧ q) ∨ q] ∧ ~q	
V	V	F	V	V	F	
V	F	V	F	F	F	
F	V	F	F	V	F	
F	F	V	F	F	F	

5. IMPLICACIÓN LÓGICA Y EQUIVALENCIA LÓGICA

Se llama **IMPLICACIÓN LÓGICA** (o simplemente **IMPLICACIÓN**) a toda condicional $p \to q$ que sea ***TAUTOLOGÍA***; en tal caso, a la condicional se le denota $p \Rightarrow q$.
Como ejemplo de **IMPLICACIÓN** se tiene $[((\sim p) \vee q) \wedge \sim q] \Rightarrow \sim p$, cuya tabla de verdad está mostrada en el Ejemplo 4.1 .

Se llama **EQUIVALENCIA LÓGICA** (o simplemente **EQUIVALENCIA**) a toda bicondicional $p \leftrightarrow q$ que sea ***TAUTOLOGÍA***, denotándose en tal caso $p \Leftrightarrow q$.
Un ejemplo de Equivalencia Lógica es:

$$p \wedge (p \vee q) \Leftrightarrow p$$

p	q	p ∨ q	p ∧ (p ∨ q)	↔	p
V	V	V	V	V	V
V	F	V	V	V	V
F	V	V	F	V	F
F	F	F	F	V	F

6. PROPOSICIONES LÓGICAMENTE EQUIVALENTES

Dos proposiciones p y q se llaman **EQUIVALENTES** (o **Lógicamente Equivalentes**) si sus tablas de verdad son idénticas, en cuyo caso se simboliza

$$p \equiv q$$

6.1 EJEMPLO Las proposiciones $(p \to q)$ y $[(\sim q) \to (\sim p)]$ son **EQUIVALENTES** pues sus tablas de verdad resultantes son idénticas, como se puede ver en el cuadro de la siguiente página.

Por lo tanto, $(p \to q) \equiv [(\sim q) \to (\sim p)]$

p	q	p → q	~q → ~p
V	V	V	F V F
V	F	F	V F F
F	V	V	F V V
F	F	V	V V V

Idénticas

6.2 NOTA Esta última Equivalencia de (6.1) es muy importante en lo que a demostraciones de teoremas o resultados en general respecta, pues viene a ser la base del llamado MÉTODO DE DEMOSTRACIÓN POR **REDUCCIÓN AL ABSURDO** que es una forma indirecta de un proceso de demostración, y que ilustraremos varias veces en el desarrollo del libro.

6.3 NOTA Un par de Proposiciones Equivalentes $p \equiv q$ producen siempre una Equivalencia Lógica $p \Leftrightarrow q$ y viceversa. Por esta razón cuando hay una Equivalencia Lógica entre p y q también se dice que: $p \equiv q$.

7. LEYES DEL ÁLGEBRA PROPOSICIONAL

Son ciertas Equivalencias Lógicas que las representaremos a continuación y cuya demostración es fácil de realizar exhibiendo sus tablas veritativas correspondientes.

1a. $p \vee p \equiv p$
2a. $p \vee q \equiv q \vee p$
3a. $(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$
4a. $p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$
5a. $p \vee F \equiv p$
6a. $p \vee V \equiv V$
7a. $p \vee (\sim p) \equiv V$
8a. $\sim(\sim p) \equiv p$

1b. $p \wedge p \equiv p$
2b. $p \wedge q \equiv q \wedge p$
3b. $(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r)$
4b. $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$
5b. $p \wedge F \equiv F$
6b. $p \wedge V \equiv p$
7b. $p \wedge (\sim p) \equiv F$
8b. $\sim V \equiv F$; $\sim F \equiv V$
9a. $\sim(p \vee q) \equiv (\sim p) \wedge (\sim q)$
9b. $\sim(p \wedge q) \equiv (\sim p) \vee (\sim q)$

} Leyes de DE MORGAN

Como es válido reemplazar una proposición por su equivalente sin alterar el resultado, estas leyes son muy útiles para simplificar los problemas.
Con este fin presentamos una LISTA ADICIONAL , muy útil, de Equivalencias Lógicas.

7.1 LISTA ADICIONAL DE PROPOSICIONES EQUIVALENTES

1A. $p \to q \equiv (\sim p) \vee q$
2A. $p \to q \equiv (\sim q) \to (\sim p)$
3A. $p \wedge (p \vee q) \equiv p$
4A. $p \vee (p \wedge q) \equiv p$
5A. $p \leftrightarrow q \equiv (p \to q) \wedge (q \to p)$
6A. $p \leftrightarrow q \equiv (p \wedge q) \vee [(\sim p) \wedge (\sim q)]$
7A. $p \,\Delta\, q \equiv (p \wedge \sim q) \vee (q \wedge \sim p)$

7.2 PROBLEMA Simplifique las siguientes proposiciones utilizando las Leyes del Álgebra Proposicional o la Lista Adicional:

a) $\sim[\sim(p \wedge q) \to \sim q] \vee q$, b) $[((\sim p) \wedge q) \to (r \wedge \sim r)] \wedge \sim q$

SOLUCIÓN

a) $\sim[\sim(p \wedge q) \to \sim q] \vee q$
$\equiv \sim[\sim(\sim(p \wedge q)) \vee \sim q] \vee q$ 1A.
$\equiv \sim[(p \wedge q) \vee \sim q] \vee q$ 8a.
$\equiv [\sim(p \wedge q) \wedge \sim(\sim q)] \vee q$ 9a.
$\equiv [(\sim p \vee \sim q) \wedge q] \vee q$ 9b.
$\equiv q \vee [q \wedge (\sim p \vee \sim q)]$ 2a , 2b.
$\equiv q$ 4A.

b) $[((\sim p) \wedge q) \to (r \wedge \sim r)] \wedge \sim q$
$\equiv [((\sim p) \wedge q) \to F] \wedge \sim q$ 7b.
$\equiv [(\sim((\sim p) \wedge q)) \vee F] \wedge \sim q$ 1A.
$\equiv [(p \vee \sim q) \vee F] \wedge \sim q$ 9b.
$\equiv [(p \vee \sim q)] \wedge \sim q$ 5a.
$\equiv \sim q$ 2b , 3a.

7.3 PROBLEMA. Demuestre que la siguiente proposición es una Tautología

$$[(p \vee \sim q) \wedge q] \to p$$

SOLUCIÓN.

$\equiv \sim[(p \vee \sim q) \wedge q] \vee p$ 1A.
$\equiv [\sim(p \vee \sim q)] \vee p \vee (\sim q)$ 9b , 2a.
$\equiv ((\sim p) \wedge q) \vee p \vee (\sim q)$ 9a.
$\equiv (\sim p \wedge q) \vee [\sim(\sim p \wedge q)]$ 9b
$\equiv V$ Tautología 7a.

NOTA .- En muchos casos este método es más práctico que el de las tablas de verdad.

7.4 PROBLEMA Determine si (a) y (b) son proposiciones equivalentes:

a) $p \rightarrow (r \vee \sim q)$
b) $(q \rightarrow \sim p) \vee (\sim r \rightarrow \sim p)$

SOLUCIÓN

MÉTODO 1 Mediante las tablas de verdad:

p	q	r	~p	~q	~r	p → (r ∨ ~q)	(q → ~p) ∨ (~r → ~p)
V	V	V	F	F	F	V V	F V V
V	V	F	F	F	V	F F	F F F
V	F	V	F	V	F	V V	V V V
V	F	F	F	V	V	V V	V V F
F	V	V	V	F	F	V V	V V V
F	V	F	V	F	V	V F	V V V
F	F	V	V	V	F	V V	V V V
F	F	F	V	V	V	V V	V V V

idénticas

MÉTODO 2 Simplificando:

a) $p \rightarrow (r \vee \sim q) \equiv (\sim p) \vee (r \vee \sim q)$ ... (1)

b) $(q \rightarrow \sim p) \vee (\sim r \rightarrow \sim p)$
$\equiv [\sim q \vee \sim p] \vee [(\sim \sim r) \vee \sim p]$
$\equiv \sim q \vee \sim p \vee (r \vee \sim p)$
$\equiv \sim q \vee (\sim p \vee \sim p) \vee r$
$\equiv (\sim q) \vee (\sim p) \vee r$
$\equiv (\sim p) \vee (r \vee \sim q)$ ... (2)

Siendo (1) y (2) iguales, entonces $a \equiv b$.

7.5 PROBLEMA.- Dadas $t : (r \leftrightarrow s) \Delta \sim r$, $u : (r \rightarrow \sim s) \rightarrow r$, si t es falsa y u es verdadera, determine el valor de verdad de: $[(r \leftrightarrow u) \wedge (t \Delta s)] \Delta \sim t$.

SOLUCIÓN.- DATOS: $t : F$, $u : V$. Sólo puede ocurrir (a) o (b):

a) Si $r : V$, **a1)** $s : V$, entonces $t : V \Delta F \equiv V$ (contradicción)
a2) $s : F$, entonces $t : F \Delta F \equiv F$, $u : V \rightarrow V \equiv V$ } (válidos)

b) Si $r : F$, entonces $u : V \rightarrow F \equiv F$ (contradicción) y por lo tanto, $r : V$ y $s : F$, y en consecuencia el valor de verdad de la proposición $[(r \leftrightarrow u) \wedge (t \Delta s)] \Delta \sim t$ es:

$[(V \leftrightarrow V) \wedge (F \Delta F)] \Delta V$
$[V \wedge F] \Delta V$
$[F] \Delta V \equiv V$ .. VERDADERA

7.6 EJERCICIO.- Pruebe que $[(\sim r) \wedge (p \vee s)] \rightarrow (q \vee s)$ tiene el valor verdadero si es que $p \leftrightarrow \sim(q \wedge r)$ y $p \Delta r$ son ambas falsas.

SERIE DE EJERCICIOS

1. Demuestre las Leyes del Álgebra de Proposiciones.
2. Demuestre las Equivalencias de la Lista Adicional.
3. Demuestre que las condicionales siguientes son IMPLICACIONES:
   a) $p \Rightarrow p$
   b) $[(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)] \Rightarrow (p \rightarrow r)$: LEY TRANSITIVA
   c) $(\sim p) \Rightarrow (p \rightarrow q)$
   d) $[(p \rightarrow q) \wedge \sim q] \Rightarrow \sim p$,
   e) $p \Rightarrow (p \vee q)$
   f) $(p \wedge q) \Rightarrow p$
   g) $(p \wedge q) \Rightarrow (p \vee q)$
   h) $(p \wedge q) \Rightarrow (p \leftrightarrow q)$
   f) $(p \leftrightarrow q) \Rightarrow (p \rightarrow q)$
4. Demuestre que las bicondicionales siguientes son **EQUIVALENCIAS LÓGICAS**:
   a) $(p \rightarrow q) \Leftrightarrow (\sim p) \vee q$
   b) $(p \leftrightarrow q) \Leftrightarrow (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$
   c) $(p \wedge q) \vee p \Leftrightarrow p$
   d) $(p \vee q) \wedge p \Leftrightarrow p$
   e) $\sim(p \rightarrow q) \Leftrightarrow p \wedge \sim q$
5. Demuestre que
   a) $(p \rightarrow q) \equiv (p \wedge \sim q) \rightarrow F$ (Reducción al absurdo)
   b) $(F \rightarrow p) \equiv V$; $(p \rightarrow V) \equiv V$;
   $(p \rightarrow F) \equiv \sim p$; $\sim(p \rightarrow q) \equiv (p \wedge \sim q)$
   c) $(p \rightarrow q) \equiv [(p \vee q) \leftrightarrow q]$
   d) $(p \rightarrow q) \equiv [(p \wedge q) \leftrightarrow p]$
   e) $p \Delta q \equiv (p \vee q) \wedge \sim(p \wedge q) \equiv \sim(p \leftrightarrow q)$
6. Dadas las proposiciones: I) $\sim(p \wedge q) \leftrightarrow (p \vee \sim q)$
   II) $\sim(p \rightarrow q) \leftrightarrow (p \vee \sim q)$
   III) $\sim(p \leftrightarrow q) \leftrightarrow (\sim p \leftrightarrow \sim q)$

   indique cuál (o cuáles) es una contradicción (F).

7. La proposición $\sim(p \to q) \wedge (q \to \sim r)$, ¿a cuál (o cuáles) de las siguientes proposiciones es equivalente?
   a) $p \wedge (p \vee \sim r) \wedge (\sim q)$, b) $p \wedge (\sim q) \wedge \sim(q \wedge r)$
   c) $(p \wedge \sim q) \vee [(p \wedge \sim r) \wedge \sim q]$

8. ¿Alguna de las siguientes proposiciones es una Tautología?
   a) $\sim[(\sim(p \vee q)) \to \sim q] \leftrightarrow (p \to q)$
   b) $\sim[(\sim p) \leftrightarrow q] \leftrightarrow (p \to q)$
   c) $\sim\{(p \wedge q) \vee [p \wedge (\sim p \vee q)]\} \leftrightarrow (p \to \sim q)$

9. Simplifique: $[(\sim p \wedge q) \to (r \wedge \sim r)] \wedge \sim q$

10. Simplifique: $[(\sim q \to \sim p) \to (\sim p \to \sim q)] \wedge \sim(p \wedge q)$.

11. De las siguientes proposiciones, ¿Cuáles son equivalentes entre sí? :
   a) Es necesario que Juan no vaya al cine para que termine su tarea.
   b) No es cierto que Juan termine su tarea y vaya al cine.
   c) Juan no terminará su tarea y no irá al cine.

12. ¿Cuáles son Tautologías? :
   a) $[(p \vee \sim q) \wedge q] \to p$, b) $[(p \wedge q) \vee q] \leftrightarrow q$
   c) $[\sim p \wedge (q \vee \sim r)] \leftrightarrow [(\sim p \wedge q) \vee \sim(p \vee r)]$

13. De la falsedad de $(p \to \sim q) \vee (\sim r \to s)$, deducir el valor de
   a) $(\sim p \wedge \sim q) \vee \sim q$
   b) $[(\sim r \vee q) \wedge q] \leftrightarrow [(\sim q \vee r) \wedge s]$
   c) $(p \to r) \to [(p \vee q) \wedge \sim q]$

14. Si se sabe que $(p \wedge q)$ y $(q \to t)$ son falsas, ¿cuáles de las siguientes proposiciones son verdaderas? :
   a) $(\sim p \vee t) \vee s$, b) $\sim[p \wedge (\sim q \vee \sim p)]$
   c) $[\sim p \vee (q \wedge \sim t)] \leftrightarrow \{(p \to q) \wedge \sim(q \wedge t)\}$

15. ¿Cuál (es) de las siguientes proposiciones es equivalente a:
   "Es necesario pagar 100 soles y ser socio para ingresar al teatro"?
   a) No ingresar al teatro o pagar 100 soles, y ser socio.
   b) Pagar 100 soles o ser socio, y no ingresar al teatro.
   c) Pagar 100 soles y ser socio, o no ingresar al teatro.

16. Si la proposición $(\sim p \wedge q) \to [(p \wedge r) \vee t]$ es falsa, halle el valor veritativo de:
   a) $\sim[(\sim p) \vee (\sim q) \to (r \vee \sim t)]$
   b) $(\sim q \wedge \sim r) \vee [\sim t \wedge (p \vee q)]$
   c) $(\sim p \to t) \to [\sim q \to r]$

17. Demuestre que las tres proposiciones siguientes son equivalentes:
   a) $\sim[(q \vee \sim p) \vee (q \wedge (r \vee \sim p))]$

   b) $(p \wedge \sim q) \wedge [\sim q \vee (\sim r \vee p)]$
   c) $\sim[\sim q \to \sim p] \wedge [q \to \sim(p \to r)]$

18. La proposición $(p \vee q) \leftrightarrow (r \wedge s)$ es verdadera; teniendo r y s valores veritativos opuestos, se afirma que
   a) $[\{(\sim p) \wedge (\sim q)\} \vee (r \wedge s)] \wedge p$ es *verdadera*
   b) $[\sim(p \vee q) \wedge (r \vee s)] \vee (\sim p \wedge q)$ es *falsa*
   c) $[(\sim r \wedge \sim s) \to (p \vee r)] \wedge \sim(r \wedge s)$ es *verdadera*
   d) $[(\sim r \wedge \sim s) \to (s \vee p)] \Delta \sim(r \wedge p)$ es *verdadera*
   ¿Cuáles son ciertas?

19. ¿Cuáles son Equivalencias Lógicas? :
   a) $\sim(q \to \sim p) \leftrightarrow (q \vee p)$
   b) $\{(\sim p \wedge \sim q) \vee \sim q\} \leftrightarrow \sim[(p \vee q) \wedge q]$
   c) $\sim(p \to q) \leftrightarrow [(p \vee q) \wedge \sim q]$

20. Si $p \downarrow q$ se define por $(\sim p) \wedge (\sim q)$, entonces ¿a cuál es equivalente $\sim(p \leftrightarrow q)$? :
   a) $[(\sim p) \downarrow q] \vee [q \downarrow p]$
   b) $[(\sim p) \downarrow q] \vee [(\sim q) \downarrow p]$
   c) $[(\sim p) \downarrow (\sim q)] \vee [p \downarrow q]$

21. ¿Cuáles de las siguientes proposiciones
   a) $\sim[p \wedge (\sim q) \wedge (\sim r)]$, b) $(p \wedge \sim q) \vee r$
   c) $(r \vee q) \wedge \sim(r \wedge q)$, d) $(\sim p) \vee q \vee r$
   son equivalentes a: $(p \to q) \to r$?.

22. Si $p \downarrow q$ significa "ni p y ni q", ¿cuáles de las siguientes proposiciones son Tautologías (siempre verdaderas) ? :
   a) $[(p \downarrow q) \downarrow (q \downarrow p)] \leftrightarrow (p \vee q)$
   b) $\sim(p \wedge q) \leftrightarrow [p \downarrow q]$
   c) $(p \downarrow q) \leftrightarrow \sim(p \vee q)$
   d) $\sim(p \downarrow q) \leftrightarrow p \Delta q$

23. ¿Cuántas F y cuántas V tiene el resultado de la Tabla de Verdad de: $\sim[(p \wedge q) \to \sim r] \wedge (s \vee \sim s)$ después de simplificarla? .

24. Dada z : $\{(p \to q) \to [p \vee (q \wedge r)]\} \to [q \wedge (p \vee r)]$,
   a) Indique los valores de p y r de modo que si q es F, entonces z es F.
   b) Indique los valores de p y r de modo que si q es V, entonces z es V.

25. Escribir la negación de cada una de las proposiciones siguientes:
   a) El no es rico, pero es feliz.
   b) El no es pobre ni es feliz.
   c) El es bajo pero es muy ágil.

d) Ni Juan ni su papá viajarán a Tarma a fin de mes.
e) El tiene un compás o una regla.
f) Ambos equipos Alianza y la U irán a la Copa Libertadores.
g) Si Juan llega a tiempo con los documentos, entonces ambos, Carlos y Jorge, podrán inscribirse en el ciclo de conferencias.

26. Si p, q, r, s, t, w son proposiciones tales que
a) $(p \wedge \sim r) \leftrightarrow (s \rightarrow w)$ es verdadera,
b) $(\sim w \rightarrow \sim s)$ es falsa,
halle el valor de verdad de las proposiciones
c) $(p \wedge q) \vee r \vee s$, d) $(s \leftrightarrow \sim w) \rightarrow (r \vee \sim p)$
e) $[t \rightarrow (w \vee \sim p)] \wedge \sim(p \rightarrow r)$

27. Exprese la proposición $(p \wedge q) \vee (r \vee s)$ de otra manera, en la que únicamente intervengan los conectivos $(\sim)$ y $(\rightarrow)$.

28. Halle el valor de verdad de la proposición:
$$\left(\sqrt[3]{8} > \sqrt{2} \wedge -8 < 0\right) \rightarrow \left|\sqrt{2} \geq \sqrt[3]{8} \vee \left(\frac{1}{\sqrt[3]{8}} < \frac{1}{\sqrt{2}} \leftrightarrow 8 > 0\right)\right|$$

29. Sin usar tablas de verdad, determinar si las siguientes proposiciones (a) y (b) son Lógicamente Equivalentes:
a) $(\sim s \rightarrow \sim w) \vee (t \rightarrow \sim w)$, b) $w \rightarrow (\sim t \vee s)$

30. Dadas las proposiciones p y q, se define la proposición $p \nabla q$ como: $p \wedge (\sim q)$. ¿A cuál (es) es equivalente $p \rightarrow \sim q$? :
a) $\sim(p \nabla q)$ d) $(\sim p) \nabla q$
b) $(\sim p) \nabla (\sim q)$ e) $p \nabla (\sim q)$
c) $\sim[p \nabla (\sim q)]$

31. a) Utilizando tablas de verdad determinar si la siguiente proposición es una tautología, una contradicción o una contingencia:
$\{[(\sim p \wedge r) \rightarrow q] \leftrightarrow [\sim q \leftrightarrow (p \vee r)]\} \Delta \{(p \leftrightarrow q) \Delta (q \vee \sim r)\}$
b) Simplificar: $\sim([p \Delta (\sim q)] \rightarrow (\sim q))$

32. Dado el circuito lógico definido por la tabla: analice la verdad o falsedad de las siguientes proposiciones:

p	q	p * q
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	F

a) $q \equiv V$ es condición necesaria o suficiente para que $(p * q) \equiv V$.
b) $\sim p * [(p \wedge q) * (r \wedge s)] \equiv r \wedge s$.
c) Es falso que $(p \rightarrow q) \equiv F$ sea condición necesaria y suficiente para que $(p * q) \equiv F$.

33. Si la proposición $[(p \Delta (\sim q)) \wedge (p \vee q)] \rightarrow [r \leftrightarrow s]$ es falsa, cuáles de las siguientes proposiciones son ***necesariamente*** verdaderas ? :

I) $(p \wedge q) \rightarrow (p \wedge s)$, II) $[(\sim p) \vee r] \rightarrow (r \vee s)$;
III) $(r \wedge s) \rightarrow (p \Delta r)$.

34. Sabiendo que la proposición siguiente es falsa:
$\{\sim[(p \wedge r) \rightarrow q] \wedge [(p \vee q) \Delta s]\} \rightarrow \{(s \Delta p) \rightarrow t\}$,
determine el valor de verdad de las proposiciones:
a) $\{[(\sim p \Delta q) \Delta r] \rightarrow [\sim(q \rightarrow (u \rightarrow p))]\} \Delta (p \Delta q)$
b) $\{\sim(p \rightarrow q) \Delta [(r \wedge p) \rightarrow \sim(r \vee s)]\} \Delta t$

35. Si p, q, r, s, t, w son proposiciones tales que $(p \wedge \sim r) \leftrightarrow (s \rightarrow w)$ es verdadera, y $(\sim w \rightarrow \sim s)$ es falsa, halle el valor de verdad de: $[t \rightarrow (w \vee \sim p) \wedge \sim(p \rightarrow r)]$.

CLAVE DE RESPUESTAS

6. III , 7. Todas , 8. Sólo (c) , 9. $\sim q$, 10. $\sim q$,
11. Sólo (a) y (b) , 12. Todas , 13. a) F, b) F , c) V ; 14. Todas,
15. Sólo (c) , 16. a) F , b) V , c) V . 18. Sólo (c) , 19. Sólo (b) y (c),
20. y 21. Sólo (b), 22. Sólo (a) y (c), 23. 1V y 7F,
24. a) p : V , r: V o F (cualquiera) ; b) p y r : ambos, cualquier valor.
25. a) Él es rico o no es feliz; b) Él es pobre o es feliz;
c) Él no es bajo o no es muy ágil ; (d) Al menos uno, Juan o su papá viajará a Tarma a fin de mes ; (e) Él no tiene ni un compás ni una regla ; (f) Al menos uno de los dos equipos, Alianza o la U, no irá a la Copa Libertadores.
g) Juan no llegará a tiempo con los documentos, y en tal caso al menos uno, Carlos o Jorge, no podrá inscribirse en el ciclo de conferencias.
26. w: F , s: V , r: V , p: F , entonces c) : V , d) : V , e) : F .
27. $(p \rightarrow \sim q) \rightarrow (\sim r \rightarrow s)$, 28. V
29. Sí son Lógicamente Equivalentes , 30. Solo (c).
31. a) Contingencia, b) $p \vee (\sim q)$.
32. Las tres proposiciones son Verdaderas. Note que $q \equiv q$.
33. Del dato resulta que las proposiciones r y s tienen valores de verdad opuestos, y que p y q son ambas verdaderas. Luego, solamente la proposición (III) es necesariamente verdadera.
34. Las proposiciones p y r resultan verdaderas; q , s y t son falsas. Luego, (a) es Verdadera, y (b) es Verdadera.
35. El valor de la proposición dada dependerá del valor de la proposición t :
- Si t es verdadera, la proposición dada resulta FALSA;
- Si t es falsa, la proposición dada resulta VERDADERA.

8. VARIANTES CONDICIONALES

Dadas dos proposiciones p y q , con respecto a la proposición condicional "$p \rightarrow q$" se pueden presentar las siguientes variantes condicionales que contienen a p y q :

$q \to p$: llamada la PROPOSICIÓN RECÍPROCA de $p \to q$
$\sim p \to \sim q$: llamada la PROPOSICIÓN INVERSA de $p \to q$
$\sim q \to \sim p$: llamada la PROPOSICIÓN CONTRAPOSITIVA de $p \to q$

Las tablas de verdad de estas cuatro condicionales son

p	q	CONDICIONAL $p \to q$	RECIPROCA $q \to p$	INVERSA $\sim p \to \sim q$	CONTRAPOSITIVA $\sim q \to \sim p$
V	V	V	V	V	V
V	F	F	V	V	F
F	V	V	F	F	V
F	F	V	V	V	V

Observe que una proposición condicional y su reciproca no son Lógicamente Equivalentes.

8.1 TEOREMA Una proposición condicional $p \to q$ y su contrapositiva $\sim q \to \sim p$ son Lógicamente Equivalentes.

(Ver la tabla de verdad anterior) .

8.2 EJEMPLO. Consideremos los siguientes enunciados acerca de un Paralelogramo A ,

$p \to q$: Si A es un cuadrado, entonces A es un rombo
$q \to p$: Si A es un rombo, entonces A es un cuadrado

De nuestros conocimientos escolares sabemos que $p \to q$ es verdadero, pero que su reciproco $q \to p$ es falso.

8.3 APLICACIÓN DEL TEOREMA (8.1).- Sea n un entero positivo. Demostrar que si n^2 es par entonces n es par.

SOLUCIÓN. Definimos $p: n^2$ es par , $q: n$ es par. Sus negaciones son

$\sim p: n^2$ es impar, $\sim q: n$ es impar.

Se nos pide demostrar que $p \to q$ es verdadera , es decir que

" Si n es impar entonces n^2 es impar " se cumple . En efecto ,

Si n es impar entonces $n = 2k + 1$ para algún entero $k \geq 0$; luego

$$n^2 = (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1$$

$$n^2 = 2k_1 + 1 \quad \text{donde} \quad k_1 = 2k^2 + 2k$$

y como k_1 es un entero ≥ 0 , entonces n^2 resulta también ser impar.

Así hemos verificado que $\sim q \to \sim p$ es verdadera, y por lo tanto que $p \to q$ es verdadera, que es lo que queríamos demostrar.

A continuación estudiaremos un tipo de condicionales que nos llevarán a procedimientos correctos de deducción lógica.

9. INFERENCIA LÓGICA o ARGUMENTO LÓGICO

Se llama INFERENCIA LÓGICA o ARGUMENTO (LÓGICO) a toda condicional de la forma

$$(p_1 \wedge p_2 \wedge \ldots \wedge p_k) \to q \qquad (*)$$

donde las PROPOSICIONES $p_1, p_2, \ldots, p_k$ son llamadas **PREMISAS** , y originan como consecuencia otra proposición denotada q y llamada **CONCLUSIÓN**.

Una inferencia puede ser una tautología, una contingencia, o una contradicción.

1) Si la condicional $(*)$ es una TAUTOLOGÍA, es decir si es una ***Implicación*** entonces recibe el nombre de **ARGUMENTO VÁLIDO** o Inferencia Válida.
2) Si la condicional $(*)$ no es una Tautología entonces se denomina **FALACIA**.

El valor de verdad de un Argumento se determina como sigue.

DEFINICIÓN. Un argumento $(*)$ es verdadero si q es verdadera cuando todas las premisas $p_1, p_2, \ldots, p_k$ son verdaderas. En cualquier otro caso el Argumento $(*)$ es falso.

El Argumento $(*)$ también es denotado por:

$$p_1, p_2, \ldots, p_k \vdash q \qquad (**)$$

9.1 TEOREMA Si el Argumento es VÁLIDO y las premisas $p_1, p_2, \ldots, p_k$, son verdaderas, entonces la CONCLUSIÓN q es verdadera.

PRUEBA. Siendo un argumento (inferencia) válido, la condicional $(*)$ $(p_1 \wedge p_2 \wedge \ldots \wedge p_k) \to q$ es una tautología, en la que $(p_1 \wedge p_2 \wedge \ldots \wedge p_k)$ es verdadera (pues cada $p_1, p_2, \ldots, p_k$ lo es) de donde la única posibilidad para la CONCLUSIÓN q es que sea verdadera (si fuese falsa, la condicional sería falsa y la inferencia no sería VÁLIDA contradiciendo la hipótesis).

9.2 OBSERVACIÓN Una inferencia no se modifica si una o varias de las proposiciones componentes $p_1, p_2, \ldots, p_k, q$, se reemplazan por otra u otras que sean ***EQUIVALENTES***.

9.3 NOTACIÓN Un argumento $(p_1 \wedge p_2 \wedge \ldots \wedge p_k) \rightarrow q$ también se denota en la forma siguiente:

donde los tres puntos $\therefore$ se leen "*por lo tanto*".

$$\begin{array}{l} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_k \\ \hline \therefore\ q \end{array}$$

9.4 EJERCICIO Demuestre que el siguiente Argumento es Válido:

$$\begin{array}{l} p \\ p \rightarrow q \\ \hline \therefore\ q \end{array}$$

SOLUCIÓN. Debemos demostrar que la condicional $[p \wedge (p \rightarrow q)] \rightarrow q$ es una Tautologia (V) :

$$\begin{aligned} [p \wedge (p \rightarrow q)] \rightarrow q &\equiv \sim[p \wedge (p \rightarrow q)] \vee q \\ &\equiv \sim[p \wedge (\sim p \vee q)] \vee q \\ &\equiv (\sim p) \vee (p \wedge \sim q) \vee q \\ &\equiv [(\sim p) \vee q] \vee (p \wedge \sim q) \\ &\equiv [\sim(p \wedge \sim q)] \vee (p \wedge \sim q) \quad \equiv \quad V \quad \ldots \text{ TAUTOLOGIA} \end{aligned}$$

Esto también pudo haberse demostrado con las tablas de verdad.

9.5 EJEMPLO En un Ejercicio Propuesto teníamos la LEY TRANSITIVA:

$$[(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)] \Rightarrow (p \rightarrow r)$$

por lo tanto el siguiente es un ARGUMENTO LÓGICO ***válido*** :

$$\begin{array}{l} p \rightarrow q \\ q \rightarrow r \\ \hline \therefore\ p \rightarrow r \end{array}$$

9.6 INFERENCIAS VÁLIDAS NOTABLES MÉTODOS DE DEMOSTRACIÓN

9.6.1 LEY DEL MODUS PONENDO PONENS

$$[(p \rightarrow q) \wedge p] \Rightarrow q$$

también simbolizado como:

$$\begin{array}{l} p \rightarrow q \\ p \\ \hline \therefore\ q \end{array}$$

y cuya validez ha sido demostrada en el Ejercicio (9.4).

EJEMPLO: Si Luis gana el concurso, entonces viajará a España
Luis gana el concurso

$\therefore$ Luis viajará a España

9.6.2 LEY DEL MODUS TOLLENDO TOLLENS

$$[(p \rightarrow q) \wedge (\sim q)] \Rightarrow (\sim p)$$

simbolizado también como:

$$\begin{array}{l} p \rightarrow q \\ \sim q \\ \hline \therefore\ \sim p \end{array}$$

EJEMPLO: Si Luis gana el concurso, entonces viajará a España
Luis no viajó a España

$\therefore$ (Por lo tanto) Luis no ganó el concurso

9.6.3 LEY DEL SILOGISMO HIPOTÉTICO

$$[(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)] \Rightarrow (p \rightarrow r)$$ LEY TRANSITIVA

simbolizado también como:

$$\begin{array}{l} p \rightarrow q \\ q \rightarrow r \\ \hline \therefore\ p \rightarrow r \end{array}$$

EJEMPLO: Si no llueve entonces se perderá la cosecha
Si se pierde la cosecha entonces no se podrá cancelar la deuda
---
$\therefore$ (Por lo tanto) Si no llueve, no se podrá cancelar la deuda.

9.6.4 LEY DEL SILOGISMO DISYUNTIVO

$$[(p \vee q) \wedge (\sim p)] \Rightarrow q$$

esquematizada por:

$$\begin{array}{l} p \vee q \\ \sim p \\ \hline \therefore\ q \end{array}$$

EJEMPLO: Gladys tiene un carnet o una Libreta Electoral
Gladys no tiene ningún carnet

$\therefore$ (Por lo tanto) Gladys tiene una Libreta Electoral

9.6.5 LEY DEL DILEMA CONSTRUCTIVO

$$[(p \rightarrow q) \wedge (r \rightarrow s) \wedge (p \vee r)] \Rightarrow (q \vee s)$$

esquematizada por:

$$\begin{array}{l} p \to q \\ r \to s \\ p \vee r \\ \hline \therefore \quad q \vee s \end{array}$$

EJEMPLO: Si Pepito toma bebidas heladas, entonces se resfriará
Si Rosa no llega a tiempo, se quedará sin ver la obra
Pepito toma bebidas heladas o Rosa no llegó a tiempo

$\therefore$ (Por lo tanto) Pepito se resfriará o Rosa se quedará sin ver la obra.

9.6.6 LEYES DE SIMPLIFICACIÓN

a) $p \wedge q \Rightarrow p$, b) $p \wedge q \Rightarrow q$ esquematizadas por

$$\begin{array}{l} p \\ q \\ \hline \therefore \quad p \end{array} \qquad \begin{array}{l} p \\ q \\ \hline \therefore \quad q \end{array}$$

EJEMPLO: Ningún estudiante es ocioso y Carlos es un excelente pianista.
Por lo tanto, ningún estudiante es ocioso.

9.6.7 LEY DE LA ADICIÓN :

$$p \Rightarrow (p \vee q)$$

EJEMPLO: Todos los poetas son desordenados. Luego, los poetas son desordenados o son temperamentales.

9.7 EJERCICIO Para cada conjunto dado de premisas encontrar una Conclusión adecuada, de modo que la Inferencia sea válida:

a) $(p \to \sim q)$, $(r \to q)$; b) $(p \to \sim q)$, $(r \to p)$, q

SOLUCIÓN. De las IMPLICACIONES ya conocidas tenemos que -

a) Si reemplazamos $(r \to q)$ por su equivalente $(\sim q \to \sim r)$ entonces:

$$[(p \to \sim q) \wedge (\sim q \to \sim r)] \Rightarrow (p \to \sim r)$$ por la Ley del Silogismo Hipotético.

b) Por conmutatividad tenemos

$$[(r \to p) \wedge (p \to \sim q) \wedge q] \Rightarrow [(r \to \sim q) \wedge q]$$ (Ley del Modus Ponendo Ponens)
$$\Rightarrow \sim r$$ (Ley del Modus Tollendo Tollens)

9.8 MÉTODOS DE DEMOSTRACIÓN

Cuando se utiliza un Argumento Lógico Válido en la forma:

$$p_1 \wedge p_2 \wedge \ldots \wedge p_k \Rightarrow q \qquad (I)$$

para una cierta Demostración, entonces se dice que se ha empleado un MÉTODO DIRECTO DE DEMOSTRACIÓN.

En cambio, si consideramos la ***negación de la conclusión*** q y de ***una de las premisas*** $p_1, p_2, \ldots, p_k$, digamos de p_1 y se construye el siguiente Argumento:

$$[(\sim q) \wedge p_2 \wedge \ldots \wedge p_k] \to \sim p_1 \qquad (II)$$

probaremos que este Argumento Lógico (II) es equivalente al Argumento (I) :

$$[(\sim q) \wedge p_2 \wedge \ldots \wedge p_k] \to \sim p_1$$
$$\equiv \sim[(\sim q) \wedge p_2 \wedge \ldots \wedge p_k] \vee \sim p_1 \equiv q \vee [\sim(p_2 \wedge \ldots \wedge p_k)] \vee \sim p_1$$
$$\equiv q \vee [\sim(p_2 \wedge \ldots \wedge p_k \wedge p_1)] \equiv \sim(p_1 \wedge p_2 \wedge \ldots \wedge p_k) \vee q$$
$$\equiv [p_1 \wedge p_2 \wedge \ldots \wedge p_k] \to q \quad : \text{ARGUMENTO (I)}$$

9.8.1 DEFINICIÓN Cuando se desea emplear el Argumento Válido (II) en una Demostración, se dice que se está aplicando el MÉTODO INDIRECTO o Método por Reducción al Absurdo.

9.8.2 NOTA La aplicación del MÉTODO INDIRECTO consiste en considerar ahora como premisa a la negación de la conclusión, es decir $\sim q$, y se trata de inferir válidamente la negación de ***alguna de las premisas***, considerando las demás verdaderas. Para efectos de la prueba previa se trató de inferir $\sim p_1$, la negación de la premisa p_1.

9.8.3 EJERCICIO Utilice los dos métodos: Directo e Indirecto, para comprobar la validez del argumento:

$$\begin{array}{l} q \to p \\ q \vee s \\ \sim s \\ \hline \therefore \quad p \end{array}$$

MÉTODO DIRECTO:

$$[(q \to p) \wedge (q \vee s) \wedge \sim s] \to p \equiv [(\sim q \vee p) \wedge (q \wedge \sim s)] \to p$$
$$\equiv [p \wedge q \wedge \sim s] \to p \equiv \sim(q \wedge \sim s \wedge p) \vee p$$
$$\equiv \sim(q \wedge \sim s) \vee (\sim p \vee p) \equiv \sim(q \wedge \sim s) \vee V \equiv V \quad \text{TAUTOLOGÍA}$$

MÉTODO INDIRECTO: Probaremos que la siguiente condicional es Tautológica

$$[(q \to p) \wedge (\sim p) \wedge (\sim s)] \to \sim(q \vee s) \equiv$$
$$\equiv [(\sim q \vee p) \wedge (\sim p) \wedge (\sim s)] \to \sim(q \vee s)$$
$$\equiv [\{(\sim q \wedge \sim p) \vee F\} \wedge \{\sim s\}] \to \sim(q \vee s)$$
$$\equiv \sim(q \vee p \vee s) \to \sim(q \vee s) \equiv (q \vee p \vee s) \vee \sim(q \vee s)$$
$$\equiv p \vee [(q \vee s) \vee \sim(q \vee s) \equiv p \vee V \equiv V \quad \ldots \text{TAUTOLOGÍA}$$

9.9 PROBLEMA Demostrar que: si $q = \frac{m}{n}$, con m, n enteros primos entre sí (no tiene factores comunes, excepto el 1), entonces $q^2 \neq 2$.

SOLUCIÓN. Supongamos que se cumple la negación de la tesis, es decir que $q^2 = 2$ para $q = \frac{m}{n}$, con m y n enteros primos entre sí,

luego $q^2 = 2 \Rightarrow (m/n)^2 = 2 \Rightarrow m^2 = 2n^2$ $(*)$

$\Rightarrow m^2$ es par, pues n es un entero $\Rightarrow m$ también es par (por un Ejercicio anterior), $m = 2k_1$ para algún entero $k_1 \Rightarrow$ en $(*)$: $4k_1^2 = 2n^2 \Rightarrow$ $n^2 = 2k_1^2 \Rightarrow n^2$ es par $\Rightarrow n$ es par también (por un Ejercicio previo) $\Rightarrow n = 2k_2$ para algún entero k_2. De aquí resulta que ambos m y n tienen como factor común al número 2 contradiciendo la hipótesis acerca de m y n, de ser primos entre sí. Así, hemos concluido nuestra demostración, mediante una aplicación del MÉTODO INDIRECTO o por Reducción al Absurdo.

Así, hemos demostrado que ***no existe ningún número racional*** q ***tal que*** $q^2 = 2$.

9.10 COROLARIO El número $\sqrt{2}$ no es racional.

9.11 APLICACIONES A ENUNCIADOS

9.11.1 EJEMPLO Determine la validez de los argumentos:

a) Si llueve, Julia se resfriará
No llovió

$\therefore$ Julia no se resfrió

b) Si llueve, Julia se resfriará
Julia no se resfrió

$\therefore$ No llovió

SOLUCIÓN p : Llueve , q : Julia está resfriada

Escribamos los argumentos en forma simbólica

a) $[(p \to q) \wedge (\sim p)] \to \sim q$, b) $[(p \to q) \wedge (\sim q)] \to \sim p$

a) $\equiv \sim\{[(\sim p) \vee q] \wedge \sim p\} \vee (\sim q) \equiv \sim\{(\sim p) \vee (q \wedge \sim p)\} \vee (\sim q)$

$\equiv [p \wedge (\sim q \vee p)] \vee (\sim q) \equiv (p \vee \sim q) \wedge (p \vee \sim q)$

$\equiv p \vee \sim q$. No es una Tautología pues depende de los valores que tomen p y q. Así, (a) NO ES VÁLIDO, es una Falacia.

b) $[(p \to q) \wedge (\sim q)] \to \sim p \equiv \sim\{[(\sim p) \vee q] \wedge \sim q\} \vee (\sim p)$

$\equiv \sim\{(\sim p) \wedge (\sim q)\} \vee (\sim p) \equiv p \vee q \vee \sim p \equiv (p \vee \sim p) \vee q$

$\equiv V \vee q \equiv V$ ... TAUTOLOGÍA . Luego, (b) es VÁLIDO.

En este caso (b), también pudimos haber aplicado la Ley del Modus Tollendo Tollens directamente.

9.11.2 EJEMPLO Compruebe la validez del argumento:

Si estudio, entonces no me desaprueban Matemáticas
Si no voy a nadar, entonces estudio
Pero, me desaprobaron Matemáticas

$\therefore$ (Por lo tanto) Me fui a nadar

SOLUCIÓN. p : Yo estudio , q : Me desaprueban Matemáticas
r : Me voy a nadar.

El argumento es $[(p \to \sim q) \wedge (\sim r \to p) \wedge q] \to r$. Luego,

$[(p \to \sim q) \wedge (\sim r \to p) \wedge q] \equiv [(\sim r \to p) \wedge (p \to \sim q) \wedge q]$

$\Rightarrow [(\sim r \to \sim q) \wedge q] \Rightarrow r$

SILOG. HIP. MODUS TOLL.

Así, hemos comprobado que el argumento dado es una IMPLICACIÓN (condicional tautológica), es decir que es un ARGUMENTO VÁLIDO.

9.11.3 EJERCICIO Verifique la validez del argumento:

En el cumpleaños de mi esposa la llevaré a cenar afuera
Es el cumpleaños de mi esposa o trabajo hasta tarde
Hoy no llevé a mi esposa a cenar afuera

Por lo tanto, hoy trabajé hasta tarde

SOLUCIÓN. p : Es el cumpleaños de mi esposa ,
q : La llevaré a cenar afuera , r : Hoy trabajo hasta tarde

Verificaremos que el argumento : $[(p \to q) \wedge (p \vee r) \wedge (\sim q)] \to r$ $(*)$ es una Tautología. En efecto,

$[(p \to q) \wedge (p \vee r) \wedge \sim q] \equiv [(p \to q) \wedge (\sim q) \wedge (p \vee r)]$

$\Rightarrow [(\sim p) \wedge (p \vee r)] \equiv [(\sim p \wedge p) \vee (\sim p \wedge r)]$

MODUS TOLL. $\equiv \sim p \wedge r \Rightarrow r$ (Ley de Simplificación)

Por lo tanto, $[(p \to q) \wedge (p \vee r) \wedge (\sim q)] \Rightarrow r$: es Tautología, de modo que el Argumento dado es VÁLIDO.

9.11.4 NOTA Del desarrollo de la Solución del Ejercicio previo, vemos que el siguiente es también un ARGUMENTO VÁLIDO:

En el cumpleaños de mi esposa la llevaré a cenar afuera
Es el cumpleaños de mi esposa o trabajo hasta tarde
Hoy no llevé a mi esposa a cenar afuera

$\therefore$ Por lo tanto, hoy no es el cumpleaños de mi esposa

SERIE DE EJERCICIOS

1. Verifique la validez de los siguientes argumentos:

a) $\dfrac{p \wedge q \qquad \sim p \to q}{\sim q}$

b) $\dfrac{(p \wedge q) \to (r \wedge s) \qquad (\sim q) \vee (\sim s)}{(\sim p) \vee \sim q}$

c) $\dfrac{p \wedge (p \vee q) \qquad (p \vee q) \to r \qquad r \to s}{s}$

c) $\dfrac{r \to \sim q \qquad p \to q \qquad \sim r \to s}{p \to s}$

e) $\dfrac{p \qquad (\sim p \vee \sim s) \to (\sim p \wedge \sim r)}{s}$

SUG: Algunos se prueban mejor por el método indirecto.

2. Sea n un número entero, demuestre que si n^2 es múltiplo de 3, entonces n es también múltiplo de 3.
   SUG: n no múltiplo de 3 equivale a que $n = 3k + 1$ ó $n = 3k + 2$, para k entero. Probar para cada caso.
3. Sea n un entero. Demuestre que si n^2 es múltiplo de 5, entonces n es también múltiplo de 5.
4. Sea n un entero. Demuestre que si n^2 es múltiplo de 6, entonces n también es múltiplo de 6.

   SUG: n es múltiplo de 6 si y sólo si n es $\overset{\circ}{2} \wedge \overset{\circ}{3}$.
5. Sea n un entero. Demuestre que si n^3 es múltiplo de 2, entonces n es múltiplo de 2.
6. Demuestre que no existe ningún número racional q tal que: $q^2 = 3$.
7. Demuestre que no existe ningún número racional q tal que: $q^3 = 2$.
8. Dados los argumentos siguientes, determine en cada caso si es un Argumento Válido o si es una Falacia traduciendo previamente a símbolos:

   a) Si 6 es impar, entonces 4 no divide a 7
   5 no es primo *o* 4 divide a 7
   Pero 5 es primo

   $\therefore$ 6 es par (no impar)

   b) Trabajo o apruebo Matemáticas
   Si trabajo no puedo estudiar
   Aprobé Matemáticas

   $\therefore$ Por lo tanto, yo estudié

   c) Si trabajo, no puedo estudiar
   Estudio o apruebo Matemáticas
   Trabajé

   $\therefore$ ***Por lo tanto, aprobé Matemáticas***

RPTA: a) Válido: $\{[(p \to \sim q) \wedge (\sim r \vee q) \wedge r] \to \sim p\} \equiv V$
b) Falacia: $\{[(p \vee r) \wedge (p \to \sim q) \wedge r] \to q\} \equiv p \wedge \sim q \wedge r$
c) Válido: $\{[(p \to \sim q) \wedge (q \vee r) \wedge p] \to r\} \equiv V$

* * * * * *

10. CIRCUITOS BOOLEANOS (LÓGICOS)

Un circuito eléctrico es un ensamblaje de interruptores automáticos que permiten el paso de la corriente eléctrica, o la interrumpen.

Se puede representar un interruptor mediante una proposición p, y viceversa, de modo que se identifique el valor VERDADERO de la proposición p con el PASO DE LA CORRIENTE, en cuyo caso se dice que "***el circuito está cerrado***"; y el valor **FALSO** con la INTERRUPCION DE LA CORRIENTE, en este último caso se dice que "***el circuito está abierto***".

Circuito cerrado (***pasa corriente***: **V**) — Circuito abierto (**no *pasa corriente*** : **F**)

Si en un complejo de interruptores aparecen tanto p como $\sim p$, entonces:
" cuando por el interruptor p está pasando corriente, por el interruptor $\sim p$ estará ***interrumpido el paso***; y cuando por p se encuentre interrumpido el paso de la corriente, por $\sim p$ estará ***circulando la corriente*** "

10.1 NOTA. Cuando esté pasando la corriente denotaremos esta situación con el valor V o sino también con el número 1. Y cuando no esté circulando la corriente denotaremos esta situación con el valor F (Falso) o sino con el número 0.

Es precisamente en base a estos dos valores 0 y 1 en que se fundamenta la teoría del funcionamiento de las Calculadoras Electrónicas y Computadoras.

$1 \equiv V$ (verdadero) ; $0 \equiv F$ (falso)

10.2 CIRCUITOS EN SERIE Son aquellos provistos de dos interruptores p y q, conectados en **SERIE**:

: *NO PASA CORRIENTE*

de modo que en todo el circuito pasará la corriente ***solamente en el caso en que ambos*** p y q ***se encuentren cerrados*** (ambos con el valor 1), como sigue:

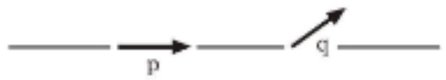
: *PASA CORRIENTE*

Pero, precisamente esta situación corresponde a la tabla de verdad de la **CONJUNCIÓN**

$p \wedge q$:

Aquí, vemos que basta que uno de estos interruptores esté abierto (0) para que no circule la corriente en todo el circuito:

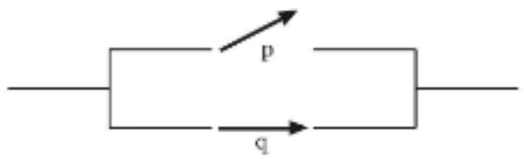
p	q	p ∧ q
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0



$p = 1$
$q = 0$

A la expresión $p \wedge q$ *se le llama la* **FUNCIÓN BOOLEANA** del CIRCUITO EN SERIE.

10.3 CIRCUITOS EN PARALELO Son aquellos provistos de dos interruptores p y q, conectados en **PARALELO**:

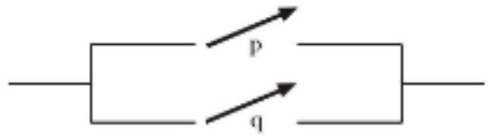


: *PASA CORRIENTE*

Para que circule corriente por este circuito es suficiente que alguno de los interruptores p o q ***esté cerrado*** (1); y solamente dejará de circular la corriente si **ambos interruptores están abiertos** (ambos con el valor: 0). Así, este circuito corresponde precisamente a la tabla de verdad de la **DISYUNCIÓN** : $p \vee q$

A la expresión $(p \vee q)$ se le denomina la **FUNCIÓN BOOLEANA** del CIRCUITO EN PARALELO.

p	q	p ∨ q
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0



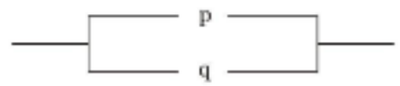
: ***NO PASA CORRIENTE***

10.4 SIMBOLOGÍA.- De aquí en adelante representaremos a un interruptor p simplemente como: ——— p ———

EJEMPLOS:

$p \wedge q$: ——— p ——— q ———

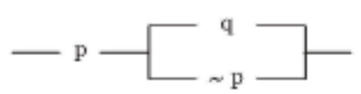
$p \vee q$:



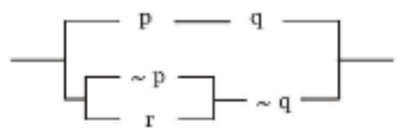
10.5 NOTA.- Una TAUTOLOGÍA se representa por ***un circuito siempre cerrado*** (en el que la corriente siempre está circulando). En las computadoras no son de utilidad, evidentemente.

10.6 PROBLEMA. Representar mediante Funciones Booleanas los circuitos:

a)



b)

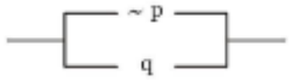


RPT: a) $p \wedge (q \vee \sim p)$ b) $(p \wedge q) \vee \{[(\sim p) \vee r] \wedge \sim q\}$

10.7 PROBLEMA. Construir el circuito Lógico de las Funciones Booleanas siguientes:

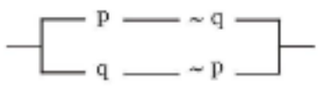
a) $p \rightarrow q$. b) $p \Delta q$

SOLUCIÓN. a) $p \rightarrow q \equiv (\sim p) \vee q$ (***paralelo***)

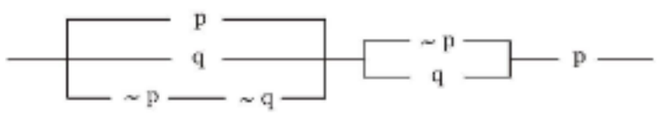


b) $p \Delta q \equiv (p \vee q) \wedge [(\sim p) \vee (\sim q)] \equiv (p \wedge \sim q) \vee (q \wedge \sim p)$:

ó



10.8 PROBLEMA. Simplificar el siguiente circuito:



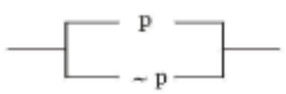
SOLUCIÓN. La función Booleana del circuito dado es:

$$[p \vee q \vee \{(\sim p) \wedge (\sim q)\}] \wedge [(\sim p) \vee q] \wedge p \ ,$$

$\equiv [\{p \vee (\sim p) \vee q\} \wedge (p \vee q \vee \sim q)] \wedge [(\sim p) \vee q] \wedge p$
$\equiv [V \wedge V] \wedge [(\sim p \wedge p) \vee (q \wedge p)] \equiv V \wedge [F \vee (q \wedge p)]$
$\equiv F \vee (p \wedge q) \equiv (p \wedge q)$

El circuito simplificado equivalente resulta: —— p —— q ——

10.9 PROBLEMA. Dada la función Booleana: $(p \ \Delta \ q) \rightarrow (q \ \Delta \ p)$, ¿a cuál de los siguientes circuitos corresponde?

a) 

c)

b) —— p —— q ——

SOLUCIÓN: Como se sabe que: $(p \ \Delta \ q) \equiv (q \ \Delta \ p)$ (***conmutativa***), entonces $(p \ \Delta \ q) \rightarrow (p \ \Delta \ q) \equiv [\sim(p \ \Delta \ q)] \vee (p \ \Delta \ q)$
$\equiv V \equiv p \vee (\sim p)$

Por lo tanto, la función Booleana dada corresponde al circuito (a) .

10.10 PROBLEMA. En el Congreso, una comisión compuesta de tres personas desea emplear un circuito eléctrico para registrar votaciones mayoritarias, simples y secretas.

Construya un circuito que controle tales votaciones con sólo 5 interruptores, de modo que cada miembro de la comisión pueda: ***accionar*** (*cerrar*) el interruptor asignado para decir " **SÍ** " con su voto, o ***no accionar*** (*mantenerlo abierto*) su interruptor asignado para decir " **NO** " con su voto, y que se encienda una señal si la mayoría de los miembros vota afirmativamente. No se admiten abstenciones.

SOLUCIÓN. Denotemos: p , q , r los interruptores correspondientes a cada uno de los miembros de la comisión, respectivamente. El valor que tomará cada uno de estos interruptores será:

1 , ***si el voto corresponde al*** **SÍ**

0 , ***si el voto corresponde al*** **NO**

El circuito va a ser diseñado de modo que ***encienda una señal*** (con valor : 1) ***si la mayoría*** (dos o tres) ***de los miembros vota por el*** **SÍ**, ***y debe estar apagado en cualquier otro caso*** (con el valor: 0).

Así, el funcionamiento de tal circuito estará gobernado por la siguiente tabla de combinaciones de votos de los tres miembros:

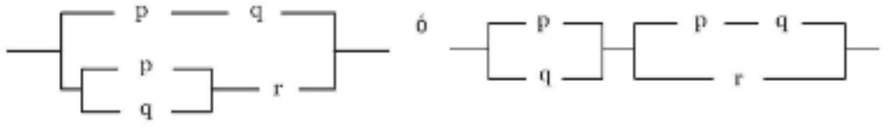
p	q	r	NUMERO DE MIEMBROS QUE VOTAN: SÍ	CIRCUITO (señal)
1	1	1	3	1 (*)
1	1	0	2	1 (*)
1	0	1	2	1 (*)
1	0	0	1	0
0	1	1	2	1 (*)
0	1	0	1	0
0	0	1	1	0
0	0	0	0	0

De la tabla construimos la Función Booleana del circuito buscado:

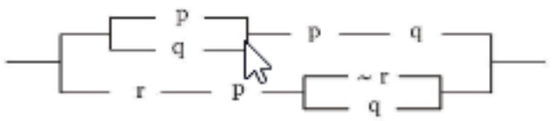
$[p \wedge q \wedge r] \vee [p \wedge q \wedge (\sim r)] \vee [p \wedge (\sim q) \wedge r] \vee [(\sim p) \wedge q \wedge r]$

(y simplificando:) $\equiv (p \wedge q) \vee [(p \vee q) \wedge r] \equiv (p \vee q) \wedge [(p \wedge q) \vee r]$.

Las dos últimas expresiones corresponden a dos circuitos equivalentes, CADA UNO CON 5 INTERRUPTORES, y ***con la propiedad requerida***, los cuales son:



10.11 PROBLEMA. Si el costo de cada llave en la instalación mostrada es de 10 nuevos soles, ¿en cuánto se reducirá el costo de esta instalación si se reemplaza este circuito por uno equivalente más simple?



SOLUCIÓN. La función Booleana del circuito es:

$$[(p \vee q) \wedge p \wedge q] \vee [r \wedge p \wedge ((\sim r) \vee q)] \equiv$$

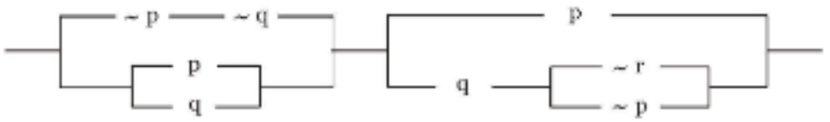
$\equiv (p \wedge q) \vee [p \wedge (r \wedge q)] \equiv (p \wedge q)$: —— p —— q ——

Este circuito reducido y equivalente permite ahorrar 6 de las 8 llaves, lo que corresponde a un ahorro de S/. 60.00. Así, el costo total de la instalación será tan sólo de S/. 20.00 (***dos llaves***).

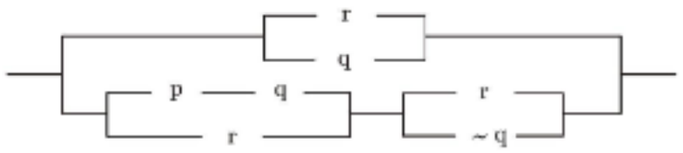
SERIE DE EJERCICIOS

Simplifique los siguientes circuitos, (1), (2) y (3) :

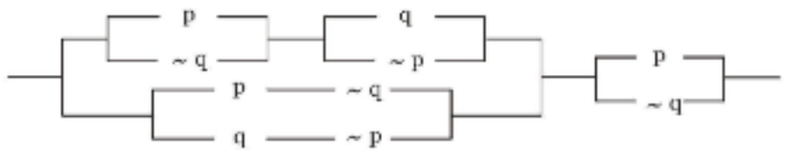
1.



2.



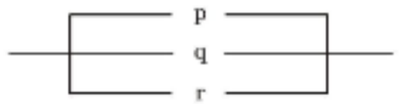
3.



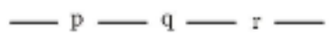
4. ¿A cuál, o cuáles, de los siguientes circuitos le corresponde la proposición:

$\sim[\,p \rightarrow \sim(q \vee r)\,]$?

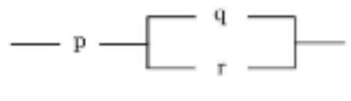
a)



b)



c)

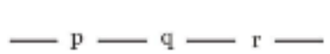


d)

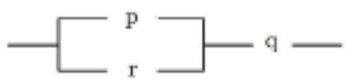
5. ¿A cuál o cuáles de los circuitos siguientes equivale

$\{[(r \vee q) \wedge p] \vee \sim r\} \wedge q$?

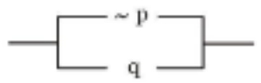
a)



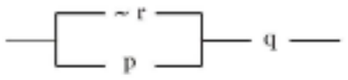
b)



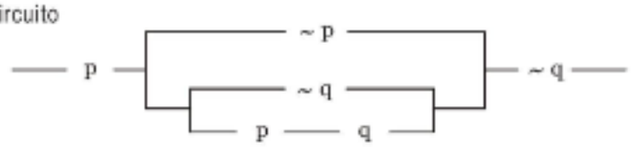
c)



d)



6. El circuito



¿A cuál de las siguientes proposiciones le corresponde?

a) $p \wedge q$

b) $\sim(p \rightarrow q)$

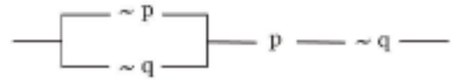
c) $p \vee q$

d) $p \rightarrow (\sim q)$

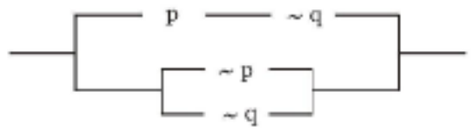
7. Si la tabla de verdad de cierta proposición es como la del esquema adjunto, ¿a cuál(es) de los siguientes circuitos le corresponde?

p	q	?
V	V	F
V	F	V
F	V	V
F	F	V

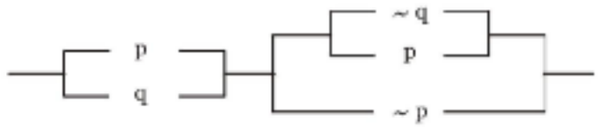
a)



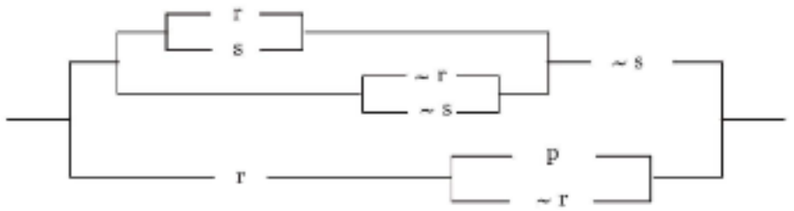
b)



c)



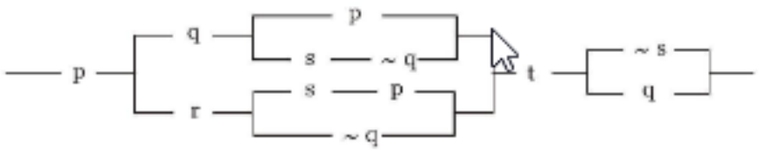
8. Halle el circuito lógico más simple que represente a:



9. Halle el circuito lógico más simple correspondiente a:

$(\sim p) \leftrightarrow [\,p \rightarrow \sim q\,]$

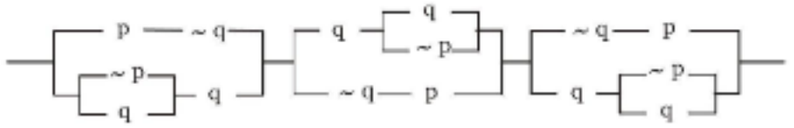
10. Dado el siguiente circuito traducirlo al lenguaje lógico formal y transformarlo en un circuito equivalente más simple:



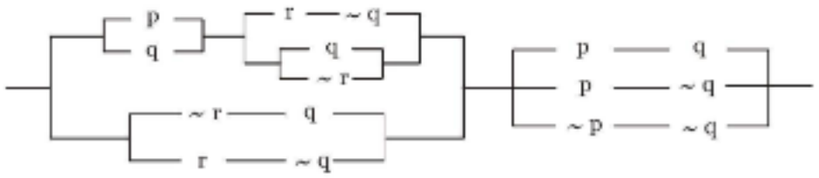
11. Halle el circuito lógico más simple para la siguiente función Booleana:

$\sim[(p \vee \sim q) \vee (p \wedge \sim r) \vee \sim(r \vee q \vee \sim p)]$

12. Simplifique el siguiente circuito lógico :



13. Sea M la proposición más simplificada del circuito

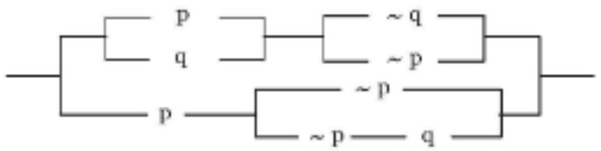


y sea N la proposición más simplificada del circuito correspondiente a:

$[(p \wedge s) \vee (p \wedge \sim s)] \wedge [(p \wedge q) \vee (p \wedge r)]$,

construir el circuito lógico más simplificado que corresponde a la proposición $N \rightarrow M$.

14. Sea A la proposición lógica más simple del circuito

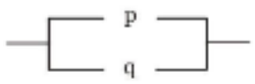


y B la proposición lógica más simple de la proposición: $(p * q) \wedge (p \rightarrow \sim q)$ donde $[(p * q) \rightarrow F]$ es equivalente a: $(p \rightarrow q)$. Simplifique las siguientes proposiciones:

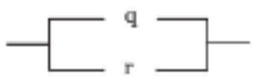
a) $p * q$ b) B c) $A \leftrightarrow B$.

CLAVE DE RESPUESTAS

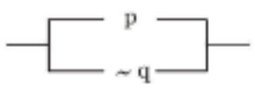
1.



2.

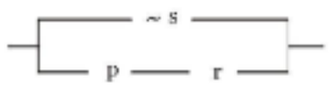


3.

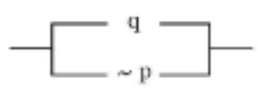


4. Sólo (c) ; 5. Sólo (d) ; 6. Sólo (b) ; 7. Sólo (b): $\sim(p \wedge q)$.

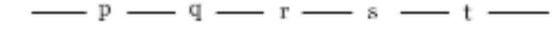
8.



9.

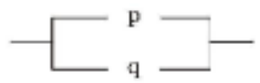


10. $p \wedge ([q \wedge \{p \vee (s \wedge \sim q)\}] \vee [r \wedge \{(s \wedge p) \vee \sim q\}]) \wedge$
$\wedge t \wedge (q \vee \sim s) \equiv p \wedge q \wedge r \wedge s \wedge t$:



11. $q \wedge (\sim p)$:

12. $p \vee q$:



13. M : $p \vee [r \wedge \sim q]$, N : $p \wedge (q \vee r)$.

Luego, $N \rightarrow M \equiv V$ (Tautología)
y su circuito correspondiente es el de un circuito siempre cerrado (por el que siempre está pasando la corriente).

14. Como $A \equiv [p \vee q] \wedge [(\sim p) \vee (\sim q)]$, $B \equiv p \wedge \sim q$,
y que $p * q \equiv p \wedge \sim q$, entonces

$A \leftrightarrow B \equiv p \vee \sim q$.

Ω Ω Ω Ω Ω

2

CONJUNTOS

1. CONJUNTOS

Se entiende por CONJUNTO a una colección, agrupación o reunión de objetos llamados ELEMENTOS, y que puede ser determinado ya sea:

a) **POR EXTENSIÓN**: cuando sus elementos están indicados explícitamente,

b) **POR COMPRENSIÓN**: cuando existe una propiedad o condición que es común a todos sus elementos, de tal manera que al considerar cualquier objeto existente dentro de un contexto de estudio, se pueda establecer sin ambigüedad si es o no un elemento de tal colección.

1.1 NOTACIÓN. Para representar los conjuntos se utilizan letras mayúsculas A, B, ..., y para representar a sus elementos se usan letras minúsculas $a, b, x, \ldots$, entre un par de llaves.

1.2 EJEMPLO. Sea A el conjunto formado por los números positivos impares menores que 11, entonces se puede representar al conjunto A:

a) POR EXTENSIÓN: $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$

b) POR COMPRENSIÓN:

$$A = \{ x \ / \ x \text{ es un número entero impar positivo menor que } 11 \}$$

o también

$$A = \{ x \ / \ x \text{ es un número entero impar positivo menor que } 11 \}$$

y se lee "A es el conjunto de los x **TALES QUE** x es un número entero impar positivo menor que 11".

1.3 NOTACIÓN. Si un objeto x es el elemento de un conjunto A se dice que "x pertenece al conjunto A", o también que "x está en el conjunto A" y se denota por: $x \in A$.

En caso de no pertenecer x al conjunto A, se denota "$x \notin A$".

En el conjunto A del Ejemplo 1.2, $7 \in A$, pero $4 \notin A$.

Es importante saber que un conjunto también puede ser un elemento de algún otro conjunto; por ejemplo, si $A = \{0\}$, $B = \{\{0\}, \{1\}, \{5\}\}$, entonces $0 \in A$, $A \in B$, $0 \notin B$.

2. CONJUNTOS NUMÉRICOS. INTERVALOS.

En Matemáticas los siguientes conjuntos de números son característicos:

$\mathbb{N} = \{$ los números naturales $\} = \{1, 2, 3, \ldots\}$

$\mathbb{Z} = \{$ los números enteros $\} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$

$\mathbb{Q} = \{$ los racionales $\} = \{ x \ / \ x = \frac{m}{n}, \ m \text{ y } n \text{ enteros}, \ n \neq 0 \}$

$\mathbb{I} = \{$ los irracionales $\} = \{ x \ / \ x$ tiene ***representación decimal infinita no periódica***. $\}$

$\mathbb{R} = \{$ los números reales $\} = \{ x \ / \ x$ es racional o x es irracional $\}$

$\mathbb{C} = \{$ los números complejos $\} = \{ x \ / \ x = a + bi, \ a \text{ y } b \in \mathbb{R} \}$, donde $i = \sqrt{-1}$.

$\mathbb{Z}^+ = \{$ los enteros positivos $\} = \{1, 2, 3, \ldots\}$

$\mathbb{Z}^- = \{$ los enteros negativos $\} = \{\ldots, -3, -2, -1\}$

$\mathbb{Z}_0^+ = \{ x \ / \ x = 0 \ \ o \ \ x \in \mathbb{Z}^+ \} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$.

Análogamente se tienen los conjuntos

$$\mathbb{Q}^+, \ \mathbb{R}^+, \ \mathbb{Q}^-, \ \mathbb{R}^-, \ \mathbb{Q}_0^+, \ \mathbb{R}_0^+, \ \mathbb{Q}_0^-, \ \mathbb{R}_0^-, \ \text{etc.}$$

2.1 INTERVALOS

Son conjuntos de números definidos mediante la relación de orden en el campo de los números reales, y son de varios tipos.

A) INTERVALOS CERRADOS

$$[a, b] = \{ x \in \mathbb{R} \ / \ a \leq x \leq b \}$$

en el cual ***están incluidos los extremos*** $x = a$ y $x = b$.

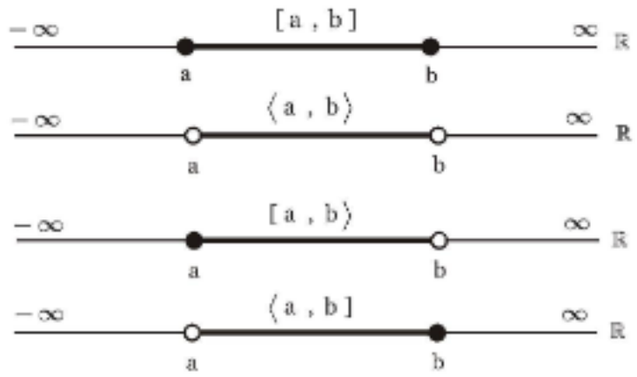
B) INTERVALOS ABIERTOS

$$(a, b) = \{ x \in \mathbb{R} \ / \ a < x < b \}$$

en el cual ***no se incluyen los extremos*** $x = a$ ni $x = b$.

C) INTERVALOS SEMIABIERTOS

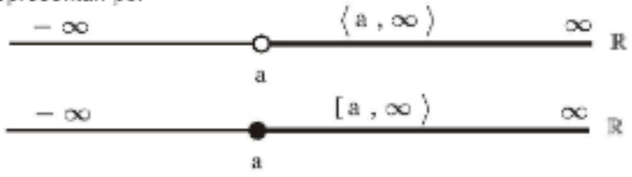
$$[a,b\rangle = \{x \in \mathbb{R} / \ a \leq x < b\}$$
$$\langle a,b] = \{x \in \mathbb{R} / \ a < x \leq b\}$$



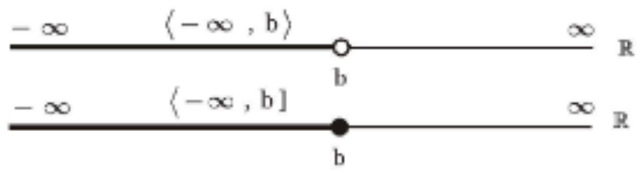
D) RAYOS

$$\langle a,\infty\rangle = \{x \in \mathbb{R} \ / \ x > a\}$$
$$[a,\infty\rangle = \{x \in \mathbb{R} \ / \ x \geq a\}$$

que se representan por



y los RAYOS: $\langle -\infty, b\rangle = \{x \in \mathbb{R} / \ x < b\}$
$\langle -\infty, b] = \{x \in \mathbb{R} / \ x \leq b\}$



2.2 OBSERVACIÓN. $\mathbb{R} = \langle -\infty, \infty\rangle = \{$ los números reales $\}$.

2.3 NOTA. $[a,a] = \{a\}$.

3. CUANTIFICADOR EXISTENCIAL Y CUANTIFICADOR UNIVERSAL

Aquí definimos dos nuevas proposiciones relacionadas con ciertas expresiones $p(x)$ llamadas FUNCIONES PROPOSICIONALES que se convierten en

proposiciones lógicas cuando la variable x toma algún valor particular.

3.1 EJEMPLOS DE FUNCIONES PROPOSICIONALES

La expresión $p(x)$: $x + 1 = 2$ no es una proposición lógica en el sentido que no se le puede asignar un valor de VERDADERO o de FALSO, ***a menos que se le dé un valor particular a la variable*** x :

- Si $x = 1$, $p(1) = 1 + 1 = 2$ es VERDADERO
- Si $x = 5$, $p(5) = 5 + 1 = 2$ es FALSO.

Dada la función proposicional $q(x)$: "x es estudiante universitario ", si tú reemplazas x por tu nombre entonces $q(x)$ se convierte en una proposición lógica.

3.2 CUANTIFICADOR EXISTENCIAL Y CUANTIFICADOR UNIVERSAL

Dado el conjunto $A = \{1, 2, 3, \ldots\} = \mathbb{N}$, y las Funciones Proposicionales

$p(x)$: x es un número natural par
$q(x)$: x es un número negativo
$r(x)$: x es un múltiplo de 3.

se tiene que la siguiente proposición

" ***EXISTE (por lo menos) un elemento*** $x \in A$, *TAL QUE* $p(x)$ es cierto "
y simbolizada por: "$\exists\, x \in A \ / \ p(x)$" o también por: "$\exists\, x \in A : \ p(x)$ ", resulta VERDADERA , pues tal $x \in A$ puede ser $x = 4$.

Explícitamente, la proposición anterior se interpreta como

" ***EXISTE (por lo menos) un elemento del conjunto*** A, *TAL QUE* ***dicho elemento es un número natural par*** ".

En cambio, para la condición $q(x)$ dada, la proposición

" ***EXISTE un elemento*** $x \in A$ ***TAL QUE*** $q(x)$ es cierta " ,

y simbolizada por " $\exists\, x \in A \ / \ q(x)$ ", resulta FALSA , pues ningún elemento x de A cumple con la condición $q(x)$: la de ser un número negativo.

Ahora, para otro conjunto $B = \{3, 6, 9, \ldots\}$, la proposición definida por

" ***PARA TODO*** $x \in B$, **se cumple** la condición $r(x)$ "

y simbolizada por: "$\forall\, x \in B$, $r(x)$ " , resulta VERDADERA , pues se puede verificar que todo elemento del conjunto B es múltiplo de 3.

Sin embargo, para la condición $p(x)$, la proposición

" ***PARA TODO*** $x \in B$, se cumple la condición $p(x)$ "

y simbolizada por: "$\forall\, x \in B,\ p(x)$ " resulta FALSA , pues no es cierto que todo elemento de B sea par, ya que existen elementos en B , como el número 3 que no es par (además de 9 , 15 , 21 , etc. por supuesto).

A estos símbolos $\forall$ y $\exists$ se les llama ***CUANTIFICADOR UNIVERSAL*** y ***CUANTIFICADOR EXISTENCIAL***, respectivamente.

3.3 NEGACIONES DE PROPOSICIONES CON CUANTIFICADORES

Negar el hecho de que exista algún (al menos uno) elemento x de A tal que $p(x)$ se cumpla, equivale a afirmar que ningún elemento x de A satisface la condición $p(x)$; es decir que

"***PARA TODO*** x **en** A , la condición $p(x)$ **no se cumple** "

$$\equiv \sim[\,\exists\, x \in A\,/\ p(x)\,] \equiv \forall\, x \in A\,,\ \sim p(x)$$

Análogamente, se tiene que $\sim[\,\forall\, x \in A\,,\ p(x)\,] \equiv \exists\, x \in A\,/\ \sim p(x)$.

3.4 EJEMPLO. Indicar el valor de las siguientes proposiciones para el conjunto $\mathbb{Z}^+ = \{1, 2, 3, \ldots\}$ y negarlas:

a) $\forall\, x \in \mathbb{Z}^+,\ x^2 - 6x + 5 = 0$

b) $\exists\, x \in \mathbb{Z}^+ /\ x^2 - 6x + 5 = 0$

SOLUCIÓN. Como la ecuación dada $x^2 - 6x + 5 = (x-1)(x-5) = 0$ tiene solamente dos soluciones $x = 1$ y $x = 5$, ambas en $\mathbb{Z}^+$, entonces

(a) es FALSA , pues para que sea verdadera, la ecuación dada debería cumplirse ***para todos los enteros positivos de*** $\mathbb{Z}^+$, pero eso no es cierto ya que sólo se cumple para $x = 1$ y $x = 5$.

(b) es VERDADERA , pues existen hasta dos soluciones $x = 1$ y $x = 5$ en $\mathbb{Z}^+$, y sólo hubiese bastado con una de las soluciones.

Las negaciones correspondientes son:

– para (a): $\sim(\forall\, x \in \mathbb{Z}^+,\ x^2 - 6x + 5 = 0)$

$\equiv \exists\, x \in \mathbb{Z}^+ /\ \sim(x^2 - 6x + 5 = 0)$

$\equiv \exists\, x \in \mathbb{Z}^+ /\ x^2 - 6x + 5 \neq 0$

la cual es VERDADERA , pues se cumple por ejemplo para $x = 2 \in \mathbb{Z}^+$.

– para (b): $\sim(\exists\, x \in \mathbb{Z}^+ /\ x^2 - 6x + 5 = 0)$

$\equiv \forall\, x \in \mathbb{Z}^+,\ \sim(x^2 - 6x + 5 = 0)$

$\equiv \forall\, x \in \mathbb{Z}^+,\ x^2 - 6x + 5 \neq 0$

la cual es FALSA , pues para $x = 1$, $x^2 - 6x + 5$ se hace cero.

3.5 PROBLEMA. Simplificar y negar la siguiente proposición compuesta:

" Todos los números enteros son impares y existen números reales irracionales, si existe algún entero par; si y sólo si, hay algún número real irracional o cualquier número entero es impar, si es que cada número real es racional ".

SOLUCIÓN. Sean $p:\ \forall\, x \in \mathbb{Z}\ ,\ x$ es impar

$q:\ \exists\, x \in \mathbb{R}\ /\ x$ es irracional ,

entonces $\sim p:\ \exists\, x \in \mathbb{Z}\ /\ x$ es par , $\sim q:\ \forall\, x \in \mathbb{R}\ ,\ x$ es racional ;

así, la proposición dada se puede simbolizar como

$\equiv [\,(p \wedge q) \leftarrow \sim p\,] \leftrightarrow [\,(q \vee p) \leftarrow \sim q\,]$, y simplificando:

$\equiv [\,p \vee (p \wedge q)\,] \leftrightarrow (q \vee p) \vee p \equiv p \leftrightarrow (p \vee q)$

$\equiv [\,p \rightarrow (p \vee q)\,] \wedge [\,(p \vee q) \rightarrow p\,]$

$\equiv [\,\sim p \vee (p \vee q)\,] \wedge [\,\sim(p \vee q) \vee p\,] \equiv V \wedge [\,(\sim p \wedge \sim q) \vee p\,]$

$\equiv (\sim p \vee p) \wedge (\sim q \vee p) \equiv V \wedge (p \vee \sim q) \equiv \underline{p \vee (\sim q)}$.

La negación correspondiente es por lo tanto: $(\sim p) \wedge q$ cuya traducción es:

" Existen números enteros pares y existen números reales irracionales ".

3.6 PROBLEMA. Sea $A = \{1, 2, 3\}$. Determinar el valor de verdad de cada una de las proposiciones siguientes e indicar sus negaciones:

a) $\forall\, x \in A\,,\ \forall\, y \in A\,,\ x^2 + 3y < 12$

b) $\forall\, x \in A\,,\ \exists\, y \in A\ /\ x^2 + 3y < 12$

c) $\exists\, x \in A\ /\ \forall\, y \in A\,,\ x^2 + 3y < 12$

d) $\exists\, x \in A\ /\ \exists\, y \in A\ /\ x^2 + 3y < 12$

SOLUCIÓN. Estableciendo que: $\sim(x^2 + 3y < 12) \equiv x^2 + 3y \geq 12$,

(a) es FALSA , pues para $x = 2 \in A\,,\ y = 3 \in A$, no se cumple que $x^2 + 3y < 12$.

(b) es FALSA , pues para $x = 3 \in A$ no existe ningún $y \in A$ que haga cumplir $x^2 + 3y < 12$.

(c) es VERDADERA , tal $x \in A$, puede ser $x = 1$, y solamente este valor.

(d) es VERDADERA , tales $x \in A\,,\ y \in A$ pueden ser:

$(x = 1\,,\ y = 1) \vee (x = 1\,,\ y = 2) \vee (x = 1\,,\ y = 3) \vee (x = 2\,,\ y = 1) \vee$

$\vee\,(x=2\,,\ y=2)$. Bastaba con mostrar una pareja.

Las negaciones correspondientes son, para

(a): $\exists\ x\in A\ /\ \sim(\forall\ y\in A,\ x^2+3y<12)\ \equiv$

$\exists\ x\in A\,/\,\exists\ y\in A\ /\ x^2+3y\geq 12$

(b): $\exists\ x\in A\,/\ \forall\ y\in A,\ x^2+3y\geq 12$

(c): $\forall\ x\in A,\ \exists\ y\in A\ /\ x^2+3y\geq 12$

(d): $\forall\ x\in A,\ \forall\ y\in A,\ x^2+3y\geq 12$.

3.7 NOTACIÓN. El simbolo $\exists!$ es leído como " **EXISTE UN ÚNICO** . . . ".
Por ejemplo, la proposición

" EXISTE UN ÚNICO entero x tal que $3<x^3+2<12$ "

es simbolizada por: " $\exists!\ x\in\mathbb{Z}\ /\ 3<x^3+2<12$ ".

Note que esta proposición es VERDADERA, pues si bien es cierta que la inecuación es satisfecha por muchos números reales, solamente uno de ellos es UN ENTERO, a saber $x=2$.

3.8 EJERCICIO. Sean $A=\{2,3,8\}$, $B=\{1,2,7\}$, ¿cuáles son verdaderas? :

I) $\exists\ x\in A\ /\ \forall\ y\in B,\ x+y\geq 9$;

II) $\exists\ x_1,x_2\in A\ \wedge\ \exists\ y_1,y_2\in B\ /\ \ 2(x_1+x_2)=y_1+y_2$;

III) $\forall\ x\in A,\ \forall\ y\in B,\ \ x+2y<23$. RPTA: Todas.

3.9 EJERCICIO. Dado el Universo $U=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$, ¿cuáles de las siguientes proposiciones son verdaderas?

a) $\forall\,x,\exists\,y\wedge\exists\,z\ /\ \ x^2+y^2<z^2$

b) $\nexists\,x\ /\ \forall y,\ \ x^2+1<3y^2$

c) $\forall\,x\wedge\forall\,y,\exists\,z\ /\ \ 2z>x+y$.

RPT: a) FALSA (para $x=9$ no se cumple). b) FALSA (tal x sí existe: $x=1$)
c) FALSA (para $x=9\ \wedge\ y=9$ no existe ningún $z\in U$ tal que $2z>18$).

3.10 EJERCICIO. Negar las siguientes proposiciones:

a) Si el profesor no está presente, entonces algunos estudiantes no completarán su tarea.
b) Algunos estudiantes no completaron su tarea o el profesor está ausente.
c) El profesor está presente y todos los estudiantes completarán su tarea.

SOLUCIÓN.

a) El profesor está ausente y todos los estudiantes completaron su tarea.

b) Todos los estudiantes completaron su tarea y el profesor está presente.
c) El profesor no está presente o algunos estudiantes completarán su tarea.

SERIE DE EJERCICIOS

1. Niegue las siguientes proposiciones para el conjunto $\mathbb{Z}$ de números enteros:
   a) $\forall\ x\subset\mathbb{Z},\ x+1>x$; b) $\exists\ x\subset\mathbb{Z}\ /\ x^2+1=0$
   c) $\exists\ x\in\mathbb{Z}\ /\ \ x^2=x$; d) $\forall\ x\in\mathbb{Z},\ x^2-1>0$

2. Determine el valor de verdad de cada una de las proposiciones dadas en el Ejercicio anterior.

3. Niegue las siguientes proposiciones:
   a) $\forall\ x\in A,\exists\ y\in A\ /\ \ [\,p(x,y)\rightarrow q(y)\,]$
   b) $\exists\ x\in A\ /\ \exists\ y\in B\ /\ \ p(x)\wedge q(y)$
   c) $\exists\ x\in C\ /\ \forall\ y\in B,\ \ p(x)\vee[\sim q(y)\,]$

4. Demuestre que:
   $\sim[\,\forall\ x\in A,\ \ p(x)\rightarrow q(x)\,]\ \equiv\ \exists\ x\in A\ /\ \ p(x)\wedge\sim q(x)$

5. Niegue cada una de las siguientes proposiciones:
   a) $\forall\ x\in A,\exists\ y\in B\ /\ \forall\ z\in\mathbb{C},\ \ p(x,y,z)$
   b) $\exists\ x\in A\ /\ \exists\ y\in B\,/\ \ [\,p(x)\rightarrow q(x,y)\,]$
   c) $[\,\exists\ y\in A\ /\ \sim p(y)\,]\ \wedge\ \forall\ x\in A\,,\,[\,q(x)\vee r(x)\,]$
   d) Todos los americanos están locos.
   e) Hay al menos una persona que es feliz todo el tiempo.
   f) Todos los hombres son honestos o algún hombre es un ladrón.
   g) Si el número x es menor que 12 , entonces hay un número real 'y' tal que x^2+y^2-144 es positivo.

6. Demostrar que la afirmación: " Para todo entero positivo n , el número n^2-n+41 es un número primo " es FALSA , con un contraejemplo.

7. Indique la verdad o falsedad de:
   a) $\forall\ x\in\mathbb{R},\ \forall\ y\in\mathbb{R},\ \ (-x)(-y)=xy\rightarrow xy>0$
   b) $\exists\ x\in\mathbb{R}\,/\ (-1)x=0$; c) $\forall\ x\in\mathbb{R}\,,\ \dfrac{x^2}{x}=x$.

8. Dado $M=\{1,2,3,4,5\}$, ¿cuáles son verdaderas? :
   a) $\exists\ x\in M\,/\ \ x+3\leq 10$
   b) $\forall\ x\in M,\ \exists\ y\in M\ /\ \ x+y\leq 7$
   c) $\forall\ x\in M\ ,\ \ x+3\leq 8$
   d) $\exists\ x\in M\ /\ \ x+3>6$

9. Dadas las proposiciones:

a) $[\exists\, x \in \mathbb{N} \,/\; x + 2 = 5\,] \wedge [\forall\, x \in \mathbb{N},\; x^2 > x\,]$

b) $[\forall a \in \mathbb{Z},\; -a < 0] \vee [\exists\, x \in \mathbb{Z} \,/\; -x = x\,]$

c) $\exists\, x \in \mathbb{R} \,/\; \sqrt{-x} \in \mathbb{R}$.

¿Cuáles son los valores de verdad de sus negaciones, en ese orden?.

10. ¿Cuál de las siguientes proposiciones corresponde a la negación de:
"Para todo entero r, existe un entero a tal que si ar es par, entonces $(a+1)r$ es par"?:

a) $\exists\, r \in \mathbb{Z} \,/\, \forall\, a \in \mathbb{Z}$, ar y $(a+1)r$ son impares.
b) $\exists\, r \in \mathbb{Z} \,/\, \forall\, a \in \mathbb{Z}$, ar es impar y $(a+1)r$ es par.
c) $\exists\, r \in \mathbb{Z} \,/\, \forall\, a \in \mathbb{Z}$, ar es par y $(a+1)r$ es impar.
d) $\exists\, r \in \mathbb{Z} \,/\, \forall\, a \in \mathbb{Z}$, ar es impar y $(a+1)r$ es par.

11. ¿Cuál de las siguientes proposiciones sobre $\mathbb{Q}$ (racionales) corresponde a la negación de "Para todo número racional r, existe un número entero p tal que $p \le r < p+1$"?:

a) $\exists\, r \in \mathbb{Q} \,/\, \forall\, p \in \mathbb{Z}$, $p + 1 > p > r$
b) $\exists\, r \in \mathbb{Q} \,/\, \forall\, p \in \mathbb{Z}$, $p < p + 1 < r$
c) $\exists\, r \in \mathbb{Q} \,/\, \forall\, p \in \mathbb{Z}$, $p \ge r \;\vee\; p + 1 < r$
d) $\exists\, r \in \mathbb{Q} \,/\, \forall\, p \in \mathbb{Z}$, $p > r \;\vee\; p + 1 \le r$

CLAVE DE RESPUESTAS

1. a) $\exists\, x \in \mathbb{Z} \,/\; x + 1 \le x$, b) $\forall\, x \in \mathbb{Z}$, $x^2 + 1 \neq 0$
   c) $\forall\, x \in \mathbb{Z}$, $x^2 \neq x$, d) $\exists\, x \in \mathbb{Z} \,/\; x^2 - 1 \le 0$

2. V F V F en ese orden. **3.** a) $\exists\, x \in A \,/\, \forall\, y \in A$, $p(x,y) \wedge \sim q(y)$

3. b) $\forall\, x \in A$, $\forall\, y \in B$, $\sim p(x) \vee \sim q(y)$
   c) $\forall\, x \in \mathbb{C}$, $\exists\, y \in B \,/\, \sim p(x) \wedge q(y)$

5. a) $\exists\, x \in A \,/\, \forall\, y \in B$, $\exists\, z \in \mathbb{C} \,/\, \sim p(x,y,z)$
   b) $\forall\, x \in A$, $\forall\, y \in B$, $p(x) \wedge \sim q(x,y)$
   c) $[\forall\, y \in A$, $p(y)\,] \vee [\exists\, x \in A \,/\; \sim q(x) \wedge \sim r(x)\,]$
   d) Existe al menos un americano que no está loco.
   e) Todas las personas son infelices en algún momento.
   f) Hay al menos un hombre deshonesto y ningún hombre es ladrón.
   g) $x < 12$, y para todo $y \in \mathbb{R}$ se cumple que: $x^2 + y^2 - 144 \le 0$

6. $n = 41$; 7. a) F , b) V , c) F ; 8. Las cuatro.

9. V F F ; 10. (c) ; 11. (d).

4. INCLUSIÓN DE CONJUNTOS. SUBCONJUNTOS

Se dice que A es un subconjunto de B si todo elemento de A es también elemento del conjunto B, denotándose en este caso: $A \subset B$.

Formalmente, esta definición es simbolizada como sigue:

$$A \subset B \;\Leftrightarrow\; [\forall\, x \in A\,,\; x \in B\,]$$

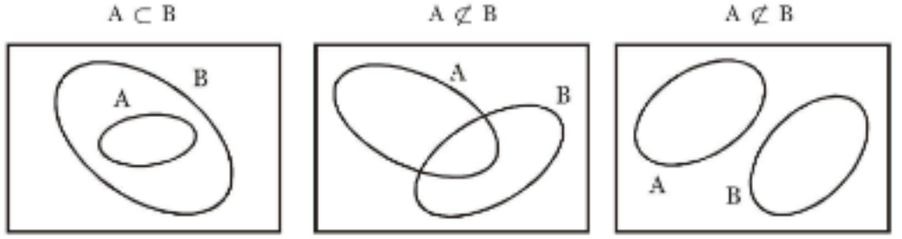
o equivalentemente

$$A \subset B \;\Leftrightarrow\; [\forall\, x \in A\,,\;\; x \in A \;\Rightarrow\; x \in B\;\;]$$

También se dice que "A está incluido en B", o que "A está contenido en B".

La definición formal indica el camino a seguir para demostrar que cierto conjunto A es subconjunto de algún conjunto B.

De la misma definición se sigue que es suficiente que exista al menos un elemento del conjunto A que no sea elemento de B para que A ***no sea subconjunto de*** B ; en este caso se denota $A \not\subset B$.



4.1 EJEMPLO. Si $A = \{2, 4\}$ y $B = \{1, 2, 3, 4\}$ entonces $A \subset B$.
En efecto, por simple inspección se observa que todo elemento de A es también elemento de B.

4.2 DEFINICIÓN. En el caso en que $A \subset B$, si B tuviese uno o más elementos que no pertenecen al conjunto A, se dice que A ***es un SUBCONJUNTO PROPIO de*** B .

4.3 DEFINICIÓN. Se dice que dos conjuntos A y B son ***COMPARABLES*** si alguno de ellos está contenido en el otro. Es decir, si $A \subset B$ o si $B \subset A$.

4.4 EJEMPLO. Para cualquier conjunto A se tiene siempre que $A \subset A$.
En efecto: $\forall\, x \in A$, la implicación $x \in A \;\Rightarrow\; x \in A$ es siempre *VERDADERA*, pues la implicación $p \Rightarrow p$ es una tautología.

4.5 CONJUNTO UNITARIO. Se llama así a todo conjunto que consiste de ***un solo elemento***.

4.6 CONJUNTO VACÍO (NULO) Es aquel conjunto que no tiene elementos y se le denota con el símbolo $\varnothing$.

NOTA.- El conjunto vacío está incluido en todo conjunto: $\forall$ conjunto A , $\varnothing \subset A$.

4.7 CONJUNTO UNIVERSAL. Denotado por U es el que contiene a todos los elementos que están siendo considerados en un estudio o contexto particular. También se le llama el UNIVERSO.

Cuando se especifica el Conjunto Universal U , cualquier otro conjunto que se considere debe estar contenido en dicho Universo U , y cualquier cosa que no esté en U deja de existir.

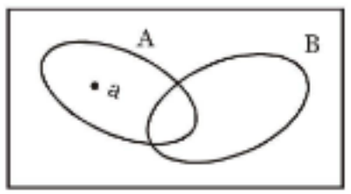
4.8 PROBLEMA. Demostrar la PROPIEDAD TRANSITIVA de la relación de ***inclusión de conjuntos*** : $A \subset B \wedge B \subset C \Rightarrow A \subset C$.

SOLUCIÓN. Se desea demostrar que: $\forall x \in A , \; x \in A \Rightarrow x \in C$.
En efecto, $\forall x \in A , \; x \in A \Rightarrow x \in B$ [pues $A \subset B$] $\wedge \; x \in B \Rightarrow x \in C$ pues $B \subset C$] . Entonces por la Ley Transitiva (Ley del Silogismo Hipotético):
$(p \to q) \wedge (q \to r) \Rightarrow (p \to r)$, se tiene que $\forall x \in A , \; x \in A \Rightarrow x \in C$.

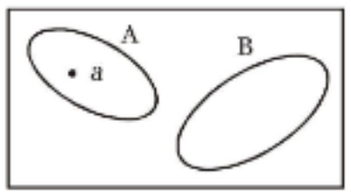
4.9 PROBLEMA. Demuestre que $\varnothing \subset A$, ***para todo conjunto*** A .

SOLUCIÓN. Se desea probar que la implicación: $x \in \varnothing \Rightarrow x \in A$ es VERDADERA, pero esto es cierto pues la proposición $x \in \varnothing$ ***es siempre*** *FALSA* ya que el conjunto vacío no tiene elementos, y en tal caso, siendo el antecedente falso, la implicación resulta ***verdadera***.

4.10 EJERCICIO. Demuestre que la proposición $A \not\subset B$ es equivalente a decir que: " Existe por lo menos un elemento $a \in A$ tal que $a \notin B$ ".



$A \not\subset B$



$A \not\subset B$

$$A \not\subset B \equiv \sim(A \subset B) \equiv \sim(\forall a \in A , \; a \in A \Rightarrow a \in B)$$
$$\equiv \exists a \in A / \sim(a \in A \Rightarrow a \in B)$$
$$\equiv \exists a \in A / \; a \in A \wedge a \notin B , \quad \text{pues}$$
$$\sim(p \to q) \equiv \sim(\sim p \vee q) \equiv p \wedge \sim q .$$

4.11 CONJUNTOS IGUALES. Dos conjuntos A y B ***son iguales si*** : $A \subset B \wedge B \subset A$, a la vez.

Es decir, $A = B \Leftrightarrow [A \subset B \wedge B \subset A]$.

Por ejemplo, dados los conjuntos $A = \{1, 2\}$ y $B = \{1, 2, 1, 2\}$, mediante la definición previa se demuestra fácilmente que $A = B$, pues todo emento de A está en B, y todo elemento de B se encuentra en A; de aquí se sigue que B tiene en realidad solamente dos elementos.

4.12 NOTA. Un conjunto no varía si sus elementos que se repiten son considerados una sola vez.

4.13 PROBLEMA. Si $\{3a + b - 9 , \; 4a\}$ y $\{5a + 2b , \; 4\}$ son conjuntos unitarios, pruebe que $\{6a + b , \; 2b + 8a - 3\}$ también es unitario.

SOLUCIÓN. Siendo unitario el conjunto $\{3a + b - 9 , \; 4a\}$ se cumple que $3a + b - 9 = 4a$. Análogamente, para el otro conjunto se tiene que $5a + 2b = 4$. Resolviendo el sistema se obtiene $a = -2$ y $b = 7$, y por lo tanto el conjunto $\{6a + b , \; 2b + 8a - 3\} = \{-5 , -5\} = \{-5\}$ resulta ser un conjunto unitario.

4.14 PROBLEMA. Sean $A = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, $B = \{2, 4, 6, 8\}$, $C = \{3, 5, 7, 9\}$, $D = \{3, 4, 5\}$ y $E = \{3, 5\}$.
¿Cuál de estos conjuntos puede ser el conjunto H si se dan las siguientes condiciones? :

1) $H \subset A$ y $H \not\subset C$; 2) $H \subset D$ y $H \not\subset B$
3) $H \subset C$ y $H \not\subset A$; 4) H y B son disjuntos.

SOLUCIÓN. 1) H puede ser A , B o D . 2) H puede ser D o E .
3) H no puede ser ninguno. 4) H puede ser C o E .

5. OPERACIONES ENTRE CONJUNTOS

Con respecto a un conjunto universal U y a dos conjuntos A y B se tienen las siguientes operaciones.

5.1 UNIÓN DE DOS CONJUNTOS $A \cup B$

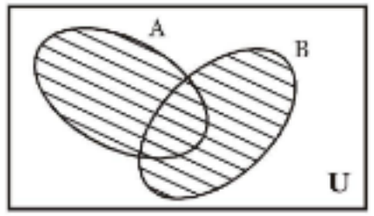
Es el conjunto formado por la reunión de todos los elementos de A y de todos los elementos de B . Simbólicamente ,

$$A \cup B = \{ x \in U / \; x \in A \vee x \in B \}$$
$$= \{ x \in U / \; x \in A \;\; y/o \;\; x \in B \} . \quad \text{(Ver Fig. 1)}$$

5.1.1 EJEMPLO. Dados $A = \{1,3,5,\ldots\}$, $B = \{2,4,6,\ldots\}$

$A \cup B$

(Fig. 1)



entonces $A \cup B = \{1,2,3,\ldots\} = \mathbb{N}$, puesto que se puede expresar

$A = \{x \in \mathbb{N} / \ x$ es impar $\}$, $B = \{x \in \mathbb{N} / \ x$ es par $\}$

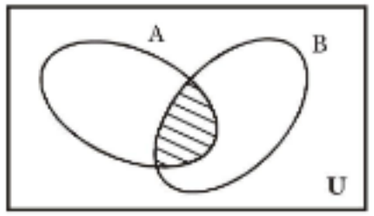
$A \cup B = \{x \in \mathbb{N} / \ x$ es impar $\vee \ x$ es par $\} = \mathbb{N}$

5.2 INTERSECCIÓN DE DOS CONJUNTOS $A \cap B$

Es el conjunto de todos aquellos elementos comunes a ambos conjuntos A y B:

$$A \cap B = \{x \in U / \ x \in A \wedge x \in B\}$$

$A \cap B$



5.2.1 EJEMPLO. Dados $A = \{x \in \mathbb{N} / \ x$ es múltiplo de $3\}$ y

$B = \{x \in \mathbb{N} / \ x$ es múltiplo de $5\}$, entonces

$A \cap B = \{x \in \mathbb{N} / \ x$ es múltiplo de 3 y de 5 a la vez$\}$

$= \{x \in \mathbb{N} / \ x$ es múltiplo de $15\}$.

En efecto, $A = \{3,6,9,12,15,\ldots\}$, $B = \{5,10,15,\ldots\}$, y por lo tanto

$A \cap B = \{15,30,45,\ldots\}$

5.2.2 DEFINICIÓN. Si la intersección de dos conjuntos A y B es vacía se dice que A y B son ***DISJUNTOS***:

$$A \cap B = \varnothing$$

5.3 COMPLEMENTO DE UN CONJUNTO $\complement A$, A' , A^c

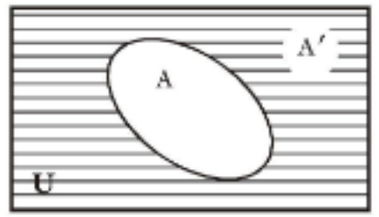
Es aquel conjunto formado por todos aquellos elementos del Universo U que ***NO PERTENECEN*** al conjunto A , y se le denota indistintamente por

A' , A^c o $\complement A$:

Así,

$A' = \{x \in U / \ x \notin A\}$

$= \{x \in U / \ \sim(x \in A)\}$



Por ejemplo, si el conjunto Universal es $U = \{2,3,5,7,9,10,11,15,20\}$ y si $A = \{x \in U / \ x$ es impar $\}$ entonces el *COMPLEMENTO* de A es

$\complement A = A' = \{x \in U / \ x$ no es impar $\} = \{2,10,20\}$.

5.3.1 EJERCICIO. Sea el Universo $U = \{1,2,3,4,5,9\}$. Por extensión halle los conjuntos A y A' si $A = \{x^2 / \ x \in U\}$.

SOLUCIÓN. El conjunto A está formado por aquellos elementos (del Universo U) que son cuadrados de elementos de A . Si bien es cierto que para $x \in U = \{1,2,3,4,5,9\}$ se tiene que el cuadrado x^2 podría aparentemente tomar los valores $1,4,9,16,25$ y 81, sin embargo, como A ***es un subconjunto del UNIVERSO*** U, entonces solamente debemos considerar $x^2 = 1,4$ y 9 por ser estos elementos de U . Luego, $A = \{1,4,9\}$ y su complemento $A' = \{2,3,5\}$.

5.4 DIFERENCIA DE CONJUNTOS $A - B$

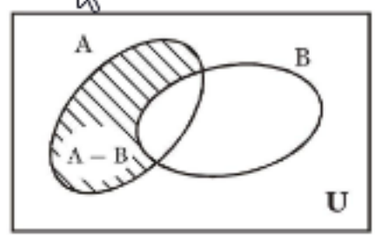
Está constituido por aquellos elementos de A ***que no pertenecen al conjunto*** B ,

$$A - B = \{x \in U / \ x \in A \wedge x \notin B\}$$

También se le denota por

$\complement_A B = A - B$

y también se le llama ***Complemento de*** B ***con respecto al conjunto*** A .



5.4.1 EJERCICIO. Dados los conjuntos

$A = \{x \in \mathbb{N} / \ x$ es múltiplo de $3\} = \{3,6,9,12,15,\ldots\}$,

$B = \{x \in \mathbb{N} / \ x$ es múltiplo de $5\} = \{5,10,15,20,\ldots\}$,

halle los conjuntos diferencia: a) $A - B$, b) $B - A$.

SOLUCIÓN.

a) Para hallar $A - B$ se deben ubicar los elementos de A ***que no pertenezcan a*** B, es decir, los múltiplos de 3 que no sean múltiplos de 5: estos son aquellos múltiplos de 3 cuya última cifra no es ni 0 ni 5.

$$A - B = \{3, 6, 9, 12, 18, 21, 24, 27, 33, \ldots\}$$

b) $$\begin{aligned} B - A &= \{x \in \mathbb{N} \;/\; x \in B \wedge x \notin A\} \\ &= \{x \in \mathbb{N} \;/\; x \text{ es múltiplo de } 5 \text{ pero no de } 3\} \\ &= \{5, 10, 20, 25, 35, 40, 50, 55, 65, \ldots\} \end{aligned}$$

Este conjunto está constituido por los múltiplos de 5 tales que la suma de sus dígitos no sean múltiplo de 3, como $55, 70, 125, \ldots$ etc.

La siguiente identidad referente al conjunto Diferencia $A - B$ es muy utilizada en los casos prácticos.

5.4.2 EJERCICIO. Demuestre que: $A - B = A \cap \complement B$.

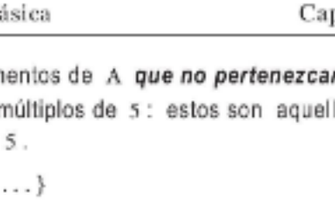
SOLUCIÓN. $$\begin{aligned} A - B &= \{x \in U \;/\; x \in A \wedge x \notin B\} \\ &= \{x \in U \;/\; x \in A \wedge \sim(x \in B)\} \\ &= \{x \in U \;/\; x \in A \wedge x \in \complement B\} = A \cap \complement B \;. \end{aligned}$$

5.5 DIFERENCIA SIMÉTRICA $A \Delta B$

Es el conjunto formado por la reunión de aquellos elementos que pertenecen ***exclusivamente a uno solo de los conjuntos*** A *o* B:

$$\begin{aligned} A \Delta B &= \{x \in U \;/\; (x \in A \wedge x \notin B) \vee (x \in B \wedge x \notin A)\} \\ &= (A - B) \cup (B - A) \end{aligned}$$

Zona sombreada: $A \Delta B$



Algunas propiedades de la **DIFERENCIA SIMÉTRICA** son:

a) $A \Delta B = (A \cup B) - (A \cap B)$; b) $A \Delta \varnothing = A$; c) $A \Delta A = \varnothing$

b) $[A \Delta B] = (A - B) \cup (B - A) = (B - A) \cup (A - B) = [B \Delta A]$

c) $(A \Delta B) \Delta C = A \Delta (B \Delta C)$ . . . *PROPIEDAD ASOCIATIVA.*

5.5.1 EJEMPLO. Si $A = \{2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, $B = \{1, 4, 6, 7, 9\}$
entonces : $A - B = \{2, 3, 5\}$, $B - A = \{1, 9\}$, y
$A \Delta B = (A - B) \cup (B - A) = \{2, 3, 5, 1, 9\}$.

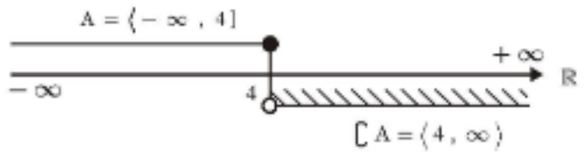
5.6 NOTA. Los diagramas anteriores llamados **DIAGRAMAS DE VENN - EULER** son muy útiles para verificar gráficamente ciertas propiedades de las operaciones entre conjuntos como las que veremos en la SECCIÓN 7 : LEYES DEL ÁLGEGEBRA DE CONJUNTOS, y que luego se pueden demostrar formalmente mediante las LEYES DEL ÁLGEBRA DE PROPOSICIONES LÓGICAS.

6. OPERACIONES DE CONJUNTOS APLICADAS A LOS INTERVALOS

En toda esta Sección el conjunto $\mathbb{R}$ de números reales será considerado como el UNIVERSO U, a menos que se especifique otra cosa.

6.1 EJEMPLO. Si $A = \langle -\infty, 4]$, halle $\complement A$.

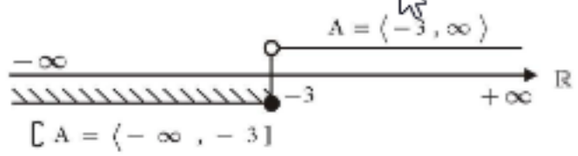
SOLUCIÓN. $$\begin{aligned} \complement A = \complement\langle -\infty, 4] &= \{x \in \mathbb{R} \;/\; x \notin \langle -\infty, 4]\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} \;/\; \sim(x \in \langle -\infty, 4])\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} \;/\; \sim(x \leq 4)\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} \;/\; x > 4\} = \langle 4, \infty\rangle \end{aligned}$$



El Complemento de A está constituido por todo lo que no está en A, dentro del Universo $\mathbb{R}$.

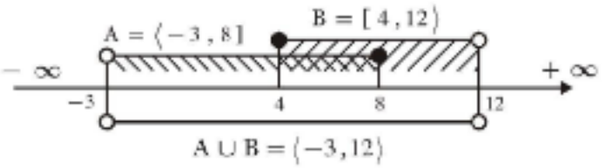
6.2 EJEMPLO. Si $A = \langle -3, \infty\rangle$, halle $\complement A$.

SOLUCIÓN. $\complement A = \complement\langle -3, \infty\rangle = \{x \in \mathbb{R} \;/\; x \notin \langle -3, \infty\rangle\} = \langle -\infty, -3]$



6.3 EJEMPLO. Si $A = \langle -3, 8]$ y $B = [4, 12\rangle$, halle $A \cup B$ y $A \cap B$.

SOLUCIÓN.



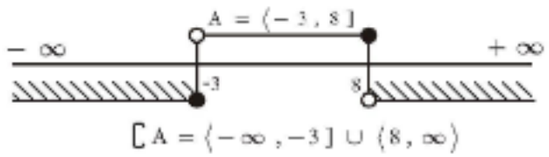
$A \cup B = \langle -3, 8] \cup [4, 12\rangle = \langle -3, 12\rangle$.

$A \cap B = \langle -3, 8] \cap [4, 12\rangle$ (elementos comunes de A y B) $= [4, 8]$.

6.4 EJEMPLO. Si $A = \langle -3, 8]$ y $B = [4, 12\rangle$, halle 1) $\complement A$, 2) $\complement B$.

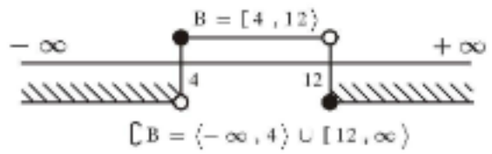
SOLUCIÓN.

1) $\complement A = \complement\langle -3, 8] = \langle -\infty, -3] \cup \langle 8, \infty\rangle$



$\complement A = \langle -\infty, -3] \cup \langle 8, \infty\rangle$

2) $\complement B = \complement[4, 12\rangle = \langle -\infty, 4\rangle \cup [12, \infty\rangle$



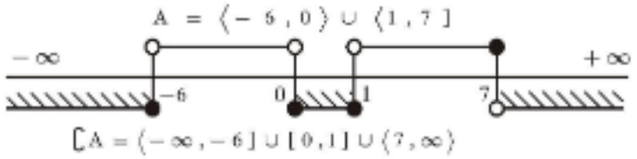
$\complement B = \langle -\infty, 4\rangle \cup [12, \infty\rangle$

6.5 EJEMPLO. Si $A = \langle -6, 0\rangle \cup \langle 1, 7]$, $B = \langle -\infty, 2] \cup [5, 9\rangle$

halle : a) $\complement A$; b) $A \cap B$; c) $\complement(A \cup B)$

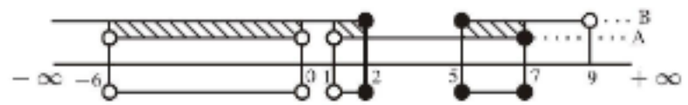
SOLUCIÓN.

a) $\complement A$:



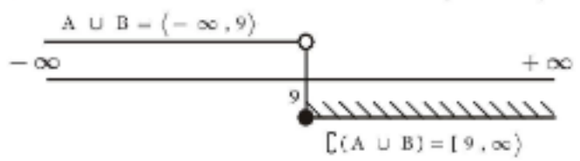
$\complement A = \langle -\infty, -6] \cup [0, 1] \cup \langle 7, \infty\rangle$

b) $A \cap B = (\langle -6, 0\rangle \cup \langle 1, 7]) \cap (\langle -\infty, 2] \cup [5, 9\rangle)$



$A \cap B = \langle -6, 0\rangle \cup \langle 1, 2] \cup [5, 7]$ (elementos comunes)

c) De la figura anterior (b), obtenemos $A \cup B = \langle -\infty, 9\rangle$



$\complement(A \cup B) = [9, \infty\rangle$

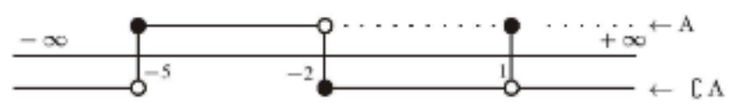
Por lo tanto, $\complement(A \cup B) = \complement\langle -\infty, 9\rangle = [9, \infty\rangle$.

6.6 EJEMPLO. Dados $A = [-5, -2\rangle \cup \{1\}$, $B = \langle -\infty, -3] \cup \langle 0, 4]$, halle i) $A - B$, ii) $B - A$

SOLUCIÓN. Hallaremos previamente $\complement A$ y $\complement B$.

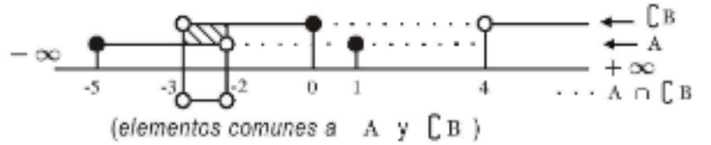
a) $\complement A$: siendo $A = [-5, -2\rangle \cup \{1\}$,

$\complement A = \complement([-5, -2\rangle \cup \{1\}) = \langle -\infty, -5\rangle \cup [-2, 1\rangle \cup \langle 1, \infty\rangle$



b) $\complement B = \complement(\langle -8, -3] \cup \{0, 4]) = \langle -3, 0] \cup \langle 4, \infty\rangle$

i) Cálculo de $A - B$: emplearemos la relación $A - B = A \cap \complement B$

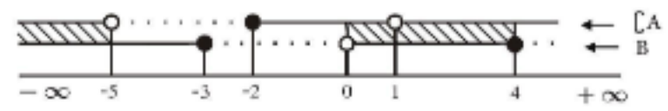


(elementos comunes a A y $\complement B$)

$\therefore\ A - B = A \cap \complement B = \langle -3, -2\rangle$

ii) Cálculo de $B - A$: emplearemos la relación $B - A = B \cap \complement A$

donde $B = \langle -\infty, -3] \cup \langle 0, 4]$, $A = [-5, -2\rangle \cup \{1\}$



$\therefore\ B - A = B \cap \complement A = \langle -\infty, -5\rangle \cup \langle 0, 1\rangle \cup \langle 1, 4]$

6.7 EJEMPLO. Dados los conjuntos $A = \langle -\infty, -7] \cup [0, 2\rangle$

$B = [-16, -10\rangle \cup \langle 1, 2]$

encuentre la DIFERENCIA SIMÉTRICA $A \Delta B$.

SOLUCIÓN. **PRIMER MÉTODO .-** $A \Delta B = (A - B) \cup (B - A)$

$\complement A = \langle -7, 0\rangle \cup [2, \infty\rangle$, $\complement B = \langle -\infty, -16\rangle \cup [-10, 1] \cup \langle 2, \infty\rangle$

$A - B = A \cap \complement B = \langle -\infty, -16\rangle \cup [-10, -7] \cup [0, 1]$

$B - A = B \cap \complement A = [2, 2] = \{2\}$. Por lo tanto,

$A \Delta B = (A - B) \cup (B - A)$

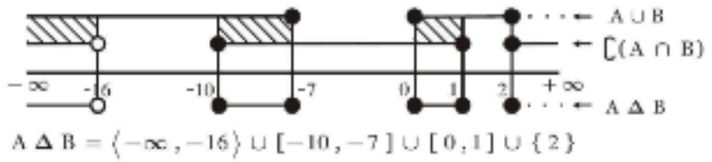
$= \langle -\infty, -16\rangle \cup [-10, -7] \cup [0, 1] \cup \{2\}$

SEGUNDO MÉTODO .- $A \Delta B = (A \cup B) - (A \cap B)$,

$A \cup B = \langle -\infty, -7] \cup [0, 2]$, $A \cap B = [-16, -10\rangle \cup \langle 1, 2\rangle$

$\complement(A \cap B) = \langle -\infty, -16\rangle \cup [-10, 1] \cup [2, \infty\rangle$

como $A \Delta B = (A \cup B) - (A \cap B) = (A \cup B) \cap \complement(A \cap B)$, entonces, intersectando (gráficamente) :



$A \Delta B = \langle -\infty, -16\rangle \cup [-10, -7] \cup [0, 1] \cup \{2\}$

SERIE DE EJERCICIOS

1. Simplifique los siguientes conjuntos
   a) $(\langle -2, 3] \cup \langle 0, 4\rangle) - [2, 6]$
   b) $\langle -2, 3] \cup (\langle 0, 4\rangle - [2, 6])$
   c) $\langle 0, 4\rangle \cup (\langle -2, -3] - [2, 6])$
   d) $(\langle -2, 3] \cap \complement[2, 6]) \cup (\langle 0, 4\rangle \cap [\langle -\infty, 2\rangle \cup \langle 6, \infty\rangle])$

2. Simplifique y exprese en términos de uniones de intervalos:
   a) $[2, 7\rangle \Delta \langle 0, 1\rangle$
   b) $\langle 1, 4\rangle \Delta (\langle 2, 6\rangle \cup \langle 0, 1])$
   c) $[2, 9] \cap (\complement(\langle -\infty, -3] \cup [3, 6]) - \langle 2, 8])$
   d) $(\langle -\infty, 5\rangle \cup \langle 6, 12\rangle) \Delta \{1, 7\}$.

CLAVE DE RESPUESTAS

1. a) $\langle -2, 2\rangle$, b) $\langle -2, 3]$, c) $\langle -2, 4\rangle$, d) $\langle -2, 2\rangle$
2. a) $\langle 0, 1\rangle \cup [2, 7\rangle$, b) $\langle 0, 2] \cup [4, 6\rangle$, c) $\{2\} \cup \langle 8, 9\rangle$
   d) $\langle -\infty, 1\rangle \cup \langle 1, 5\rangle \cup \langle 6, 7\rangle \cup \langle 7, 12\rangle$.

7. LEYES DEL ÁLGEBRA DE CONJUNTOS

Presentamos a continuación la lista de las llamadas LEYES DEL ÁLGEBRA DE CONJUNTOS en la que notamos una perfecta analogía con las Leyes del Álgebra de las Proposiciones Lógicas. Aquí, U es el conjunto Universal.

1a. $A \cup A = A$
2a. $A \cup B = B \cup A$ . . *Ley Conmutativa*
3a. $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ . . *Ley Asociativa*
4a. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ . . *Ley Distributiva*

5a. $A \cup \varnothing = A$
6a. $A \cup U = U$
7a. $A \cup A' = U$
8a. $(A')' = A$
9a. $(A \cup B)' = A' \cap B'$
9b. $(A \cap B)' = A' \cup B'$

} ***Leyes de DE MORGAN***

1b. $A \cap A = A$
2b. $A \cap B = B \cap A$ . . *Ley Conmutativa*
3b. $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ . . *Ley Asociativa*
4b. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ . . *Ley Distributiva*
5b. $A \cap \varnothing = \varnothing$
6b. $A \cap U = A$
7b. $A \cap A' = \varnothing$
8b. $U' = \varnothing$; $\varnothing' = U$

A continuación demostraremos las Leyes 4a. y 9a. :

7.1 PROBLEMA. Por Doble Inclusión, demuestre que:

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

SOLUCIÓN.

a) $A \cup (B \cap C) \subset (A \cup B) \cap (A \cup C)$:

$\forall x \in A \cup (B \cap C)$,
$x \in A \vee x \in (B \cap C) \Rightarrow x \in A \vee (x \in B \wedge x \in C)$
$\Rightarrow (x \in A \vee x \in B) \wedge (x \in A \vee x \in C)$
[pues $p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$] (∗)
$\Rightarrow x \in (A \cup B) \wedge x \in (A \cup C)$
$\Rightarrow x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

b) $(A \cup B) \cap (A \cup C) \subset A \cup (B \cap C)$:

$\forall x \in (A \cup B) \cap (A \cup C) \Rightarrow x \in (A \cup B) \wedge x \in (A \cup C)$
$\Rightarrow (x \in A \vee x \in B) \wedge (x \in A \vee x \in C)$, y por (∗):
$\Rightarrow (x \in A) \vee (x \in B \wedge x \in C)$
$\Rightarrow (x \in A) \vee (x \in B \cap C) \Rightarrow x \in A \cup (B \cap C)$.

7.2 PROBLEMA. Demuestre la LEY de DE MORGAN (9a.) :

$$(A \cup B)' = A' \cap B'$$

SOLUCIÓN. Por Doble Inclusión:

a) $\underline{(A \cup B)' \subset A' \cap B'}$:

$\forall\, x \in (A \cup B)'\ ,\quad x \in (A \cup B)' \ \Rightarrow\ x \notin A \cup B$

$\Rightarrow\ \sim(x \in A \cup B) \ \Rightarrow\ \sim(x \in A \ \vee\ x \in B)$

$\Rightarrow\ \sim(x \in A) \ \wedge\ \sim(x \in B)$

[pues $\sim(p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q$] (**)

$\Rightarrow\ x \notin A \ \wedge\ x \notin B \ \Rightarrow\ x \in A' \ \wedge\ x \in B'$

$\Rightarrow\ x \in A' \cap B'$

b) $\underline{A' \cap B' \subset (A \cup B)'}$:

$\forall\, x \in A' \cap B'\ ,\ x \in A' \cap B' \ \Rightarrow\ x \in A' \wedge x \in B'$

$\Rightarrow\ x \notin A \wedge x \notin B \ \Rightarrow\ [\sim(x \in A)] \wedge [\sim(x \in B)]$

$\Rightarrow\ \sim(x \in A \vee x \in B)$ [por (**) de (a)]

$\Rightarrow\ x \notin A \cup B \ \Rightarrow\ x \in (A \cup B)'$.

7.3 PROBLEMA. Utilizando las Leyes del Álgebra de Conjuntos, y la relación $M - N = M \cap N'$, demuestre que:

$(A - B) \cup (B - A) = (A \cup B) - (A \cap B)$

SOLUCIÓN.

$(A - B) \cup (B - A) = (A \cap B') \cup (B \cap A') =$

$= [(A \cap B') \cup B] \cap [(A \cap B') \cup A']$

$= (A \cup B) \cap (B' \cup B) \cap (A \cup A') \cap (B' \cup A')$

$= (A \cup B) \cap U \cap U \cap (B' \cup A') = (A \cup B) \cap (A' \cup B')$

$= (A \cup B) \cap (A \cap B)'$ [por la Ley de De Morgan]

$= (A \cup B) - (A \cap B)$

7.4 PROBLEMA Demuestre que: a) $A \subset A \cup B$

b) $A \cap B \subset A$, c) $A \cup (B - A) = A \cup B$

SOLUCIÓN.

a) $\forall\, x \in A\ ,\ x \in A \ \Rightarrow\ x \in A \vee x \in B$

[pues $p \Rightarrow p \vee q$ es una Tautología]

$\Rightarrow\ x \in A \cup B$

Por lo tanto, $A \subset A \cup B$

b) $\forall\, x \in A \cap B\ ,\ x \in A \cap B \ \Rightarrow\ x \in A \wedge x \in B \ \Rightarrow\ x \in A$

pues $(p \wedge q) \Rightarrow p$ es Tautología. Por lo tanto: $A \cap B \subset A$.

c) Ejercicio.

7.5 PROBLEMA Demuestre que: a) $A \subset B \ \Leftrightarrow\ A \cup B = B$.

b) $A \subset B \ \Leftrightarrow\ A \cap B = A$

SOLUCIÓN. Puesto que: $p \leftrightarrow q \ \equiv\ (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$,

a) ($\Rightarrow$) a1) $A \cup B \subset B$: En efecto,

$\forall\, x \in A \cup B\ ,\ x \in A \cup B \ \Rightarrow\ x \in A \ \vee\ x \in B$

(y por la hipótesis $A \subset B$:) $\Rightarrow\ x \in B \ \vee\ x \in B$

(y como $p \vee p \equiv p$) $\Rightarrow\ x \in B$

a2) $B \subset A \cup B$: Esto es cierto por (a) del Probl. 7.4.

Por lo tanto, $A \cup B = B$

($\Leftarrow$) $\forall\, x \in A\ ,\ x \in A \ \Rightarrow\ x \in A \ \vee\ x \in B$ [pues $p \Rightarrow p \vee q$]

$\Rightarrow\ x \in A \cup B = B$ [hipótesis: $A \cup B = B$]

$\Rightarrow\ x \in B$. Luego, $A \subset B$.

b) ($\Rightarrow$) b1) $A \cap B \subset A$ [por (b) del Problema 7.4]

b2) $A \subset A \cap B$: $\forall\, x \in A$,

$x \in A \ \Rightarrow\ x \in A \ \wedge\ x \in A$ [pues $p \equiv p \wedge p$]

$\Rightarrow\ x \in A \ \wedge\ x \in B$ [pues $A \subset B$]

$\Rightarrow\ x \in A \cap B$

De (b1) y (b2) : $A \cap B = A$

($\Leftarrow$) $\forall\, x \in A,\ x \in A \ \Leftrightarrow\ x \in A \ \wedge\ x \in B$ (por hipót: $A \cap B = A$)

$\Rightarrow\ x \in B$ [puesto que $p \wedge q \Rightarrow q$].

Por lo tanto, $A \subset B$.

7.6 PROBLEMA. Demuestre que, ***para todo conjunto*** C :

$(A - B) \ \subset\ (A - C) \cup (C - B)$

SOLUCIÓN. Tomando el resultado de 7.4 (b): $M \cap N \subset M$,

$A - B = A \cap B' = (A \cap B') \cap (C' \cup C)$

$= [A \cap B' \cap C'] \cup [A \cap B' \cap C]$

$\subset (A \cap C') \cup (C \cap B') \ =\ (A - C) \cup (C - B)$

7.7 PROBLEMA. Demuestre con las LEYES DEL ÁLGEBRA DE CONJUNTOS , y las propiedades ya encontradas que:

$(A \cup B \cup C) - (A \cap B \cap C) \ =\ (A \,\Delta\, B) \cup (B \,\Delta\, C)$

SOLUCIÓN. Se prueba que: $(A \cup B \cup C) - (A \cap B \cap C) =$

$= [(A - C) \cup (A - B) \cup (B - A)] \cup [(C - A) \cup (B - C) \cup (C - B)]$

y empleando dos veces los resultados de los PROBLEMAS 7.6 Y 7.5, en ese orden:

$= [(A - B) \cup (B - A)] \cup [(B - C) \cup (C - B)] = (A \Delta B) \cup (B \Delta C)$.

7.8 PROBLEMA. Demuestre que:

a) $A \cup (A \cap B) = A$
b) $A \cap (A \cup B) = A$ } ***LEYES DE ABSORCIÓN***

SOLUCIÓN.

a) $x \in A \cup (A \cap B) \Leftrightarrow x \in A \vee (x \in A \wedge x \in B)$
$\Leftrightarrow x \in A$. [pues $p \vee (p \wedge q) \equiv p$]

b) $x \in A \cap (A \cup B) \Leftrightarrow x \in A \wedge (x \in A \vee x \in B)$
$\Leftrightarrow x \in A$. [pues $p \wedge (p \vee q) \equiv p$]

7.9 PROBLEMA. Demuestre que: $A' \cap B = A \cap B \Rightarrow B = \varnothing$

SOLUCIÓN. $(A' \cap B) \cap A = (A \cap B) \cap A \Rightarrow \varnothing = A \cap B = A' \cap B$ por hipótesis. Luego, $B = (A \cup A') \cap B = (A \cap B) \cup (A' \cap B) = \varnothing \cup \varnothing = \varnothing$.

7.10 PROBLEMA. Demuestre que:

a) $(A - B) - C = A - (B \cup C)$
b) $(A \cup B) - C = (A - C) \cup (B - C)$
c) $A - (B \cap C) = (A - B) \cap (A - C)$

SOLUCIÓN.

a) $(A - B) - C = (A \cap B') \cap C' = A \cap (B' \cap C')$
$= A \cap (B \cup C)' = A - (B \cup C)$

b) Ejercicio. c) Ejercicio.

7.11 EJERCICIO. Demuestre que:

$$A \cap B = \varnothing \quad \Leftrightarrow \quad A \subset B'$$

SOLUCIÓN.

$(\Rightarrow)$ $A = A \cap (B \cup B') = (A \cap B) \cup (A \cap B')$
$= \varnothing \cup (A \cap B') = A \cap B' \subset B'$

Por lo tanto, $A \subset B'$.

$(\Leftarrow)$ $A \subset B' \Rightarrow A \cap B \subset B' \cap B = \varnothing$
$\Rightarrow \varnothing \subset (A \cap B) \subset \varnothing \Rightarrow A \cap B = \varnothing$

7.12 NOTA. Análogamente, se demuestra que: $A \subset B \Leftrightarrow A \cap B' = \varnothing$

7.13 EJERCICIO. Demuestre que:

a) $A \cup B = \varnothing \Rightarrow A = \varnothing \wedge B = \varnothing$
b) $A \cup B = C \Rightarrow A \subset C \wedge B \subset C$

SOLUCIÓN.

a) $A \cup B = \varnothing \Rightarrow \begin{cases} \varnothing \subset A \subset A \cup B = \varnothing \Rightarrow A = \varnothing \\ \wedge \qquad\qquad\qquad\qquad \wedge \\ \varnothing \subset B \subset A \cup B = \varnothing \Rightarrow B = \varnothing \end{cases}$

$\Rightarrow \quad A = \varnothing \wedge B = \varnothing$

b) $A \cup B = C \Rightarrow \begin{cases} A \subset A \cup B = C \Rightarrow A \subset C \\ \wedge \qquad\qquad\qquad\qquad \wedge \\ B \subset A \cup B = C \Rightarrow B \subset C \end{cases}$

7.14 EJERCICIO. Demuestre que: a) $A \Delta B' = B \Rightarrow B \subset A$
b) $A \Delta B = \varnothing \Leftrightarrow A = B$

SOLUCIÓN.

a) $A \Delta B' = (A - B') \cup (B' - A) = (A \subset B) \cup (B' \subset A')$. Luego,
$A \Delta B' = B \Rightarrow B = (A \cap B) \cup (B' \cap A')$; además,
$B = B \cap B = [(A \cap B) \cup (B' \cap A')] \cap B$
$= (A \cap B \cap B) \cup (A' \cap B' \cap B) = (A \cap B) \cup \varnothing$
$= A \cap B$. Y como $A \cap B \subset A$, entonces
$B = A \cap B \subset A \Rightarrow B \subset A$.

b) $A \Delta B = \varnothing \Leftrightarrow (A - B) \cup (B - A) = \varnothing$
$\Leftrightarrow A - B = \varnothing \wedge B - A = \varnothing$ [de 7.13 (a)]
$\Leftrightarrow A \cap B' = \varnothing \wedge B \cap A' = \varnothing$
$\Leftrightarrow A \subset B \wedge B \subset A$, por el Ejercicio 7.11
$\Leftrightarrow A = B$

7.15 PROBLEMA. Dados dos subconjuntos A y B de un Universo U, ¿cuál de los siguientes enunciados es verdadero? :

a) $B' - (A - B) \supset A \cup B \Rightarrow A \neq \varnothing \vee B \neq \varnothing$
b) $(A \Delta B)' = A' \Delta B' \Rightarrow A = \varnothing \wedge B = U$

SOLUCIÓN.

a) Simplificando: $B' - (A - B) = (B \cup A)' \supset A \cup B \Leftrightarrow$
$(A \cup B) \cap (A \cup B) = \varnothing \Leftrightarrow A \cup B = \varnothing$
$\Rightarrow A = \varnothing \cap B = \varnothing$. Por lo tanto, la proposición (a) es FALSA.

b) Simplificando: $A' \Delta B' = (A' - B') \cup (B' - A')$
$= (A' \cap B) \cup (B' \cap A) = (A - B) \cup (B - A)$
$= A \Delta B$
Luego, $A \Delta B = A' \Delta B' = (A \Delta B)'$ [por hipótesis] ; sea $M = A \Delta B$,

entonces $M = M' \Rightarrow M = M \cup M = M' \cup M = U$

$\Rightarrow M = M' = U' = \varnothing \Rightarrow U = \varnothing \Rightarrow A = \varnothing \cap B = \varnothing$

Por lo tanto, la proposición (b) es VERDADERA.

SERIE DE EJERCICIOS

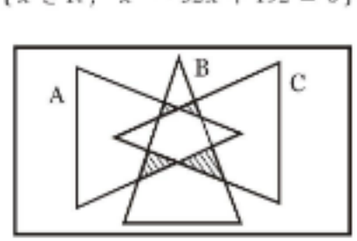
1. La proposición $x \notin A \cap B'$, ¿a cuál es equivalente? :
   a) $x \notin A \wedge x \notin B$, c) $x \in B - A$,
   b) $x \in A \vee x \notin B$, d) $x \in B \vee x \notin A$

2. $\{[(A \cup B') \cap (A \cap B)] \cup (A \cap B')\} \cup (C - A)$ es igual a:
   a) $A \cap B$ b) $A \cup B$ c) $A \cup C$ d) $A \cap C$

3. ¿A cuál es equivalente: $x \notin B \cup (A \cap C)$? :
   a) $x \notin B \wedge (x \notin A \wedge x \notin C)$
   b) $x \notin (B \cup A) \vee x \notin (B \cup C)$
   c) $(x \notin B \wedge x \in A) \vee (x \notin B \wedge x \in C)$

4. Dados: $A = \{x \in \mathbb{N} / \ x = (k^2 - 1)/2 \ , \ k \in \mathbb{N}\}$;
   $B = \{x \in \mathbb{N} / \ x^2 = 8x\}$; $C = \{x \in \mathbb{N} / \ x^2 - 32x + 192 = 0\}$
   halle $(B - A) \cap C$.

5. La región sombreada corresponde a:
   a) $(A \cap B) \cup (B \cap C)$
   b) $(A \cup C) - (A \cap B \cap C)$
   c) $[(A \cup C) \cap B] - (A \cap B \cap C)$
   d) $(A \cap C) \cup [(A \cap B) - (B \cap C)]$



6. Si $A \subset B$ y $A \cap C = \varnothing$, simplifique la expresión
   $[A \cup (B - C)] \cap [B \cup (C - A)]$.

7. De las siguientes afirmaciones:
   a) $x \notin B \cap (A - C)$ b) $x \notin B \vee x \notin (A - C)$
   c) $x \in B' \vee x \in A' \vee x \in C$ d) $x \in (A \cap B') \wedge x \in C$
   ¿Cuáles son equivalentes a: $x \in \complement[B \cap (A - C)]$?

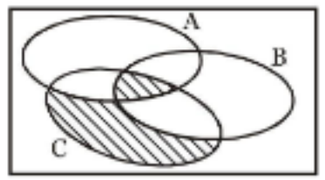
8. La proposición $x \notin \complement_D(A \cap B)$, ¿a cuál es equivalente? :
   a) $x \notin (D - A) \wedge x \notin (D - B)$
   b) $x \notin (D - A) \vee x \notin (D - B)$
   c) $x \in D \wedge (x \notin A \vee x \notin B)$

9. Si A , B y C son conjuntos, entonces: a cuál(es) corresponde la proposición
   $x \notin (A \cap B') \cup C'$ en forma equivalente?
   a) $(x \notin A \vee x \in B) \wedge x \in C$

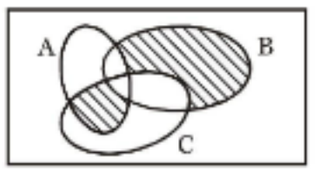
   b) $x \in (C - A) \vee x \in (B \cap C)$
   c) $x \in (A' \cup B) - C'$, ¿cuál es el correspondiente?.

10. De las siguientes proposiciones sobre conjuntos, ¿cuáles son verdaderas? :
    a) $\forall A , \exists B \text{ y } C / \ B \cap C = \varnothing \wedge B \cup C = A$
    b) $\exists C / \ \forall A , \ A \cap C = C$
    c) $\forall A , \forall B , \ A \cup (B \cap A) = A$

11. La parte sombreada del diagrama, ¿a cuál de los siguientes conjuntos le corresponde? :
    a) $C - [(A - B) \cap (B - A)]$
    b) $C - [(A - B) \cup (B - A)]$
    c) $[C \cap (A - B)'] \cap (B - A)$
    d) $[C \cap (B - A)'] \cap (A - B)$

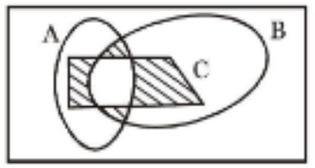


12. ¿A cuál corresponde la región sombreada?:
    a) $[B - (A \cap C)] \cup [(A \cap C) - B]$
    b) $[(B - A) \cap (B - C)] \cup [(A \cap C) - B]$
    c) $[B' \cap (A \cap C)] \cup [(B - A) \cap (B - C)]$

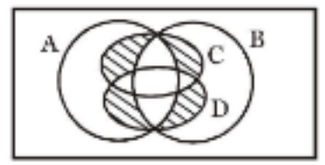


13. Si M_n es el conjunto de los números naturales múltiplos de n, halle
    a) $M_2 \cap M_3$; b) $M_7 \cap M_8$
    c) $M_2 \cap M_3 \cap M_6$; d) $M_m \cap M_n$

14. ¿Cuáles corresponden a la región sombreada? :
    a) $(C - A) \cup (C - B) \cup [(A \cap B) - C]$
    b) $[C - (A \cap B)] \cup [(A \cap B) - C]$
    c) $[(B - A) \cup (A - B)] \cap C$



15. ¿Cuáles corresponden a la región sombreada? :
    a) $[(C - D) - (A \cap B)] \cup [(D - C) - (A \cap B)]$
    b) $[(C \cup D) - (C \cap D)] - (A \cap B)$
    c) $[C \cup D] - [(A \cap B) \cup (C \cap D)]$



16. ¿Cuál corresponde a la región sombreada? :

entonces $M = M' \Rightarrow M = M \cup M = M' \cup M = U$

$\Rightarrow M = M' = U' = \varnothing \Rightarrow U = \varnothing \Rightarrow A = \varnothing \cap B = \varnothing$

Por lo tanto, la proposición (b) es VERDADERA.

SERIE DE EJERCICIOS

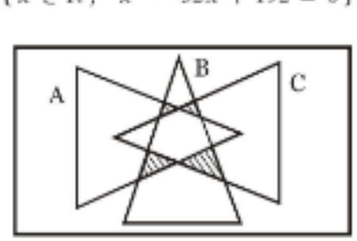
1. La proposición $x \notin A \cap B'$, ¿a cuál es equivalente? :
   a) $x \notin A \wedge x \notin B$, c) $x \in B - A$,
   b) $x \in A \vee x \notin B$, d) $x \in B \vee x \notin A$

2. $\{[(A \cup B') \cap (A \cap B)] \cup (A \cap B')\} \cup (C - A)$ es igual a:
   a) $A \cap B$ b) $A \cup B$ c) $A \cup C$ d) $A \cap C$

3. ¿A cuál es equivalente: $x \notin B \cup (A \cap C)$? :
   a) $x \notin B \wedge (x \notin A \wedge x \notin C)$
   b) $x \notin (B \cup A) \vee x \notin (B \cup C)$
   c) $(x \notin B \wedge x \in A) \vee (x \notin B \wedge x \in C)$

4. Dados: $A = \{x \in \mathbb{N} / \ x = (k^2 - 1)/2 \ , \ k \in \mathbb{N}\}$;
   $B = \{x \in \mathbb{N} / \ x^2 = 8x\}$; $C = \{x \in \mathbb{N} / \ x^2 - 32x + 192 = 0\}$
   halle $(B - A) \cap C$.

5. La región sombreada corresponde a:
   a) $(A \cap B) \cup (B \cap C)$
   b) $(A \cup C) - (A \cap B \cap C)$
   c) $[(A \cup C) \cap B] - (A \cap B \cap C)$
   d) $(A \cap C) \cup [(A \cap B) - (B \cap C)]$



6. Si $A \subset B$ y $A \cap C = \varnothing$, simplifique la expresión
   $[A \cup (B - C)] \cap [B \cup (C - A)]$.

7. De las siguientes afirmaciones:
   a) $x \notin B \cap (A - C)$ b) $x \notin B \vee x \notin (A - C)$
   c) $x \in B' \vee x \in A' \vee x \in C$ d) $x \in (A \cap B') \wedge x \in C$
   ¿Cuáles son equivalentes a: $x \in \complement[B \cap (A - C)]$?

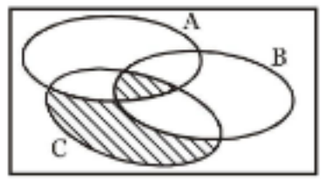
8. La proposición $x \notin \complement_D(A \cap B)$, ¿a cuál es equivalente? :
   a) $x \notin (D - A) \wedge x \notin (D - B)$
   b) $x \notin (D - A) \vee x \notin (D - B)$
   c) $x \in D \wedge (x \notin A \vee x \notin B)$

9. Si A , B y C son conjuntos, entonces: a cuál(es) corresponde la proposición
   $x \notin (A \cap B') \cup C'$ en forma equivalente?
   a) $(x \notin A \vee x \in B) \wedge x \in C$

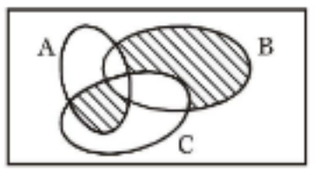
   b) $x \in (C - A) \vee x \in (B \cap C)$
   c) $x \in (A' \cup B) - C'$, ¿cuál es el correspondiente?.

10. De las siguientes proposiciones sobre conjuntos, ¿cuáles son verdaderas? :
    a) $\forall A , \exists B \text{ y } C / \ B \cap C = \varnothing \wedge B \cup C = A$
    b) $\exists C / \ \forall A , \ A \cap C = C$
    c) $\forall A , \forall B , \ A \cup (B \cap A) = A$

11. La parte sombreada del diagrama, ¿a cuál de los siguientes conjuntos le corresponde? :
    a) $C - [(A - B) \cap (B - A)]$
    b) $C - [(A - B) \cup (B - A)]$
    c) $[C \cap (A - B)'] \cap (B - A)$
    d) $[C \cap (B - A)'] \cap (A - B)$

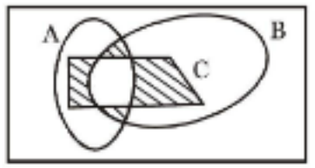


12. ¿A cuál corresponde la región sombreada?:
    a) $[B - (A \cap C)] \cup [(A \cap C) - B]$
    b) $[(B - A) \cap (B - C)] \cup [(A \cap C) - B]$
    c) $[B' \cap (A \cap C)] \cup [(B - A) \cap (B - C)]$

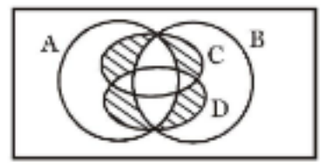


13. Si M_n es el conjunto de los números naturales múltiplos de n, halle
    a) $M_2 \cap M_3$; b) $M_7 \cap M_8$
    c) $M_2 \cap M_3 \cap M_6$; d) $M_m \cap M_n$

14. ¿Cuáles corresponden a la región sombreada? :
    a) $(C - A) \cup (C - B) \cup [(A \cap B) - C]$
    b) $[C - (A \cap B)] \cup [(A \cap B) - C]$
    c) $[(B - A) \cup (A - B)] \cap C$

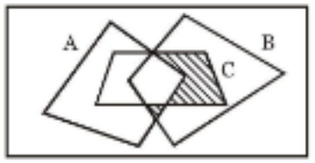


15. ¿Cuáles corresponden a la región sombreada? :
    a) $[(C - D) - (A \cap B)] \cup [(D - C) - (A \cap B)]$
    b) $[(C \cup D) - (C \cap D)] - (A \cap B)$
    c) $[C \cup D] - [(A \cap B) \cup (C \cap D)]$



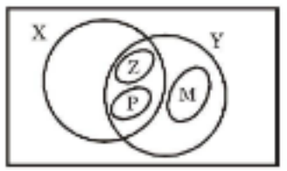
16. ¿Cuál corresponde a la región sombreada? :

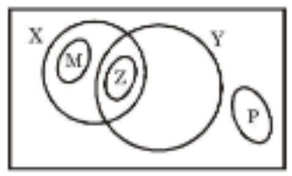
a) $(A - B) \cup [(B - C) - A]$
b) $[C - (A \cap B)] \cup [(B \cap C) - (A \cap B)]$
c) $[(A \cap B) - C] \cup [(B \cap C) - (A \cap B)]$
d) $[(A \cap C) \cup (B \cap C)] - (A \cap B)$

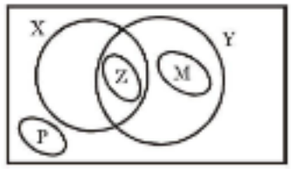


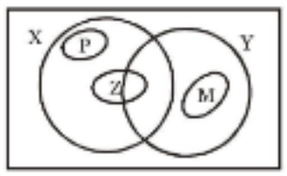
17. ¿Cuál de los siguientes diagramas corresponde a la situación en que los conjuntos M, P, X, Y, Z satisfacen las tres condiciones:

$P \subset X' \cap Y'$, $Z \subset X \cap Y$, $M \cap (Y - X)' = \varnothing$?

a)


b)


c)


d)


18. Halle una fórmula para $A \cap B$ mediante las operaciones de ***unión*** y ***complemento*** solamente.

19. Sea D el conjunto de números enteros de tres cifras, y sean E_0, E_1 y E_2 Subconjuntos de D cuyos elementos son números naturales una por lo menos de cuyas cifras es 0, 1 y 2, respectivamente. Halle $D \cap E_0 \cap E_1 \cap E_2$.

20. Demuestre que: a) $A \subset B \Rightarrow M \cap A \subset M \cap B$, $\forall M$
b) $A \subset B \Rightarrow M \cup A \subset M \cup B$, para todo conjunto M.

21. Sea $U = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$ el conjunto Universal , y sean
$A = \{-1, 0, 1\}$, $B = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$, $C = \{-3, 1, 2\}$.
Determine cada uno de los siguientes conjuntos, indicando sus elementos o escribiendo $\varnothing$ donde corresponda:

a) B' b) A' c) $(A \cap B)'$
d) $A' \cup B'$ e) $B \cap C'$ f) $(B \cap C)'$

22. Demuestre cada una de las LEYES DEL ÁLGEBRA DE CONJUNTOS, utilizando las correspondientes Leyes del Álgebra de Proposiciones Lógicas.

23. Demuestre que:

a) $A \subset B \Leftrightarrow B' \subset A'$. SUG: $p \to q \equiv (\sim q \to \sim p)$
b) $A' \Delta B = A \Rightarrow A \subset B$
c) $(M \subset A) \wedge (M \subset B) \Rightarrow M \subset A \cap B$
d) $A \subset B \Rightarrow A \cup (B - A) = B$
e) $(B - A) \cap A = \varnothing$
f) $A \cap B = \varnothing \Leftrightarrow B \cap A' = B$,
g) $A \subset B \Leftrightarrow A - B = \varnothing$,
h) $A' \cap B \subset (B - A)' \Rightarrow B \subset A$,
i) $A = \complement_X B \Rightarrow A \Delta B = X$,
j) $\varnothing - A = \varnothing$
k) $A \Delta A = \varnothing$
l) $A \Delta \varnothing = A$
m) $A' \Delta B' = A \Delta B$

24. Sean $A = \{m + n, 8, 2m - 2n + 4\}$ un conjunto unitario,
$B = \{x / x = mk, k \in \mathbb{Z}\}$
$C = \{x / x = nk, k \in \mathbb{Z}\}$, halle $(B' \cup C')'$.
SUG: Pruebe que $m = 5$, $n = 3$.

25. Dados $a, b \in \mathbb{Q}$ (racionales); A y B conjuntos tales que $B \neq \varnothing$, $A \cup B$ es unitario, $A = \{a^2 + 2b, b^2 + 1\}$ y $A \cup B = \{a + 4b, b + 1 - 3a\}$; halle $A \cap B$. **SUG**: Pruebe que $a = \pm(b - 1)$.

26. Si $A = \{a \in \mathbb{Z} / a^5 + 4a = 5a^3\}$, $B = \{a \in A / \exists b \in \mathbb{Z} : a = b^2\}$, halle el Complemento de B con respecto a A (es decir, $A - B$).
SUG: Note que todo elemento de B es aquel elemento de A que es el cuadrado de algún número entero, y pruebe que $B = \{0, 1\}$.

27. Demuestre que: $(A \Delta B) \Delta C = A \Delta (B \Delta C)$ . . . (P. ASOCIATIVA)
28. Demuestre que: $A \cap (B \Delta C) = (A \cap B) \Delta (A \cap C)$ . . . (P. DISTRIBUTIVA)
29. Se define la operación $*$ entre conjuntos como sigue: $A * B = A' \cap B'$ ¿cuáles son verdaderas? :
a) $A * A = A'$; b) $(A * A) * (B * B) = A \cap B$
c) $(A * B) * (A * B) = A \cup B$; d) $A * (B * C) = (A * B) * C$.

30. Demuestre que: a) $\{a\} = \{b, c\} \Leftrightarrow a = b = c$
b) $\{\{a\}, \{a, b\}\} = \{\{c\}, \{c, d\}\} \Leftrightarrow (a = c) \wedge (b = d)$
SUG: b) Considerar los dos casos: i) $a = b$, ii) $a \neq b$.

CLAVE DE RESPUESTAS

1. Sólo (d) , 2. Sólo (c) , 3. Sólo (b) , 4. 8 , 5. Sólo (c)
6. $B - C$, 7. a , b y c , 8. Sólo (a) , 9. Todas.
10. Todas: a) V para $B = \varnothing$, $C = A$; b) V para $C = \varnothing$, c) V ;

11. (b) , 12. (b) y (c) , 13. a) M_6 , b) M_{56} , c) M_6 ,
(d) M_r donde $r = \text{M.C.M.}\{m, n\}$; 14. (a) y (b) ; 15. Todas;
16. Sólo (c) , 17. (c) , 18. $(A' \cup B')'$;
19. $\{102, 120, 201, 210\}$, 21. a) $\{-3, 3\}$, b) $\{-3, -2, 2, 3\}$,
21. c) $\{-3, -2, 2, 3\}$, d) $\{-3, -2, 2, 3\}$, e) $\{-2, -1, 0\}$,
f) $\{-3, -2, -1, 0, 3\}$, 24. $\{x = 15k \,/\, k \in \mathbb{Z}\}$;
25. $A \cap B = \{10\}$ donde se descarta la solución $a = (b - 1)$ puesto que
$A = \{74 / 49\}$, $A \cup B = \{18 / 7\} \neq A$.
26. $\{-1, -2, 2\}$, 29. (a) , (b) y (c) .

8. CONJUNTO POTENCIA $\mathcal{P}(A)$, 2^A

Es el conjunto formado por ***todos los subconjuntos de*** A , ***incluyendo al conjunto vacío*** $\varnothing$:

$$\mathcal{P}(A) = \{ X \,/\, X \subset A \}$$

Un elemento de $\mathcal{P}(A)$ es un subconjunto de A : es decir,

$$X \in \mathcal{P}(A) \quad \Leftrightarrow \quad X \subset A$$

8.1 EJEMPLO. Si $A = \{1, 2\}$, entonces: $\{1\} \subset A$, $\{2\} \subset A$, $A \subset A$, y $\varnothing \subset A$; es decir, $\mathcal{P}(A) = \{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$.

8.2 NOTA. 1) Al conjunto $\mathcal{P}(A)$ también se le llama EL CONJUNTO DE PARTES DE A.

2) Se prueba que si un conjunto A es finito, y tiene n elementos, entonces $\mathcal{P}(A)$ tiene 2^n elementos, razón por la cual también se le denota por 2^A.

3) El conjunto vacío $\varnothing$ ***siempre es un elemento del CONJUNTO POTENCIA*** $\mathcal{P}(A)$.

8.3 PROBLEMA. Si $A = \{\varnothing, \{\varnothing\}\}$, halle $\mathcal{P}(A)$

SOLUCIÓN. $\mathcal{P}(A) = \{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\{\varnothing\}\}, A\}$.

8.4 PROBLEMA. Demuestre que: $A \subset B \Leftrightarrow \mathcal{P}(A) \subset \mathcal{P}(B)$.

SOLUCIÓN. La demostración consta de dos partes:

a) $A \subset B \Rightarrow \mathcal{P}(A) \subset \mathcal{P}(B)$:

Sea $X \in \mathcal{P}(A) \Rightarrow X \subset A$, donde $A \subset B$ (hipótesis)
$\Rightarrow X \subset B$, (Prop. Transitiva de la inclusión).

$\Rightarrow X \in \mathcal{P}(B)$ (definición de $\mathcal{P}(B)$)
y por lo tanto $\mathcal{P}(A) \subset \mathcal{P}(B)$.

b) $\mathcal{P}(A) \subset \mathcal{P}(B) \Rightarrow A \subset B$:

Sea $x \in A \Rightarrow \{x\} \subset A \Rightarrow \{x\} \in \mathcal{P}(A)$
$\Rightarrow \{x\} \in \mathcal{P}(B)$, pues $\mathcal{P}(A) \subset \mathcal{P}(B)$ por hipótesis.
$\Rightarrow \{x\} \subset B \Rightarrow x \in B$ y por lo tanto $A \subset B$.

8.5 PROBLEMA. Demuestre que: $\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) \subset \mathcal{P}(A \cup B)$

SOLUCIÓN. Sea $X \in \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) \Rightarrow X \in \mathcal{P}(A) \vee X \in \mathcal{P}(B)$
$\Rightarrow X \subset A \vee X \subset B \Rightarrow X \subset (A \cup B) \Rightarrow X \in \mathcal{P}(A \cup B)$

8.6 PROBLEMA. Sea $\{a, b, c\} \subset \mathbb{Z} - \{-1, 1\}$. Si se define el conjunto
$M = \{ (a + b + c) \,/\, \{a^2 + b^2 - 5, -3, -4a\} = \{b - 2c - 8, a^2 + 4\} \}$,
halle el conjunto : $\mathcal{P}[\, M \cup \{-x \,/\, x \in M \wedge -x^2 \in M\}\,]$

SOLUCIÓN. Del dato: a , b , c son enteros, distintos de 1 y -1 .
En M se ve que -3 no puede ser $a^2 + 4$, luego: $-3 = b - 2c - 8 \Rightarrow$
$b - 2c = 5$. Así , $\{a^2 + b^2 - 5, -3, -4a\} = \{-3, a^2 + 4\}$ $(*)$
Además, $-4a$ no puede ser -3 (pues ello daría: $a = 3/4 \notin \mathbb{Z}$) , entonces
$-4a = a^2 + 4 \Rightarrow (a + 2)^2 = 0 \Rightarrow a = -2$. La igualdad $(*)$ se convierte
en $\{b^2 - 1, -3, 8\} = \{-3, 8\}$ y como el conjunto de la izquierda sólo puede tener dos elementos, entonces: $b^2 - 1 = -3$ o $b^2 - 1 = 8 \Rightarrow$

i) Si $b^2 - 1 = -3$ entonces $b^2 = -2$ (absurdo).

ii) Si $b^2 - 1 = 8$ entonces $b^2 = 9 \Rightarrow b = \pm 3$

Luego, $a = -2$, $b = -3$, $c = -4$, $a + b + c = -9 \Rightarrow M = \{-9\}$ pues M está formado por los elementos de la forma: $a + b + c$.

Como $x = -9 \in M$ y $-x^2 = -81 \notin M$, entonces:

$$\{-x \,/\, x \in M \wedge -x^2 \in M\} = \varnothing$$
$$\Rightarrow \mathcal{P}[\, M \cup \{-x \,/\, x \in M \wedge -x^2 \in M\}\,] = \mathcal{P}(M)$$
$$= \mathcal{P}(\{-9\}) = \{\varnothing, \{-9\}\}.$$

SERIE DE EJERCICIOS

1. Encuentre $\mathcal{P}(A)$ donde $A = \{\varnothing, a, \{\varnothing\}\}$
2. Demuestre que $\mathcal{P}(A \cap B) = \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$.
3. Dé un ejemplo de dos conjuntos A y B en el que se vea que

$$\mathcal{P}(A \cup B) \not\subseteq \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$$

4. ¿En qué casos se cumple que: $A \subset \mathcal{P}(A)$?
5. Si $A = \varnothing$, halle $\mathcal{P}(\mathcal{P}(A))$.
6. Dados los conjuntos $A = \{ x \in \mathbb{N} / \ x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = 0 \}$,
   $B = \{ x \in \mathbb{N} / \ 2x^2 - 7x + 3 = 0 \}$, $C = \{2, 3\}$.
   Si $D = (A - B) \cup C$, halle el número de elementos de $\mathcal{P}(D)$.
7. Si $A = \{a, \varnothing, \{\varnothing\}\}$ y $B = \{\{\varnothing\}, \{\{\varnothing\}\}\}$, ¿cuáles de las siguientes proposiciones son verdaderas? :
   a) $(A \cup B) - (A \cap B) = \{a, \varnothing, \{\{\varnothing\}\}\}$
   b) El número de elementos de $\mathcal{P}(A)$ es 8 .
   c) $\mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B) = \{\varnothing, \{\{\varnothing\}\}\}$
8. Demuestre que: $B \in \mathcal{P}(A) \ \Rightarrow \ A \,\Delta\, B = A - B$.

CLAVE DE RESPUESTAS

3. $A = \{1\}$, $B = \{2\}$; 4. $A = \varnothing$, *o* $A = \{\varnothing\}$.
5. $\{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\{\varnothing\}\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\}$; 6. 8 ; 7. Las tres.

9. NÚMERO DE ELEMENTOS: n(A)

Dados dos conjuntos finitos y ***disjuntos*** A y B se define el NÚMERO DE ELEMENTOS DE LA UNIÓN $A \cup B$ como

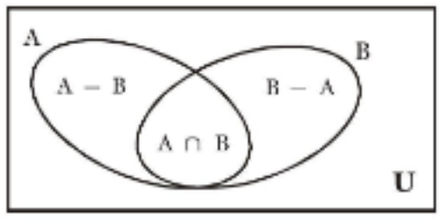
$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) , \text{ donde } A \cap B = \varnothing \qquad (1)$$

La relación siguiente se cumple para cualquier par de conjuntos A y B ***no necesariamente disjuntos***:

$$A = (A - B) \cup (A \cap B),$$

donde $(A - B) \cap (A \cap B) = \varnothing$ implica que

$$n(A) = n(A - B) + n(A \cap B) \qquad (2)$$



En el caso en que A y B son conjuntos finitos arbitrarios (no necesariamente disjuntos) , y puesto que : $A \cup B = B \cup (A - B)$, ya que $B \cap (A - B) = \varnothing$, entonces

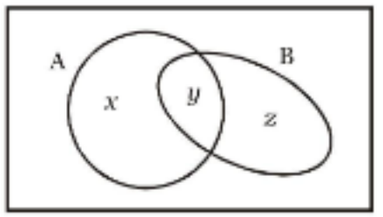
$$n(A \cup B) = n(B) + n(A - B) = n(B) + n(A) - n(A \cap B) , \text{ de } (2),$$

$$\boxed{n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)} \qquad (*)$$

Además, siendo $A \cup B = (A - B) \cup (A \cap B) \cup (B - A)$ una unión de tres conjuntos disjuntos entre sí (dos a dos) se tiene que

$$\boxed{n(A \cup B) = n(A - B) + n(A \cap B) + n(B - A)} \qquad (**)$$

que en la práctica viene a ser la relación más utilizada pues equivale a representar la unión $A \cup B$ en un diagrama en zonas disjuntas como en la figura adyacente:



donde $x = n(A - B)$, $y = n(A \cap B)$, $z = n(B - A)$.

9.1 PROBLEMA . Una encuesta sobre 500 estudiantes inscritos en una o más de las asignaturas de MATEMÁTICAS , FÍSICA Y QUÍMICA durante un semestre, reveló los siguientes números de estudiantes en los cursos indicados: MATEMÁTICAS: 329 , FÍSICA: 186 , QUÍMICA: 295 , MATEMÁTICAS y FÍSICA: 83 , MATEMÁTICAS y QUÍMICA: 217 , FÍSICA y QUÍMICA: 63 .

¿Cuántos alumnos estarán inscritos en

1) Los tres cursos
2) Matemáticas pero no Química
3) Física pero no Matemáticas
4) Química pero no Física
5) Matemáticas o Química, pero no física
6) Matemáticas y Química, pero no Física
7) Matemáticas pero no Física ni Química?

SOLUCIÓN. $M =$ conjunto de alumnos inscritos en Matemáticas : 329
$F =$ conjunto de alumnos inscritos en Física : 186
$Q =$ conjunto de alumnos inscritos en Química : 295

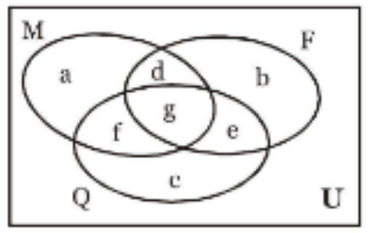
Del diagrama de Venn tenemos que

$$n(M \cup F \cup Q) = 500 = n(M) + n(F) + n(Q) - n(M \cap F) - n(M \cap Q) - n(F \cap Q) + n(M \cap F \cap Q)$$

$$= (329 + 186 + 295) - 83 - 217 - 63 + n(M \cap F \cap Q)$$

$$\Rightarrow \quad n(M \cap F \cap Q) = g = 53$$

Como $n(M) = 329 = a + d + f + g$
$= a + (d + g) + (f + g) - g$
$= a + 83 + 217 - 53$



$\Rightarrow \quad a = 82$

Procediendo en forma similar con la gráfica, obtenemos: $b = 93$, $c = 68$; además, $d + g = 83 \Rightarrow d = 83 - 53 = 30$. Asimismo, $e = 10$, $f = 164$.

Por lo tanto, ya podemos responder las preguntas dadas:

1) n (*los tres cursos*) $= g = 53$
2) n (Mát. *pero no Quím.*) $= a + d = 82 + 30 = 112$
3) n (*Fís. pero no Mát.*) $= b + e = 93 + 10 = 103$
4) n (Quím. *pero no Fís.*) $= c + f = 68 + 164 = 232$
5) n (Mát. o *Quím., pero no Fís.*) $= a + f + c = 314$
6) n (Mát. *y Quím., pero no Física*) $= f = 164$ estudiantes.
7) n (Mát. *pero no Fís. ni Química*) $= a = 82$ estudiantes.

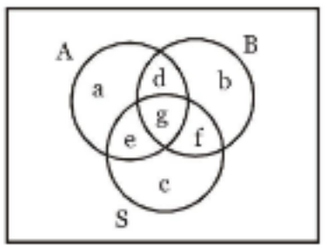
9.2 PROBLEMA. En una encuesta realizada a 150 personas acerca de sus preferencias respecto a las revistas " SELECCIONES " (S), " ACTUALIDAD " (A) y " BYTE " (B), se tuvo el siguiente cuadro: 82 leen SELECCIONES; 54 leen ACTUALIDAD, 30 leen sólo ACTUALIDAD, 50 sólo leen SELECCIONES; el número de personas que leen sólo ACTUALIDAD y BYTE es la mitad de la cantidad de personas que leen sólo SELECCIONES y BYTE ; el número de personas que sólo leen SELECCIONES y ACTUALIDAD es el triple de la cantidad que lee las tres revistas.

Si las personas que no leen ninguna de estas revistas son tantas como las que leen sólo BYTE, calcule el número de personas que:

i) Leen sólo dos revistas, ii) no leen ninguna de las tres revistas
iii) a lo más leen una revista, iv) de las únicas dos revistas que leen, una es BYTE.

SOLUCIÓN. DATOS:

$$150 = a + b + c + d + e + f + g + h$$
$$82 = c + e + f + g \ , \quad 54 = a + d + e + g \ , \quad a = 30 \ ,$$
$c = 50$, $d = f/2$, $e = 3g$, $h = b$



INCÓGNITAS: i) $d + e + f$, ii) h
ii) $a + b + c + h$, iv) $d + f$

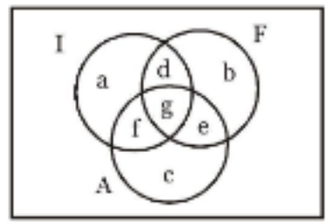
Resolviendo el sistema de ecuaciones de datos
$b = 15$, $d = 8$, $e = 12$, $f = 16$, $g = 4$, $h = 15$

RESPUESTAS: i) 36 , ii) 15 ,
iii) 110 , iv) 24 .

9.3 PROBLEMA. En un grupo de 55 personas que hablan al menos uno de los idiomas: inglés (I), francés (F) o alemán (A), 25 hablan inglés, 32 francés, 33 alemán y 5 los tres idiomas. ¿Cuántas personas del grupo hablan dos de estos idiomas?

SOLUCIÓN. DATOS : $g = 5$,

$$\left.\begin{array}{l} a + d + f = 20 \\ b + d + e = 27 \\ c + e + f = 28 \end{array}\right\} \quad (*)$$



INCÓGNITA: $x = d + e + f + g$

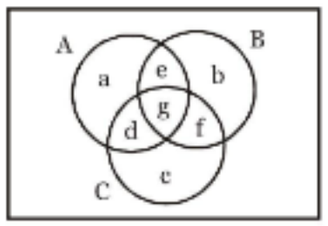
Como $55 = a + b + c + (d + e + f + g) = a + b + c + x$ .. [1]
Sumando las ecuaciones de (*) : $a + b + c + (2d + 2e + 2f) = 75$
$a + b + c + 2x = 85$ .. [2]
Restando [2] − [1] : $x = 30$.

NOTA . Si nos hubiesen pedido calcular el número de personas que hablan solamente dos idiomas, este habría sido 25 . ¿Por qué?

9.4 PROBLEMA . Un club deportivo tiene 48 jugadores de fútbol, 25 de básquet y 30 de béisbol. Si el total de estos jugadores es de 68 y sólo 6 de ellos figuran en los tres deportes, ¿Cuántos figuran exactamente en: i) un deporte, ii) dos deportes?

SOLUCIÓN. A : fútbol , B : básquet , C : béisbol

DATOS :
$a + d + e + g = 48$
$b + e + f + g = 25$
$c + d + f + g = 30$
$a + b + c + d + e + f + g = 68$, $g = 6$.



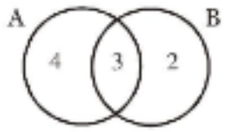
INGOGNITAS: i) $x = a + b + c$
ii) $y = d + e + f$

Sumando las tres primeras ecuaciones:
$x + 2y + 3g = 103 \Rightarrow x + 2y = 85$ .. [3]
De la cuarta ecuación: $x + y = 68 - g \Rightarrow x + y = 62$ .. [4]
De [3] y [4] : i) $x = 39$, ii) $y = 23$.

9.5 PROBLEMA. Si $n[P(A)] = 128$, $n[P(B)] = 32$, $n[P(A \cap B)] = 8$, halle $n[P(A \cup B)]$. [$P(A)$: ***Conjunto Potencia de*** A].

SOLUCIÓN. $n[P(A)] = 128 = 2^7 \Rightarrow n(A) = 7$,
$n[P(B)] = 32 = 2^5 \Rightarrow n(B) = 5$,
$n[P(A \cap B)] = 8 = 2^3 \Rightarrow n(A \cap B) = 3$. De esto,

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$
$$= 7 + 5 - 3 = 9$$
$$\therefore \quad n[P(A \cup B)] = 2^9 = 512 .$$



9.6 EJERCICIO. Sea x el máximo número de elementos de $A \cup B \cup C$ y sea z el máximo número de elementos de $D \cap E \cap F$. Si $n(A) = 9$, $n(B) = 7$, $n(C) = 10$, $n(D) = 4$, $n(E) = 2$ y $n(F) = 9$, halle: $x + z$

RPTA: Los conjuntos A, B y C deben ser disjuntos dos a dos y debe cumplirse que $E \subset D \subset F$. Por lo tanto,

$$x = n(A) + n(B) + n(C) = 26 , \quad z = n(E) = 2 \quad \Rightarrow \quad x + z = 28 .$$

9.7 EJERCICIO. Si A, B y C son conjuntos finitos no disjuntos dos a dos, demuestre que: $n[(A \Delta B) \Delta C] =$

$$n(A) + n(B) + n(C) - 2n(A \cap B) - 2n(A \cap C) - 2n(B \cap C) + 3n(A \cap B \cap C)$$

9.8 EJERCICIO. Sean $A = \{1,2,3,4,5,6\}$, $B = \{0,1,4,6,7,8,9\}$. Si h es el número de subconjuntos no vacíos de A que son disjuntos con B, y si k es el número de subconjuntos no vacíos de B que son disjuntos con A, calcular el valor de $h + k$.

RPTA. Por hipótesis, h resulta ser el número de subconjuntos no vacíos de $A - B$, y k el número de subconjuntos no vacíos de $B - A$. Y como $A - B = \{2,3,5\}$ y $B - A = \{0,7,8,9\}$, entonces

$$h = 2^3 - 1 = 7 , \quad k = 2^4 - 1 = 15 \quad \Rightarrow \quad h + k = 22 .$$

SERIE DE EJERCICIOS

1. Si A, B y C son conjuntos finitos, demostrar que
$$n(A \Delta B) = n(A) + n(B) - 2n(A \cap B)$$
$$n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C).$$

2. En cierto Instituto de Administración se requiere que todo estudiante de último ciclo curse Matemáticas, Contabilidad o Economía. Si de 700 de estos estudiantes, 400 cursan Matemáticas, 300 Contabilidad, 350 Economía, 240 Economía y Matemáticas, 90 Contabilidad y Matemáticas, y 50 Contabilidad y Economía, ¿cuántos cursan las tres materias?

3. Si A es un conjunto de $8n$ elementos, B un conjunto de $5n$ elementos, y tienen $2n - 1$ elementos comunes, hallar la suma de los números de elementos de: $(A \cap B) \cap (A - B)$ y $(A \cup B) \cap (A - B)$.

4. En una encuesta a 150 jóvenes acerca de tres bebidas gaseosas A, B y C resultó que 46 bebían A, 36 bebían B, 28 bebían C, 20 bebían A y B, 18 bebían A y C, 16 bebían B y C y 10 bebían las tres. ¿Cuántos:
a) No beben ninguna de ellas?, b) Beben sólo A?, c) Beben sólo B?,
d) Sólo beben C?, e) No beben A ni B?, f) Beben A o B?.

5. Dados tres conjuntos A, B, C con n, $3n$ y $(n - 1)$ elementos, respect. Si A y B tienen $n/2$ elementos comunes, A y C tienen $n/4$ elementos comunes, y B y C tienen dos; y si existe un único elemento común a los tres conjuntos, determinar: $n([(A \cup B) - (A \cap B)] - C)$.

6. El 65% de la población de una ciudad no ve el canal A de T.V. y el 45% no ve el canal B. Si el 50% ve el canal A o el canal B, pero no ambos ¿cuál es el porcentaje de la población que ve ambos canales?

7. Una agencia de Turismo realiza una encuesta entre 5 000 personas para ver las preferencias en materia de viajes al **CUSCO**, **IQUITOS** y **TRUJILLO**; 2 400 personas desean viajar por lo menos al CUSCO, 3 000 por lo menos a TRUJILLO 2 100 por lo menos a IQUITOS, 1 000 a IQUITOS y TRUJILLO, 800 al CUSCO y a IQUITOS, 1 500 a TRUJILLO y al CUSCO y 500 están dispuestos a realizar las tres excursiones. ¿Cuántas personas:
a) indicaron que no realizarían ninguno de estos tres viajes?
b) no mostraron interés por el viaje a IQUITOS?
c) desean hacer dos excursiones distintas siempre que ninguna sea al CUSCO?
d) están dispuestas a realizar sólo dos viajes distintos?
e) viajarían al CUSCO *si y sólo si* no lo harían a IQUITOS ni a TRUJILLO?

8. El cajero de una Panadería grande presentó un *reporte* con la finalidad de justificar su continuación en el puesto. Le dijo al propietario: " De los 500 clientes que tuvimos el día de ayer, 281 compraron pan francés, 196 compraron pan francés y pan tolete, 87 compraron pan integral y pan tolete, 143 compraron pan francés y pan integral y 36 compraron de estos tres tipos de pan. "

   Lo despidieron. ¿Por qué?

9. Una encuesta de 1 000 personas determinó los siguientes resultados, acerca de sus hábitos de escuchar la radio:
Temprano en la mañana, entre las 5:00 y 7:00 A.M., 620 personas escuchan la radio. En la noche, entre las 7:00 y 9:00 P.M., 640 personas escuchan la radio. Durante el día, entre las 7:00 A.M. y las 7:00 P.M., 450 personas lo hacen. Durante los tres períodos, 210 personas lo hacen. Temprano por la mañana y por la noche solamente, lo hacen 220 personas. Solamente durante el día y temprano en la mañana, escuchan 70 personas. Solamente durante el día y por la noche, escuchan la radio 130 personas.
a) ¿Cuántas personas escuchan la radio solamente temprano en la mañana?
b) ¿Cuántas personas escuchan la radio solamente durante el día?
c) ¿Cuántas personas escuchan la radio solamente en la noche?

3

NÚMEROS REALES

1. EL SISTEMA DE LOS NÚMEROS REALES

El sistema de los Números Reales es un conjunto $\mathbb{R}$ con dos operaciones: suma $(+)$ y multiplicación $(\cdot)$, y una relación de orden '$<$' que se lee "menor que" y que satisfacen el siguiente conjunto de **AXIOMAS DE LOS NÚMEROS REALES**:

A1. $\forall\, a, b \in \mathbb{R}$, $a + b \in \mathbb{R}$ (***Ley de Clausura***)

A2. $\forall\, a, b \in \mathbb{R}$, $a + b = b + a$ (***Ley Conmutativa***)

A3. $\forall\, a, b, c \in \mathbb{R}$, $(a + b) + c = a + (b + c)$ (***Ley Asociativa***)

A4. AXIOMA DE EXISTENCIA Y UNICIDAD DEL ELEMENTO NEUTRO ADITIVO:
Existe un elemento en $\mathbb{R}$, y solamente uno, denotado por "0" tal que: ***para todo*** $a \in \mathbb{R}$: $a + 0 = a = 0 + a$.

A5. AXIOMA DE EXISTENCIA Y UNICIDAD DEL ELEMENTO INVERSO ADITIVO:
Para cada $a \in \mathbb{R}$ existe un elemento en $\mathbb{R}$, y solo uno, denotado por "$-a$" que satisface la relación $a + (-a) = 0 = (-a) + a$.

M1. $\forall\, a, b \in \mathbb{R}$, $ab \in \mathbb{R}$ (***Ley de Clausura***)

M2. $\forall\, a, b \in \mathbb{R}$, $ab = ba$ (***Ley Conmutativa***)

M3. $\forall\, a, b, c \in \mathbb{R}$, $(ab)c = a(bc)$ (***Ley Asociativa***)

M4 AXIOMA DE EXISTENCIA Y UNICIDAD DEL ELEMENTO NEUTRO MULTIPLICATIVO:
Existe un elemento en $\mathbb{R}$, y solamente uno, denotado por "1", **diferente** de 0, tal que ***para todo*** $a \in \mathbb{R}$: $a \cdot 1 = a = 1 \cdot a$

M5. AXIOMA DE EXISTENCIA Y UNICIDAD DEL INVERSO MULTIPLICATIVO:

Para cada $a \neq 0$ en $\mathbb{R}$, existe uno y sólo un elemento en $\mathbb{R}$, denotado por a^{-1}, $\frac{1}{a}$, $1/a$, tal que : $a \cdot a^{-1} = 1 = a^{-1} \cdot a$.

D. LEYES DISTRIBUTIVAS

$$\forall\, a, b, c \in \mathbb{R}: \quad a(b+c) = ab + ac$$
$$(a+b)c = ac + bc .$$

01. LEY DE TRICOTOMÍA : Dados a y $b \in \mathbb{R}$, entonces ***una y solamente una*** de las siguientes relaciones siempre se cumple:

$$a < b \quad , \quad a = b \quad \text{o} \quad b < a .$$

02. LEY TRANSITIVA : Si $a < b$ y $b < c$ entonces $a < c$.

03. Si $a < b$ entonces $a + c < b + c$, $\forall\, c \in \mathbb{R}$.

04. Si $a < b$ y $c > 0$ entonces $ac < bc$.

S. AXIOMA DEL SUPREMO (AXIOMA DE LA MENOR COTA SUPERIOR)
Todo subconjunto no vacío de números reales $A \neq \varnothing$, acotado superiormente, tiene una **MENOR COTA SUPERIOR**, llamada también **EL SUPREMO** de A .

1.1 NOTA.-

Los cinco primeros axiomas se refieren a la ADICIÓN (SUMA), los cinco siguientes a la MULTIPLICACIÓN, el Axioma D relaciona la Suma con la Multiplicación, mientras que los cuatro axiomas 01, 02, 03 y 04 se refieren a la RELACIÓN DE ORDEN.

1.2 NOTA.- En las propiedades de los números reales que serán presentadas a continuación, tomaremos en consideración el hecho de que cuando se escriba una igualdad como $2 + 6 = 5 + 3$ lo que se está haciendo es dar nombres distintos a un mismo número real $8 = "2 + 6" = "5 + 3"$.

1.3 OBSERVACIONES.- De estos axiomas se deduce que $\mathbb{R}$ contiene a $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ y $\mathbb{Q}$, es decir, a los números racionales, y que :

1. De M4 se obtiene la existencia del número 1 dentro de $\mathbb{R}$.
2. De A1 se tienen que $1 + 1 \in \mathbb{R}$, es decir que $2 \in \mathbb{R}$, asimismo se tiene que $2 + 1 \in \mathbb{R}$, es decir que $3 \in \mathbb{R}$. Inductivamente se prueba por lo tanto que $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$.
3. De A4 se tiene la existencia del número 0 dentro de $\mathbb{R}$.
4. De A5 resulta que: $-1, -2, -3, \ldots$ también son números reales, de modo que $\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\} \subset \mathbb{R}$.

5. Para cada entero $m \in \mathbb{R}$, con $m \neq 0$, se sigue que $m^{-1} \in \mathbb{R}$, es decir, que $1/m \in \mathbb{R}$; y por M1 se sigue que: $n \cdot (1/m) \in \mathbb{R}$, es decir que $n/m \in \mathbb{R}$ para todo entero n.

Y como todo racional es de la forma n/m con n y m enteros, $m \neq 0$, entonces se concluye que $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.

Además, desde el axioma A1 hasta el axioma D se puede verificar que los números racionales también los satisfacen; sin embargo, sería imposible demostrar solamente con estos axiomas que los números irracionales como $\sqrt{3}$ ó $\sqrt{5}$ son números reales, a menos que utilicemos el último de los axiomas de los números reales, es decir el **AXIOMA DEL SUPREMO**. De aquí la gran importancia de este axioma en el Análisis Matemático.

1.4 AXIOMAS DE LA RELACIÓN DE IGUALDAD DE LOS NÚMEROS REALES

Enunciamos los siguientes axiomas sobre la *IGUALDAD DE NÚMEROS REALES*, y que son fundamentales para formalizar la teoría de los Números Reales:

(1) *PROPIEDAD REFLEXIVA DE LA IGUALDAD DE NÚMEROS REALES*:

Todo número real es igual a sí mismo.

(2) *PROPIEDAD SIMÉTRICA DE LA IGUALDAD DE NÚMEROS REALES*:

Si un número real es igual a otro, entonces el segundo es igual al primero.

(3) *PROPIEDAD TRANSITIVA DE LA IGUALDAD DE NÚMEROS REALES*:

Si un número real es igual a otro, y este otro es igual a un tercero, entonces el primero es igual al tercero.

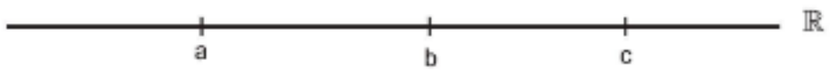
Adicionalmente a estos tres axiomas consideraremos el siguiente Axioma de Sustitución o Principio de Sustitución:

(4) *PRINCIPIO DE SUSTITUCIÓN DE LOS NÚMEROS REALES*:

" En cualquier proposición concerniente a los números reales, todo número real puede ser reemplazado por su igual sin alterar el valor veritativo de tal proposición ".

1.5 INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA

La correspondencia biunívoca entre los números reales y los puntos sobre una recta puede ser utilizada para ilustrar geométricamente la relación de orden $<$. La relación $a < b$ establece que al graficar en una recta, el número a se encuentra a la izquierda del número b .



2. PROPIEDADES DE LOS NÚMEROS REALES

2.1 PRINCIPIO DE SUSTITUCIÓN DE LA ADICIÓN DE NÚMEROS REALES

Si $a = b$ y $c = d$ entonces $a + c = b + d$.

PRUEBA.- Siendo a , b , c y d números reales,

$a + c \in \mathbb{R}$ (Ley de Clausura)

$\Rightarrow$ $a + c = a + c$ (Propiedad Reflexiva de la Igualdad)

$\Rightarrow$ $a + c = b + d$ (Por hipótesis y por el Principio de Sustitución de $\mathbb{R}$)

2.2 PRINCIPIO DE SUSTITUCIÓN DE LA MULTIPLICACIÓN EN $\mathbb{R}$

Si $a = b$ y $c = d$ entonces $a \cdot c = b \cdot d$

La prueba es análoga a (2.1).

2.3 COROLARIO.- Para todo número real c :

(1) Si $a = b$ entonces $a + c = b + c$

(2) Si $a = b$ entonces $a \cdot c = b \cdot c$

2.4 EJERCICIO.- Demuestre que: $-0 = 0$.

SOLUCION.-

$-0 = (-0) + 0$ por A4

$= 0$ por A5

2.5 EJERCICIO.- Demuestre que: si $a + b = a$ entonces $b = 0$.

SOLUCIÓN.-

$b = 0 + b$ por A4

$= [(-a) + a] + b$ A5

$= (-a) + (a + b)$ A3

$= (-a) + a = 0$ por hipótesis y A5

2.6 EJERCICIO.- Demuestre que: $a \cdot 0 = 0$.

SOLUCIÓN.-

$a \cdot 0 = a \cdot 0 + 0$ A4

$= a \cdot 0 + [a \cdot 0 + (-a \cdot 0)]$ A5

$= (a \cdot 0 + a \cdot 0) + (-a \cdot 0)$ A3

$= a \cdot (0 + 0) + (-a \cdot 0)$ D

$= a \cdot 0 + (-a \cdot 0) = 0$ A4 y A5

2.7 EJERCICIO.- Demuestre que: $-a = (-1) \cdot a$

SOLUCIÓN.-

$a + (-1) \cdot a = 1 \cdot a + (-1) \cdot a$ M4

$= [1 + (-1)] \cdot a$ D

$= 0 \cdot a = a \cdot 0$ A5 y M2

$= 0$ Ejercicio 2.6

y como por el AXIOMA A5 el inverso aditivo del número a es único con la condición $a + (-a) = 0$, entonces $-a = (-1) \cdot a$.

2.8 EJERCICIO.- Para todo $a , b \in \mathbb{R}$: $a(-b) = -(ab) = (-a)b$.

SOLUCIÓN.-

$a \cdot (-b) = a \cdot [(-1) \cdot b]$ Ejercicio 2.7

$= [a \cdot (-1)] \cdot b = [(-1) \cdot a] \cdot b$ M3 y M2

$= (-1) \cdot [a \cdot b] = -ab$ M3 y Ejercicio 2.7

Y en forma análoga se puede probar que: $(-a)b = -(ab)$.

2.9 EJERCICIO.- Demuestre que para todo $a \in \mathbb{R}$: $-(-a) = a$.

SOLUCIÓN.- Denotando por $b = -a$ ($\Rightarrow$ $b \in \mathbb{R}$) entonces

(α) $b + a = (-a) + a = 0$ . . . por A5

y como por A5 también, para cada $b \in \mathbb{R}$ existe un único elemento denotado por $-b$ tal que: $b + (-b) = 0$, entonces en (α) :

$a = (-b)$, es decir $a = -(-a)$.

2.10 EJERCICIO.- Para todo $a , b \in \mathbb{R}$: $(-a)(-b) = ab$.

SOLUCIÓN.- Con los dos Ejercicios anteriores:

$(-a)(-b) = -(a)(-b) = -[-(ab)] = ab$

2.11 EJERCICIO.- Pruebe que: $1^{-1} = 1$. Es decir, que el inverso multiplicativo del número 1 es el mismo 1 .

SOLUCIÓN. $1^{-1} = 1^{-1} \cdot 1$ . . por M4

$= 1$ . . por M5 (pues $a^{-1} \cdot a = 1$, para cada $a \neq 0$)

2.12 EJERCICIO.- Si $a \neq 0$ pruebe que: $a^{-1} \neq 0$.

SOLUCIÓN.- Si $a \neq 0$ existe (por M5) a^{-1} tal que $a \cdot a^{-1} = 1$; si fuese $a^{-1} = 0$ entonces $1 = a \cdot a^{-1} = a \cdot 0 = 0$, $\Rightarrow$ $1 = 0$

lo cual es absurdo , pues por M4 : $1 \neq 0$. $\therefore$ $a^{-1} \neq 0$.

2.13 EJERCICIO.- Si $a \neq 0$ pruebe que $(a^{-1})^{-1} = a$.

SOLUCIÓN.- Denotando por $b = a^{-1}$, entonces $b \cdot a = a^{-1} \cdot a = 1$ (por M5),

y como el inverso multiplicativo de b es el único número b^{-1} tal que $b \cdot b^{-1} = 1$ entonces $a = b^{-1} = (a^{-1})^{-1}$.

2.14 TEOREMA.- Sean a y b números reales, entonces

$$a \cdot b = 0 \quad \Leftrightarrow \quad [a = 0 \ \vee \ b = 0]$$

[Aquí el conectivo lógico $\vee$, que se lee 'o' en el sentido inclusivo, también se interpreta como: **reunido con la solución de ...**].

PRUEBA.- ($\Rightarrow$) Para el número real a existe solamente dos posibilidades: $a = 0$ ó $a \neq 0$,

i) si $a = 0$, el Teorema estaría probado.

ii) si $a \neq 0$, en forma análoga para b:

o $\begin{cases} b = 0 & \text{con lo que el teorema estaría probado,} \\ b \neq 0 & \text{lo cual veremos que es un absurdo, pues siendo } a \neq 0 \text{ se tiene} \end{cases}$

que $a^{-1} \neq 0$, y de la hipótesis:

$$ab = 0 \ \Rightarrow \ (a^{-1} \cdot a)b = a^{-1} \cdot 0$$
$$1 \cdot b = 0 \ \Rightarrow \ b = 0,$$

(lo cual es absurdo pues $b \neq 0$).

($\Leftarrow$) Si $a = 0$ entonces $ab = 0 \cdot b = 0$

o si $b = 0$ entonces $ab = a \cdot 0 = 0$.

2.15 NOTA.- Este teorema tiene una aplicación importante en la resolución de ecuaciones como veremos más adelante.

2.16 EJERCICIO.- Demuestre que: si $a + b = a + c$ entonces $b = c$.

SOLUCIÓN.-
$$a + b = a + c \ \Rightarrow \ (-a) + (a + b) = (-a) + (a + c)$$
$$\Rightarrow \ [(-a) + a] + b = [(-a) + a] + c \quad \ldots \ \text{A3}$$
$$0 + b = 0 + c \quad \ldots \ \text{A5}$$
$$b = c \quad \ldots \ \text{A4}.$$

2.17 EJERCICIO.- Demuestre que: si $ac = bc$ y $c \neq 0$ entonces $a = b$.

SOLUCIÓN. i) Si $a = 0$ entonces: $bc = 0 \ \Rightarrow \ b = 0$ (por el Teorema 2.14 pues $c \neq 0$). Luego: $a = b = 0$.

ii) Si $a \neq 0$ entonces como $c \neq 0$: $ac \neq 0$, luego $bc \neq 0$; además, también como $c \neq 0$, existe $c^{-1} \neq 0$ y por lo tanto,

$$ac = bc \ \Rightarrow \ (ac)c^{-1} = (bc)c^{-1}$$
$$a(cc^{-1}) = b(cc^{-1}) \quad \ldots \ \text{M3}$$
$$a \cdot 1 = b \cdot 1 \quad \ldots \ \text{M5}$$
$$a = b \quad \ldots \ \text{M4}$$

2.18 DEFINICIÓN.- (SUSTRACCIÓN) *PARA TODO* $a, b \in \mathbb{R}$ se define $a - b = a + (-b)$.

2.19 DEFINICIÓN.- (DIVISIÓN) *PARA TODO* $a, b \in \mathbb{R}$, $b \neq 0$: $\dfrac{a}{b} = a \cdot b^{-1}$.

También se denota $a/b = ab^{-1}$.

2.20 NOTA.- Desde que no se ha definido el inverso multiplicativo del número 0 en los axiomas de $\mathbb{R}$ es que siempre debe tomarse en cuenta que

LA DIVISIÓN ENTRE CERO **¡ NO ESTÁ DEFINIDA !**

2.21 PROBLEMA.- Demuestre que: $-a - b = -(a + b)$.

SOLUCIÓN.- Sea $c = a + b$:

$$c + (-a - b) = (a + b) + (-a - b) = (a + b) + (-a) + (-b) \quad \text{DEF. 2.18}$$
$$= a + [(-a) + b] + (-b) \quad \text{A3}$$
$$= [a + (-a)] + [b + (-b)] \quad \text{A2}$$
$$= 0 + 0 = 0 \quad \text{A5 y A4}$$

2.22 PROBLEMA.- Demuestre que: si $ab \neq 0$ entonces $(ab)^{-1} = a^{-1} \cdot b^{-1}$.

SOLUCIÓN.- Sea $c = ab$:

$$c(a^{-1} \cdot b^{-1}) = (ab)(a^{-1} \cdot b^{-1}) = a(ba^{-1})b^{-1} \quad \text{M3}$$
$$= a(a^{-1}b)b^{-1} = (aa^{-1})(bb^{-1}) \quad \text{M2 y M3}$$
$$= 1 \cdot 1 = 1 \quad \text{M5 y M4}$$

y como el inverso multiplicativo de $c \neq 0$ es único (por M5) entonces $c^{-1} = a^{-1}b^{-1}$, es decir $(ab)^{-1} = a^{-1}b^{-1}$.

2.23 PROBLEMA.- Demuestre que: $\dfrac{a}{b} + \dfrac{c}{d} = \dfrac{ad + bc}{bd}$.

2.24 PROBLEMA.- Demuestre que ***para todo*** $a \neq 0$ en $\mathbb{R}$:

$$(-a)^{-1} = -(a^{-1}) = -a^{-1}$$

SOLUCIÓN.- Sea $b = -a$, entonces

$$b(-a)^{-1} = (-a)(-a^{-1}) = a \cdot a^{-1} = 1$$

y por la unicidad en M5, de $b(-a^{-1}) = 1$ se tiene que

$b^{-1} = (-a^{-1})$, es decir: $(-a)^{-1} = -a^{-1}$.

SERIE DE EJERCICIOS

Demuestre en base a los Axiomas de los Números Reales que:

1. $a - (b - c) = (a - b) + c$
2. $x - x = 0$;
3. $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$
4. Si $b \neq 0$ y $d \neq 0$: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow ad = bc$
5. $a(b - c) = ab - ac$;
6. $\left(\frac{a}{b}\right)\left(\frac{c}{d}\right) = \frac{ac}{bd}$, si $bd \neq 0$.
7. $(\frac{a}{b}) / (\frac{c}{d}) = \frac{ad}{bc}$, si $bcd \neq 0$.
8. $\frac{a}{(-b)} = \frac{(-a)}{b} = -\left(\frac{a}{b}\right)$, si $b \neq 0$.

9. TEOREMA FUNDAMENTAL DE LAS ECUACIONES LINEALES :

Para todo $a, b, x \in \mathbb{R}$, con $a \neq 0$:

$$ax + b = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{b}{a} \quad (= -ba^{-1})$$

Ω Ω Ω Ω Ω

4

ECUACIONES POLINÓMICAS

1. ECUACIONES LINEALES CON UNA VARIABLE

Estas ecuaciones tienen la forma general: $ax + b = 0$ donde a y b son constantes, $a \neq 0$, siendo x la incógnita, por lo cual son también llamadas ECUACIONES LINEALES CON UNA INCÓGNITA y que debido a las Propiedades de los Números Reales se resuelve de la siguiente manera:

$$ax + b = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = -\frac{b}{a}$$

1.1 EJEMPLOS.-

a) $2x + 3 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = -\frac{3}{2}$

b) $3x - 5 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 5/3$

c) $-4x - 16 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = -4$

1.2 ECUACIONES EQUIVALENTES.-

Dos ecuaciones se llaman EQUIVALENTES si es que tienen exactamente las mismas soluciones, como por ejemplo las ecuaciones:

$$2x = 6 \quad \text{y} \quad x - 3 = 0$$

son equivalentes pues cada una de ellas tiene como solución a $x = 3$ y ninguna otra.

1.3 OPERACIONES QUE ORIGINAN ECUACIONES EQUIVALENTES

a) Sumar el mismo número o expresión en ambos miembros.
b) Restar el mismo número o expresión en ambos miembros.

c) Multiplicar o dividir ambos miembros por una misma constante no nula.
d) Multiplicar o dividir ambos miembros por una misma expresión que no se anule para ningún valor de la variable, siempre que no origine soluciones extrañas ni restrinja las soluciones de la ecuación original.

Para resolver una ecuación se realiza la misma operación (a), (b), (c) o (d) en ambos miembros, con el objetivo de tener la incógnita sola en uno de los miembros.

1.4 EJEMPLO.- Resuelva la ecuación: $6x - 5 = 2x + 7$.

SOLUCIÓN.- Restamos $2x$ a ambos lados y sumamos 5 a ambos miembros:

$$6x - 5 - 2x + 5 = 2x + 7 - 2x + 5 \quad \Leftrightarrow \quad 4x = 12$$

y dividiendo ambos miembros entre 4: $\Leftrightarrow \quad \underline{x = 3}$

1.5 EJEMPLO.- Resuelva la ecuación: $\frac{3}{2}x - 2 = \frac{5}{4}x + \frac{3}{5}$

SOLUCIÓN.-

$$\frac{3}{2}x - 2 = \frac{5}{4}x + \frac{3}{5} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{3}{2}x - \frac{5}{4}x = \frac{3}{5} + 2$$

$$\frac{6}{4}x - \frac{5}{4}x = \frac{3}{5} + \frac{10}{5} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x}{4} = \frac{13}{5}$$

y multiplicando por 4 ambos miembros: $\underline{x = \frac{52}{5}}$.

1.6 EJEMPLO.- Resuelva: $(2x + 5)^2 - x(4x - 5) = 100$.

SOLUCIÓN.- Desarrollando el cuadrado del binomio:

$$4x^2 + 20x + 25 - (4x^2 - 5x) = 100$$

$$4x^2 + 20x + 25 - 4x^2 + 5x = 100 \quad \Leftrightarrow \quad 25x + 25 = 100$$

$$\Leftrightarrow \quad x + 1 = 4$$

$$\Leftrightarrow \quad x = 3$$

1.7 UNA ECUACIÓN QUE NO TIENE SOLUCIÓN

Si tratamos de resolver la ecuación: $2x + 3 = 2x + 5$

$\Leftrightarrow \quad 2x - 2x = 5 - 3 \quad \Leftrightarrow \quad 0 = 2$ ... (ABSURDO)

lo cual es FALSO ***independientemente de cualquiera que sea el valor de*** x, y por lo tanto, tal ecuación no tiene solución para ningún x en $\mathbb{R}$.

1.8 PROBLEMA.- Resuelva la ecuación: $\frac{1}{x} + 2 = \frac{3}{2} - \frac{4}{x}$.

SOLUCIÓN.- Considerando que x no puede ser cero (pues la división entre 0 no está permitida) agrupamos términos y obtenemos:

$$\frac{1}{x} + \frac{4}{x} = \frac{3}{2} - 2, \text{ con } x \neq 0, \quad \Leftrightarrow \quad \frac{5}{x} = \frac{3-4}{2} = -\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \quad x = -10$$

1.9 NOTA.- La siguiente ecuación no tiene solución: $\frac{1}{x} = 0$

pues como debe ser $x \neq 0$ entonces:

$$\frac{1}{x} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 1 = x \cdot 0 \quad \Leftrightarrow \quad 1 = 0 \quad \text{(ABSURDO)}$$

2. SISTEMA DE ECUACIONES LINEALES CON DOS INCÓGNITAS

Resolvamos el siguiente sistema de ecuaciones lineales simultáneas con dos incógnitas x, y :

$$\begin{aligned} 2x + 3y &= 5 \\ 3x + 8y &= 4 \end{aligned} \qquad (*)$$

multiplicamos ahora la primera ecuación por 3 y la segunda ecuación por -2 (esto significa en ambos miembros):

$$\begin{matrix} \times (3) \\ \times (-2) \end{matrix} \quad \left\{ \begin{aligned} 2x + 3y &= 5 \\ 3x + 8y &= 4 \end{aligned} \right.$$

$$\Rightarrow \quad \begin{aligned} 6x + 9y &= 15 \\ -6x - 16y &= -8 \end{aligned} \qquad (**)$$

sumamos algebraicamente ambas ecuaciones de $(**)$ y obtenemos:

$$-7y = 7 \quad \Leftrightarrow \quad y = -1$$

que al reemplazar en cualquiera de las ecuaciones de $(**)$ o de $(*)$ sirve para hallar el valor de x, es decir $x = 4$.
Por lo tanto, la solución del sistema $(*)$ es: $x = 4$, $y = -1$.

2.1 EJEMPLO.- Resuelva el sistema: $\begin{aligned} 4x - 6y &= -42 \\ 3x + y &= -4 \end{aligned} \qquad (*)$

SOLUCIÓN.- Multiplicando la segunda ecuación por 6 obtenemos el sistema equivalente

$$\begin{aligned} 4x - 6y &= -42 \\ \underline{18x + 6y} &= \underline{-24} \end{aligned}$$

sumando ambas ecuaciones: $22x = -66 \quad \Rightarrow \quad x = -3$

Reemplazando este valor en cualquiera de las ecuaciones de $(*)$ resulta : $y = 5$.
Así, la solución del sistema $(*)$ es : $x = -3$, $y = 5$.

2.2 EJEMPLO.- Resuelva el sistema: $\begin{aligned} -5x + 7y &= 9 \\ 2x - 4y &= -12 \end{aligned}$ $(*)$

SOLUCIÓN.- Multiplicando la primera ecuación por 2 y la segunda por 5 obtenemos el sistema equivalente:

$$\begin{aligned} -10x + 14y &= 18 \\ 10x - 20y &= -60 \end{aligned}$$

sumando ambas ecuaciones : $-6y = -42 \quad \Rightarrow \quad y = 7$

y reemplazando este valor en cualquiera de las ecuaciones de $(*)$ resulta $x = 8$
Así, la solución del sistema es: $x = 8$, $y = 7$.

3. SISTEMA DE ECUACIONES LINEALES CON TRES INCÓGNITAS

Resolveremos el sistema:

$$(*) \quad \begin{cases} 3x + 2y - z = 14 & (a) \\ x - 4y + 2z = -7 & (b) \\ -2x + y + 3z = -7 & (c) \end{cases}$$

Efectuaremos las siguientes operaciones: $-3 \times (b) + (a)$, $2 \times (b) + (c)$ con lo cual obtenemos el sistema equivalente siguiente:

$$\begin{aligned} 14y - 7z &= 35 && (a') \\ x - 4y + 2z &= -7 && (b') \\ -7y + 7z &= -21 && (c') \end{aligned}$$

Resolviendo el subsistema formado por las ecuaciones (a') y (c'):

$7y = 14 \quad \Rightarrow \quad y = 2 \quad \Rightarrow \quad z = -1$

y reemplazando estos valores en (b') resulta $x = 3$.
Luego, la solución del sistema original $(*)$ es: $x = 3$, $y = 2$, $z = -1$.

3.1 EJEMPLO.- Resuelva el sistema:

$$(*) \quad \begin{cases} x + y - 6z = 9 & (a) \\ x - y + 4z = 5 & (b) \\ -2x + 3y - z = 4 & (c) \end{cases}$$

SOLUCIÓN.- Efectuando las operaciones elementales siguientes:

$$(-1) \times (a) + (b) \quad \text{y} \quad (2) \times (a) + (c)$$

se obtiene el sistema equivalente:

$$\begin{aligned} x + y - 6z &= 9 && (a') \\ -2y + 10z &= -4 && (b') \\ 5y - 13z &= 22 && (c') \end{aligned}$$

Resolviendo el subsistema formado por las ecuaciones (b') y (c') resulta que $y = 7$, $z = 1$. Y reemplazando en (a') : $x = 8$. Por lo tanto, la solución del sistema $(*)$ es: $x = 8$, $y = 7$, $z = 1$.

3.2 PROBLEMA.- Resuelva el sistema siguiente:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{12} , \quad \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{20} , \quad \frac{1}{x} + \frac{1}{z} = \frac{1}{15} .$$

SOLUCIÓN.- Hacemos $u = \frac{1}{x}$, $v = \frac{1}{y}$, $w = \frac{1}{z}$ $(*)$

y transformamos al nuevo sistema equivalente:

$$(**) \quad \begin{cases} u + v = 1/12 \\ v + w = 1/20 \\ u + w = 1/15 \end{cases}$$

Pasando al sistema equivalente (¿qué pasos se hicieron?) siguiente:

$$\begin{cases} u + v = 1/12 \\ v + w = 1/20 \\ -v + w = -1/60 \end{cases}$$

y resolviendo el subsistema formado por las dos últimas ecuaciones obtenemos:
$w = 1/60$, $v = 1/30$. Reemplazando estos valores en la primera ecuación:
$u = 1/20$. Por lo tanto, de $(*)$ la solución del sistema original es:

$$x = \frac{1}{u} = 20 , \quad y = \frac{1}{v} = 30 , \quad z = \frac{1}{w} = 60 .$$

3.3 PROBLEMA.- Resuelva el sistema siguiente:

$$\frac{xy}{5x + 4y} = 6 , \quad \frac{xz}{3x + 2z} = 8 , \quad \frac{yz}{3y + 5z} = 6$$

SOLUCIÓN.- Invirtiendo las ecuaciones:

$$\frac{5x + 4y}{xy} = \frac{1}{6} , \quad \frac{3x + 2z}{xz} = \frac{1}{8} , \quad \frac{3y + 5z}{yz} = \frac{1}{6}$$

Desarrollando las fracciones:

$$\frac{5}{y} + \frac{4}{x} = \frac{1}{6} , \quad \frac{3}{z} + \frac{2}{x} = \frac{1}{8} , \quad \frac{3}{z} + \frac{5}{y} = \frac{1}{6}$$

Haciendo $u = 1/x$, $v = 1/y$, $w = 1/z$ obtenemos el sistema:

$$\left.\begin{aligned} 4u + 5v &= 1/6 \\ 2u + 3w &= 1/8 \\ 5v + 3w &= 1/6 \end{aligned}\right\} \quad (*)$$

En este sistema, si sumamos las dos primeras ecuaciones y restamos luego la tercera obtenemos sucesivamente:

$$\begin{array}{rcl} 6u + 5v + 3w &=& (1/6) + (1/8) \\ 5v + 3w &=& (1/6) \\ \hline 6u &=& (1/8) \end{array}$$

de donde: $u = 1/48$. Al reemplazar este valor en la primera ecuación de $(*)$ resulta $v = 1/60$, y de la tercera ecuación de $(*)$: $w = 1/36$.
Por lo tanto, la solución del sistema original es:

$$x = \frac{1}{u} = 48 \quad , \qquad y = \frac{1}{v} = 60 \quad , \qquad z = \frac{1}{w} = 36 \ .$$

SERIE DE EJERCICIOS

1. Resuelva las siguientes ecuaciones:

   a) $x - 7 - 9x = 3x - 3 - 7x$

   b) $2\frac{1}{3}x - \frac{7}{2}x = 3\frac{1}{5}x - \frac{14}{3}x - 9$

   c) $7 - 2x - \frac{1-3x}{7} = 2 - \frac{2x-1}{3}$

   d) $(x+5)(x+2) - 3(4x-3) = (5-x)^2$

   e) $(3x-1)^2 - 5(2x+1)^2 + (6x-3)(2x+1) = (x-1)^2$

   f) $(x+2)^3 - (x-2)^3 = 12(x^2 - x) - 8$

   g) $\frac{8x-5}{2x+5} = 5 - \frac{3x+7}{3x+2}$

   h) $\frac{6}{x+2} + \frac{x+2}{2-x} = \frac{x^2}{4-x^2}$

   i) $3(a - 4x) + 7(2x - a) - 5(3x + 2a) + a = 0$

   j) $\frac{a+x}{b} - \frac{x-b}{a} = 2$, para $a \neq b$.

2. Resuelva los siguientes sistemas de ecuaciones lineales simultáneos:

   a) $\begin{array}{rcl} 3x + 2y &=& 13 \\ 5x - 3y &=& 9 \end{array}$

   b) $\begin{array}{rcl} 3m + 2n &=& 13 \\ -6m + 4n &=& 14 \end{array}$

   c) $\begin{array}{rcl} x - y &=& 2 \\ 3x - 2y &=& 9 \end{array}$

   e) $\begin{array}{rcl} 2x + y &=& 11 \\ 3x - y &=& 9 \end{array}$

   f) $\begin{array}{rcl} 0{,}5a + 0{,}2b &=& 0{,}54 \\ 0{,}3a - 0{,}7b &=& 0{,}16 \end{array}$

   g) $\begin{array}{rcl} 4x - 6y &=& 32 \\ 15x + 6y &=& 6 \end{array}$

   d) $\begin{array}{rcl} 4x + 3y + 4 &=& 0 \\ 6x + 5y + 7 &=& 0 \end{array}$

   h) $\begin{array}{rcl} 22x + 16y &=& 6 \\ 33x - 24y &=& 9 \end{array}$

3. Resuelva cada uno de los siguientes sistemas de ecuaciones:

   a) $\frac{4}{x} + \frac{6}{y} = 0$

   $\frac{3}{x} - \frac{4}{y} = -\frac{17}{6}$

   b) $4x + (2/y) = 3$

   $7x + (3/y) = 5$

   c) $\begin{array}{rcl} (12/x) + 7y &=& 53 \\ (18/x) - 13y &=& -85 \end{array}$

   d) $\frac{1}{3-x} + \frac{1}{y-2} = 2$

   $\frac{7}{3-x} - \frac{3}{y-2} = 4$

   e) $\frac{3(2x-5y)}{5x-2y} = -24$

   $\frac{4(5x-2y)}{3(\frac{1}{3}+5y)} = 1$

4. Resuelva los siguientes sistemas de ecuaciones:

   a) $\begin{array}{rcl} 3x + 2y + z &=& -4 \\ 5x - 6y + z &=& 92 \\ 4x + 7y - z &=& -67 \end{array}$

   b) $\begin{array}{rcl} 37x - 23y + 17z &=& -32 \\ 14x - 22y - 11z &=& -91 \\ -9x + 11y - 10z &=& 1 \end{array}$

   c) $\begin{array}{rcl} x + y &=& 2 \\ y + z &=& 4 \\ z + x &=& 9 \end{array}$

   d) $\begin{array}{rcl} 2x + y - 4z &=& 14 \\ 5y - x - z &=& 1 \\ 2x - 4y + 5z &=& 13 \end{array}$

   e) $\frac{5x+7y}{x+y} = 6$, $\frac{3(z-x)}{x-y+z} = 1$, $\frac{2x+3y-z}{(x/2)+3} = 4$

   f) $\frac{2}{x} + \frac{3}{y} = \frac{1}{4}$, $\frac{3}{y} + \frac{4}{z} = \frac{1}{20}$, $\frac{4}{z} + \frac{5}{x} = \frac{33}{10}$

CLAVE DE RESPUESTAS

1. a) $x = -1$, b) $x = -30$, c) $x = 5$, d) $x = 6/5$,
   e) $x = 1/3$, f) $x = -2$, g) $x = -5/13$, h) $x = 8$,
   i) $x = -a$, j) $x = b - a$.

2. a) $x = 3$, $y = 2$ b) $m = 1$, $n = 5$ c) $x = 5$, $y = 3$
   d) $x = 1/2$, $y = -2$ e) $x = 4$, $y = 3$ f) $a = 1$, $b = 0,2$
   g) $x = 2$, $y = -4$ h) $x = 3/11$, $y = 0$.

3. a) $x = -2$, $y = 3$ b) $x = 1/2$, $y = 2$ c) $x = 3$, $y = 7$
   d) $x = 2$, $y = 3$ e) $x = 1/6$, $y = 1/3$.

4. a) $x = 4$, $y = -11$, $z = 6$ b) $x = -1$, $y = 2$, $z = 3$

c) $x = 7/2\ ,\ y = -3/2\ ,\ z = 11/2$ d) $x = 8\ ,\ y = 2\ ,\ z = 1$
e) $x = 8\ ,\ y = 8\ ,\ z = 12$ f) $x = 2\ ,\ y = -4\ ,\ z = 5\ .$

4. POLINOMIOS

Una expresión algebraica de la forma:

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ \ldots\ + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 \qquad (*)$$

donde n es un entero ≥ 0 y los coeficientes $a_0\ ,\ a_1\ ,\ \ldots\ ,\ a_n$ son números arbitrarios, es llamada un POLINOMIO DE GRADO n en la variable x y siempre que el coeficiente a_n llamado COEFICIENTE PRINCIPAL sea diferente de cero.

Un POLINOMIO DE GRADO CERO es cualquier número constante distinto de cero. El número CERO es el único polinomio para el cual el grado NO ESTÁ DEFINIDO.

Puesto que en todo este capítulo trataremos sobre POLINOMIOS, los denotaremos en las formas $P(x)\ ,\quad Q(x)\ ,\quad R(x)\ ,\quad H(x)\ ,$ etc.
Al coeficiente a_0 en $(*)$ también se le llama TÉRMINO INDEPENDIENTE.

Por ejemplo, $P(x) = 2x^2 - 3x + 1\ ,\ \forall\ x \in \mathbb{R}\quad (**)$, es un polinomio de segundo grado (grado dos) en la variable x.

Se calcula el valor del polinomio $P(x)$ para un valor particular de la variable reemplazando en $(**)$, en ambos miembros, donde aparezca la variable x por este valor particular. Por ejemplo,

a) Para $x = 2$: $\quad P(x) = 2x^2 - 3x + 1$

$$P(2) = 2(2)^2 - 3(2) + 1 = 3$$

y se dice que EL VALOR DEL POLINOMIO $P(x)$ para $x = 2$ es 3.

b) Para $x = 1$: $\quad P(x) = 2x^2 - 3x + 1$

$$P(1) = 2(1)^2 - 3(1) + 1 = 0$$

y se dice que EL VALOR DEL POLINOMIO $P(x)$ para $x = 1$ es 0. Más aún, en este caso se dice que el polinomio $P(x)$ SE ANULA PARA $x = 1$ (se hace CERO para $x = 1$), y que $x = 1$ es UNA RAÍZ DEL POLINOMIO $P(x)$.

c) Para $x = 0$: $\quad P(0) = 2(0)^2 - 3(0) + 1 = 1$
aquí vemos que $P(x)$ NO SE ANULA para $x = 0$.

d) Para $x = -3$: $\quad P(-3) = 2(-3)^2 - 3(-3) + 1 = 18 + 9 + 1 = 28$

e) Para $x = \frac{1}{2}$: $\quad P(\frac{1}{2}) = 2(\frac{1}{2})^2 - 3(\frac{1}{2}) + 1 = \frac{1}{2} - \frac{3}{2} + 1 = 0$

vemos que $P(x)$ también SE ANULA PARA $x = \frac{1}{2}$, de modo que $x = \frac{1}{2}$ es otra RAÍZ del polinomio $P(x)$.

En general, un valor particular $x = x_0$ se llama RAÍZ del POLINOMIO $P(x)$ si $P(x_0) = 0$. Es decir, si es que $P(x)$ SE ANULA para $x = x_0$.

Un polinomio, dependiendo de su grado, puede tener una o varias raíces, o ninguna. En el caso del polinomio $P(x) = 2x^2 - 3x + 1$ al ser factorizado se tiene

$$P(x) = 2x^2 - 3x + 1 = (x - 1)(2x - 1)$$

de donde se observa que el polinomio $P(x)$ se ANULARÁ si x toma cualquiera de los dos valores : $x = 1$ ó $x = \frac{1}{2}$. De aquí vemos que este polinomio tiene DOS RAÍCES, lo que fue verificado en los cálculos (b) y (e) previos.

Este ejemplo nos ha servido para ilustrar la estrecha relación que existe entre la posibilidad de FACTORIZAR UN POLINOMIO y el CÁLCULO DE SUS RAÍCES, por lo que el objetivo de este capítulo será el de encontrar algunas técnicas para factorizar un polinomio, así como algunos criterios para conocer la naturaleza de ***sus raíces reales***.

4.1 NOTA.- El polinomio $P(x) = x^2 + 1\ ,\ \forall\ x \in \mathbb{R}$, no tiene ninguna raíz real, pues debido a las propiedades de los números reales: del hecho que

$$\begin{aligned} & x^2 \geq 0 && \text{para todo } x \in \mathbb{R} \\ \Rightarrow\quad & x^2 + 1 \geq 1\ , && \text{para todo } x \in \mathbb{R} \\ \Rightarrow\quad & P(x) \geq 1 > 0\ , && \text{para todo } x \in \mathbb{R} \\ \Rightarrow\quad & P(x) > 0\ , && \text{para todo } x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Así este polinomio $P(x)$ nunca tomará el valor cero (y mucho menos un valor negativo) y por lo tanto ***no tendrá raíces reales***.

En cambio, si consideramos al polinomio $P(x) = x^2 + 1$ sobre el campo $\mathbb{C}$ de los números ***imaginarios y complejos*** entonces sí existirán dos raíces imaginarias para $P(x)$. En efecto,

$$\begin{aligned} x^2 + 1 = 0 \quad & \Leftrightarrow \quad x^2 = -1 \\ & \Leftrightarrow \quad x = \pm\sqrt{-1} = \pm i \qquad (*) \end{aligned}$$

Donde, si recordamos nuestros conocimientos escolares, el número imaginario i se define como:

$$\text{UNIDAD IMAGINARIA} = \sqrt{-1} = i \quad \Rightarrow \quad i^2 = -1$$

De $(*)$ tenemos que para $P(x) = x^2 + 1 = x^2 - (-1) = x^2 - i^2$

$\Rightarrow \quad P(x) = (x - i)(x + i)$

Luego, $P(x) = 0$ si $x = i$, $254 = 3 \times 84 + 2$. Así, resulta que el polinomio $P(x) = x^2 + 1$ tiene DOS RAICES COMPLEJAS (IMAGINARIAS).

En todo este Capitulo, nuestro objetivo será el de estudiar solamente RAÍCES REALES DE POLINOMIOS.

4.2 OPERACIONES CON POLINOMIOS

Se dice que los polinomios $P(x)$ y $Q(x)$ son dos **POLINOMIOS IGUALES** cuando todos sus coeficientes correspondientes a términos del mismo grado, son iguales (coinciden).

Según esto, definiremos lo que es un **POLINOMIO CERO** llamado también **POLINOMIO IDÉNTICAMENTE CERO**, como aquel que después de haber sido ordenado en potencias de orden creciente (o en forma decreciente) resulta que **TODOS SUS COEFICIENTES SON CEROS**.

Es decir, el polinomio $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ es **IDÉNTICAMENTE CERO** (*o Idénticamente Nulo*) si es que

$$a_n = 0, \quad a_{n-1} = 0, \quad \ldots, \quad a_1 = 0, \quad a_0 = 0.$$

En tal caso, se denota: $P(x) \equiv 0$.

4.3 DEFINICIÓN. Si $P(x) = a_0$, $\forall x \in \mathbb{R}$, con $a_0 \neq 0$, entonces $P(x)$ recibe el nombre de **POLINOMIO CONSTANTE** y tiene **GRADO CERO** (pues se puede escribir $a_0 = a_0 x^0$).

En el Capítulo 3 ya estudiamos las operaciones con Polinomios como son: suma, resta, multiplicación y división de polinomios. Asimismo vimos el ALGORITMO DE LA DIVISIÓN para polinomios, el cual lo estudiaremos con mayor dedicación.

5. EL ALGORITMO DE DIVISIÓN PARA POLINOMIOS

Recordemos que la división de números enteros positivos se realiza mediante el siguiente esquema:

$$\begin{array}{l|l} a & b \\ \underline{qb} & q \\ r & \end{array} \qquad (r < b)$$

donde a = DIVIDENDO, b = DIVISOR, q = COCIENTE, r = RESIDUO

Este algoritmo se efectúa varias veces sucesivas hasta obtener un residuo menor que el DIVISOR (donde $r = a - bq$ con $0 \leq r < b$) lo que se expresa como

$$a = bq + r \quad , \text{ con } \quad 0 \leq r < b \ .$$

En caso que el residuo r sea cero, entonces se dice que a ***es divisible por*** b, o también que b ***es un factor de*** a :

1)
$$\begin{array}{l|l} 254 & 3 \\ \underline{24} & 84 \\ 14 & \\ \underline{12} & \\ 2 \leftarrow \text{RESIDUO} & \end{array} \qquad \Rightarrow \quad 254 = 3 \times 84 + 2$$

2)
$$\begin{array}{l|l} 275 & 11 \\ \underline{22} & 25 \\ 55 & \\ \underline{55} & \\ 0 \leftarrow \text{RESIDUO} & \end{array} \qquad \Rightarrow \quad 275 = 11 \times 25 + 0$$

Luego, 11 y 25 son ambos factores de 275.

A continuación enunciamos un resultado análogo para polinomios llamado ALGORITMO DE DIVISIÓN para POLINOMIOS, y que ya conocemos de los cursos de matemáticas de colegio o de los libros de ÁLGEBRA.

5.1 EJEMPLO.- Al dividir $3x^3 - 2x + 1$ entre $x - 3$ se obtuvo

$$\frac{3x^3 - 2x + 1}{x - 3} = (3x^2 + 9x + 25) + \frac{76}{x - 3}$$

5.2 TEOREMA (ALGORITMO DE DIVISIÓN PARA POLINOMIOS)

Si $P(x)$ es un polinomio de grado n, y $D(x)$ es un polinomio no nulo de grado m, entonces ***existen dos únicos polinomios*** $Q(x)$ y $R(x)$ tales que

$$P(x) = Q(x) \cdot D(x) + R(x)$$

[Grados : $\quad n \quad m \quad (< m)$]

donde el GRADO de residuo $R(x)$ ES MENOR que el GRADO del divisor $D(x)$, o $R(x)$ es el polinomio ***idénticamente cero.***

$P(x)$ = Dividendo, $D(x)$ = Divisor, $Q(x)$ = Cociente y , $R(x)$ = Residuo o RESTO de la división.

Note que : $\text{grad}[R(x)] < \text{grad}[D(x)] = m$.

El grado m de $D(x)$ puede ser ***mayor*** que el grado n de $P(x)$, en cuyo caso: $Q(x) \equiv 0$ y $R(x) = P(x)$; o puede ocurrir que $m \leq n$, en cuyo caso $Q(x)$ y $R(x)$ se hallan con el método de División de Polinomios que ya conocemos.

5.3 EJEMPLO. Aplicaremos el ALGORITMO DE LA DIVISIÓN para hallar el Cociente y el Residuo de la división de

$x^3 - 3x + 5$ entre $x^2 + 2x - 3$

SOLUCIÓN.- Mediante el método de División que ya conocemos resulta:

$$\underset{\text{Dividendo}}{x^3 + 0x^2 - 3x + 5} = \underset{\text{Cociente}}{(x - 2)}\underset{\text{Divisor}}{(x^2 + 2x - 3)} + \underset{\text{Residuo}}{(4x - 1)}$$

donde el Grad.[Residuo $R(x) = 4x - 1] = 1$ es menor que el grado 2 del divisor $D(x) = x^2 + 2x - 3$.

6. DIVISIÓN SINTÉTICA

Este método de la DIVISIÓN SINTÉTICA ha sido diseñado para facilitar el cálculo del COCIENTE $Q(x)$ y del RESIDUO $R(x)$ *CUANDO UN POLINOMIO* $P(x)$ *SE DIVIDE ENTRE UN POLINOMIO DE GRADO UNO:* $(x - a)$.

Este método requiere que el polinomio $P(x)$ sea escrito con sus potencias en orden decreciente. También se le conoce con el nombre de: *REGLA DE RUFFINI.*

6.1 EJEMPLO.- Dividir $4x^3 + x^2 - 30$ entre $x - 2$.

Caracterizamos el polinomio $P(x) = 4x^3 + x^2 - 30 = 4x^3 + x^2 + 0x - 30$ por sus coeficientes 4 , 1 , 0 , -30 , y al polinomio $x - 2$ por sus coeficientes 1 , -2 , y escribimos la división como sigue:

$$\begin{array}{rl|l}
4x^3 + x^2 + 0x - 30 & & x - 2 \\
\hline
-4x^3 + 8x^2 & & 4x^2 + 9x + 18 \leftarrow Q(x) \text{ COCIENTE} \\
\hline
9x^2 + 0x & & \\
-9x^2 + 18x & & \\
\hline
18x - 30 & & \\
-18x + 36 & & \\
\hline
+ 6 \leftarrow \text{RESIDUO} & &
\end{array}$$

$Q(x) = 4x^2 + 9x + 18$
$D(x) = x - 2$ [grado uno]
$R(x) = 6$ [grado cero]

Esto mismo se puede obtener trabajando sólo con los coeficientes como sigue:

$$\begin{array}{rrrr|l}
\textcircled{4} & 1 & 0 & -30 & 1 \quad -2 \quad \leftarrow \text{DIVISOR} \\
\hline
-4 & 8 & & & 4 \quad +9 \quad +18 \quad \leftarrow \text{COCIENTE} \\
\hline
\textcircled{9} & 0 & & & \\
-9 & +18 & & & \\
\hline
\textcircled{18} & & -30 & & \\
-18 & & +36 & & \\
\hline
\textcircled{6} & \leftarrow \text{RESIDUO} & & &
\end{array}$$

Sabiendo que el Cociente $Q(x)$ debe tener grado 2 (pues el Dividendo tiene grado 3 y el Divisor grado 1) entonces se completa el Cociente: $Q(x) = 4x^2 + 9x + 18$ y por lo tanto $4x^3 + x^2 - 30 = (x - 2)(4x^2 + 9x + 18) + 6$.

Si nos fijamos en los círculos del esquema previo vemos que se puede ocupar menos espacio disponiendo el esquema como sigue, donde el último círculo (6) corresponde al RESIDUO ,

- Al término -2 del DIVISOR le cambiamos de signo y lo colocamos a la izquierda en un casillero:

$$\begin{array}{r|rrrr}
 & 4 & 1 & 0 & -30 \\
-(-2) = 2 & & 8 & & \\
\hline
 & 4 & 9 & &
\end{array}$$

luego bajamos el primer coeficiente 4 a la última fila, lo ***multiplicamos por*** 2 y al resultado 8 lo colocamos debajo del 1 y hacemos la suma algebraica $1 + 8 = 9$ que es colocada en la última fila, y repetimos los mismos pasos a continuación.

$$\begin{array}{r|rrrr}
 & 4 & 1 & 0 & -30 \\
2 & & 8 & 18 & 36 \\
\hline
 & 4 & 9 & 18 & +6
\end{array}$$

Es decir, al segundo coeficiente 9 lo ***multiplicamos por*** 2 y al resultado 18 lo colocamos debajo del 0 con el cual hacemos la suma algebraica resultando 18 ; este 18 va en la última fila.

Este tercer coeficiente es también ***multiplicado por el*** 2 del casillero izquierdo, y al resultado 36 se le coloca debajo del -30 con el cual se suma algebraicamente y se obtiene 6 .

Este último valor siempre indica el RESIDUO de la división entre $x - 2$.

A continuación ***tenemos el esquema completo en donde*** $Q(x)$ ***se construye utilizando solamente los coeficientes hallados***:

$$Q(x) = 4x^2 + 9x + 18, \text{ Residuo } R = 6$$

	4	1	0	− 30	← Dividendo (grado 3)
2		8	18	36	
	4	9	18	+ 6	← Residuo (constante)

$Q(x)$ ← COCIENTE (grado 2)

Por lo tanto, si $P(x) = 4x^3 + x^2 + 0x - 30$ entonces

$$P(x) = 4x^3 + x^2 - 30 = (x - 2)(4x^2 + 9x + 18) + 6 \qquad (*)$$

Note que el -2 del Divisor $x - 2$ fue cambiado de signo: 2 y con este valor colocado en el casillero izquierdo se trabajó el esquema final de la DIVISIÓN SINTÉTICA.

En realidad, en el casillero izquierdo se coloca el valor de x que anula a $x - 2$, es decir: $x = 2$.

Además, si evaluamos $P(x)$ para $x = 2$ en $(*)$, resulta $x - 2 = 0$, y por lo tanto

$$P(2) = 0 + 6$$
$$P(2) = 6$$

que es precisamente el RESIDUO de la división de $P(x)$ entre $x - 2$. Si se desea verificar esto, se puede evaluar $P(2)$ como sigue:

$$P(2) = 4(2)^3 + (2)^2 - 30 = 32 + 4 - 30 = 6$$

6.2 EJEMPLO.- Como aplicación de la División Sintética (REGLA DE RUFFINI), calcular el Cociente y el Residuo (Resto) de dividir

a) $P(x) = 3x^3 + 5x^2 + x + 100$ entre $x + 4$

b) $P(x) = 4x^3 + 20x^2 + 11x - 35$ entre $2x + 5$

c) $P(x) = 6x^3 - 17x^2 + 17$ entre $2x - 3$

d) $P(x) = 6x^3 - 17x^2 + 15x - 6$ entre $4 - 3x$

SOLUCIÓN.- En el casillero izquierdo se coloca el valor de x que hace cero al Divisor $ax + b$, es decir: $x = -b/a$.

a) El valor de x que hace cero al Divisor $x + 4$ es $x = -4$ y se coloca en el casillero de la izquierda. El esquema de la División Sintética se encuentra a continuación:

	3	5	1	100	← DIVIDENDO
− 4		−12	28	− 116	
	3	− 7	29	− 16	← RESIDUO

$Q(x)$ ← COCIENTE

Por lo tanto $P(x) = 3x^3 + 5x^2 + x + 100 = (x + 4)(3x^2 - 7x + 29) - 16$.

b) El Algoritmo de la División Sintética se aplica a divisores de la forma: $(x - r)$, y en este caso de $2x + 5$ eso no se cumple todavia, pero con el siguiente artificio sí será posible:

$$P(x) = (2x + 5)Q(x) + R = 2(x + \tfrac{5}{2})Q(x) + R$$
$$= (x + \tfrac{5}{2})[2Q(x)] + R = (x + \tfrac{5}{2})K(x) + R$$

para un 'nuevo' Cociente $K(x) = 2Q(x) \quad \Rightarrow \quad Q(x) = \frac{1}{2}K(x)$

Ahora aplicamos el Algoritmo a $P(x)$ con $-5/2$ en el casillero izquierdo, y obtendremos otro 'Cociente' $K(x)$ al cual dividiremos entre 2 para obtener el COCIENTE $Q(x)$. En cambio, el RESIDUO permanece ***inalterable***:

$$P(x) = 4x^3 + 20x^2 + 11x - 35$$

	4	20	11	− 35
− 5/2		− 10	− 25	35
	4	10	− 14	0 ← RESIDUO (o RESTO)

$K(x)$

Luego, $4x^3 + 20x^2 + 11x - 35 = (x + \frac{5}{2})(4x^2 + 10x - 14) + 0$

$$= (2x + 5)(2x^2 + 5x - 7)$$

Asi, $Q(x) = 2x^2 + 5x - 7$, y el residuo $R = 0$.

c) Dividiendo $P(x) = 6x^3 - 17x^2 + 17$ entre $2x - 3$, el valor de x que hace cero al Divisor $2x - 3$ es $x = 3/2$ el cual va al casillero de la izquierda:

	6	− 17	0	17
+ 3/2		9	− 12	− 18
	6	− 8	− 12	− 1

← RESIDUO

Luego, $6x^3 - 17x^2 + 17 = (x - \frac{3}{2})(6x^2 - 8x - 12) - 1$

$= (2x - 3)(3x^2 - 4x - 6) - 1$

Por lo tanto, el Cociente es $Q(x) = 3x^2 - 4x - 6$, y el Residuo es -1.

d) División de $P(x) = 6x^3 - 17x^2 + 15x - 6$ entre $4 - 3x$:
El valor de x que hace cero al Divisor $4 - 3x$ es $x = 4/3$ que se coloca en el casillero izquierdo

	6	− 17	15	− 6
4/3		8	− 12	4
	6	− 9	3	− 2

← RESIDUO

Entonces $6x^3 - 17x^2 + 15x - 6 = (x - \frac{4}{3})(6x^2 - 9x + 3) - 2$

$= (3x - 4)(2x^2 - 3x + 1) - 2$

$= (4 - 3x)(-2x^2 + 3x - 1) - 2$

y de la última expresión vemos que el Cociente y el Residuo buscados son:

$Q(x) = -2x^2 + 3x - 1$, $R = -2$, respectivamente.

SERIE DE EJERCICIOS

Aplicando la División Sintética halle el Cociente y el Residuo de las siguientes divisiones:

a) $x^3 + x^2 - 5x - 2$ entre $x - 2$

b) $3x^3 + 5x^2 + x - 1$ entre $x + 1$

c) $4x^3 + 5x^2 - 2x + 3$ entre $2x - 1$

d) $2y^4 - y^3 + 2y^2 - 3y - 5$ entre $y + 2$

e) $15x^3 - 41x^2 + 24x - 8$ entre $2 - 5x$

f) $x^4 + x^3 - x^2 - 2x - 2$ entre $x + \sqrt{2}$

g) $2z^4 + 3z^3 - 5z^2 - 9z - 7$ entre $z - \sqrt{3}$

h) $2w^3 + 9aw^2 + 8a^2w - 3a^3$ entre $w + 3a$.

CLAVE DE RESPUESTAS

a) $Q(x) = x^2 + 3x + 1$, $R = 0$; b) $Q(x) = 3x^2 + 2x - 1$, $R = 0$;

c) $Q(x) = 2x^2 + (7/2)x + (3/4)$, $R = 15/4$

d) $Q(y) = 2y^3 - 5y^2 + 12y - 27$, $R = 49$

e) $Q(x) = -3x^2 + 7x - 2$, $R = -4$

f) $Q(x) = x^3 + (1 - \sqrt{2})x^2 + (1 - \sqrt{2})x - \sqrt{2}$, $R = 0$

g) $Q(z) = 2z^3 + (3 + 2\sqrt{3})z^2 + (1 + 3\sqrt{3})z + \sqrt{3}$, $R = -4$

h) $Q(w) = 2w^2 + 3aw - a^2$, $R = 0$.

7. TEOREMA DEL RESIDUO Y TEOREMA DEL FACTOR

7.1 TEOREMA.- Sean $f(x)$ y $g(x)$ dos polinomios de grados m y n :

a) Si $m > n$, entonces $f(x) + g(x)$ es un polinomio de grado m .

b) Si $m = n$, entonces $f(x) + g(x)$ es un polinomio de grado m a lo más, o bien es idénticamente nulo.

Para $f(x) = -2x^5 + 4x^3 - 1$ [de grado 5]

y $g(x) = 2x^4 - x^3 + 3x^2 - 7x + 4$ [de grado 4],

$\Rightarrow$ $f(x) + g(x) = -2x^5 + 2x^4 + 3x^3 + 3x^2 - 7x + 3$ tiene GRADO = 5 .

7.2 TEOREMA.- Sean $f(x)$ y $g(x)$ dos polinomios de grados m y n, entonces el producto $f(x).g(x)$ es un polinomio de GRADO $= m + n$.

Por ejemplo, $f(x) = 2x^2 - 3x + 1$ [de grado 2]

$g(x) = 3x^5 - 5x^3 - 2x$ [de grado 5], entonces

$f(x)\,g(x) = 6x^7 - 9x^6 - 7x^5 + 15x^4 - 9x^3 + 6x^2 - 2x$, [de grado 7].

Ahora presentaremos el famoso TEOREMA DEL RESIDUO o TEOREMA DEL RESTO.

7.3 TEOREMA DEL RESIDUO (TEOREMA DEL RESTO)

Dado un polinomio $P(x)$ de grado ≥ 1 entonces el Residuo R de la división de $P(x)$ entre $(x - a)$ es igual al Valor del polinomio $P(x)$ para $x = a$. Es decir,

RESIDUO $R = P(a)$

En efecto, por el ALGORITMO DE LA DIVISIÓN de polinomios, dados el Polinomio Dividendo $P(x)$ y el Polinomio Divisor $(x - a)$, existe un polinomio Cociente $Q(x)$ y un ***Residuo*** R (constante), tales que: para todo x real, se tiene $P(x) = (x - a)\,Q(x) + R$, con R constante.

Y si en esta relación reemplazamos $x = a$ en ambos miembros, entonces

$$P(a) = (a - a)\,Q(a) + R = 0 \cdot Q(a) + R = R .$$

7.4 EJEMPLO.- Si $P(x) = 2x^2 - 4x + 5$, entonces el residuo obtenido al dividir $P(x)$ entre $(x - 3)$ es:

para $x = 3$,

RESIDUO $R = P(3) = 2(3)^2 - 4(3) + 5 = 18 - 12 + 5$

$R = 11$

lo cual se puede verificar mediante la División Sintética.

	2	−4	5
3		6	6
	2	2	11 ← RESIDUO

7.5 EJEMPLO.- El residuo de la división de $P(x) = 2x^2 - 4x + 5$ del ejemplo anterior entre $x + 2$ es:

para $x = -2$,

RESIDUO $R = P(-2) = 2(-2)^2 - 4(-2) + 5 = 8 + 8 + 5 = 21$

En efecto,

	2	−4	5
−2		−4	16
	2	−8	21 ← RESIDUO

7.6 EJERCICIO.- Halle el residuo R de la división del polinomio

$P(x) = 2x^2 - 4x + 5$ entre $2x - 3$

SOLUCIÓN.- El valor de x que hace cero a $(2x - 3)$ es $x = 3/2$, entonces el Residuo es:

$$R = P(\tfrac{3}{2}) = 2(\tfrac{3}{2})^2 - 4(\tfrac{3}{2}) + 5 = \tfrac{9}{2} - 6 + 5 = \tfrac{7}{2}$$

lo cual también puede encontrarse mediante la División Sintética.

7.7 COROLARIO.- Dado el polinomio $P(x)$ de grado $n \geq 1$, el residuo R de la división de $P(x)$ entre el polinomio $(cx + a)$, con $c \neq 0$, es

$$\text{RESIDUO} \quad R = P(-\tfrac{a}{c}) .$$

Es decir, es igual al Valor del Polinomio $P(x)$ para $x = -\frac{a}{c}$, que es el valor de x que anula al Divisor $(cx + a)$.

Por ejemplo, el residuo R de la división del Polinomio $P(x) = 15x^3 - 41x^2 + 24x - 8$ entre $(-5x + 2)$ es, para $x = 2/5$,

RESIDUO $R = 15(\frac{2}{5})^3 - 41(\frac{2}{5})^2 + 24(\frac{2}{5}) - 8 = -4$

7.8 EJERCICIO.- Sea $P(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$. Al dividir $P(x)$ tanto por $(x + 2)$ como por $(x + 3)$, el residuo que se obtiene es 0; pero al dividir $P(x)$ por $(x - 1)$ el residuo es -12.
Determine los coeficientes a, b y c.

SOLUCIÓN.- De las hipótesis y del TEOREMA DEL RESTO tenemos que:

$$\left.\begin{array}{lll} (1) & 0 = P(-2) = -8 + 4a - 2b + c \\ (2) & 0 = P(-3) = -27 + 9a - 3b + c \\ (3) & -12 = P(1) = 1 + a + b + c \end{array}\right\}$$

Resolviendo este sistema de tres ecuaciones simultáneas con tres incógnitas obtenemos: $a = 3$, $b = -4$, $c = -12$.

7.9 EJERCICIO.- Sea $P(x)$ un polinomio de Grado ≥ 2 tal que dividido separadamente por los polinomios $(x - 1)$ y $(x + 4)$ da como RESTOS 2 y -1, respectivamente. Determinar el RESTO que se obtendrá al dividir $P(x)$ entre el producto $(x - 1)(x + 4)$.

SOLUCIÓN.- Como los Residuos son 2 y -1 respectivamente, entonces por el ALGORITMO DE LA DIVISIÓN ***existen dos polinomios*** $Q_1(x)$ y $Q_2(x)$ tales que

$$P(x) = (x - 1)\,Q_1(x) + 2 \quad \Leftrightarrow \quad P(1) = 2 \qquad (\alpha)$$

$$P(x) = (x + 4)\,Q_2(x) - 1 \quad \Leftrightarrow \quad P(-4) = -1 \qquad (\beta)$$

Asimismo, al dividir $P(x)$ entre el producto $(x - 1)(x + 4)$, por el ALGORITMO DE LA DIVISIÓN se obtiene como cociente un polinomio $Q_3(x)$ y como RESIDUO un polinomio $R(x)$ de grado a lo más igual a 1: $\underline{R(x) = ax + b}$ tales que

$$P(x) = (x - 1)(x + 4)\,Q_3(x) + (ax + b) \qquad (*)$$

De (α) y (β), en $(*)$:

$$2 = P(1) = 0 + (a)(1) + b = a + b$$
$$-1 = P(-4) = 0 + (a)(-4) + b = -4a + b$$

resolviendo este sistema: $a = 3/5$, $b = 7/5$. Así, $R(x) = \frac{3}{5}x + \frac{7}{5}$.

7.10 DEFINICIÓN.- Dados dos polinomios $P(x)$ y $D(x)$ no nulos con coeficientes complejos en general, se dice que el polinomio $P(x)$ es DIVISIBLE por el polinomio $D(x)$ si existe un polinomio $Q(x)$ tal que

$$P(x) = Q(x)\,D(x), \text{ para todo } x$$

es decir, si la división de $P(x)$ entre $D(x)$ tiene como RESIDUO al polinomio IDÉNTICAMENTE CERO. En tal caso, al producto $Q(x)\,D(x)$ se le llama una FACTORIZACIÓN de $P(x)$, y tanto a $Q(x)$ como a $D(x)$ se les llama FACTORES o DIVISORES de $P(x)$.

7.11 TEOREMA.- Sean $P(x)$ y $Q(x)$ polinomios. Entonces, el polinomio $Q(x)$ es un FACTOR o DIVISOR de $P(x)$ ***si y sólo si*** el RESIDUO de la división de $P(x)$ entre $Q(x)$ es el POLINOMIO CERO.

Equivalentemente, $Q(x)$ es un FACTOR o DIVISOR de $P(x)$ ***si y solamente si existe un polinomio*** $D(x)$ tal que: $P(x) = Q(x)\,D(x)$.

Por ejemplo, el polinomio $Q(x) = x^3 - 2x^2 + 5$ es un DIVISOR o FACTOR del polinomio $P(x) = 2x^5 - x^4 - 2x^2 + 15x + 30$, pues se puede expresar $P(x)$ como $P(x) = (x^3 - 2x^2 + 5)(2x^2 - 3x + 6)$.

7.12 DEFINICIÓN.- Se llama RAÍCES de un polinomio $P(x)$ a aquellos valores $x = x_0$ que hacen CERO a $P(x)$. Es decir, a aquellos valores $x = x_0$ tales que: $P(x_0) = 0$.

También se les llama los CEROS de $P(x)$, y vienen a constituir precisamente las soluciones de la ***ecuación*** : $P(x) = 0$.

7.13 EJERCICIO.- Dados los polinomios $P(x) = x^5 - 5ax - 4b$
$Q(x) = x^2 - 2kx + k^2$.

Si $Q(x)$ es un FACTOR de $P(x)$, halle ab en términos de k.

SOLUCIÓN.- Mediante el procedimiento usual de División de Polinomios se obtiene el Residuo de la división de $P(x)$ entre $Q(x)$ de la forma:

$$\text{RESIDUO} = (5k^4 - 5a)x + 4(b - k^5)$$

pero como por hipótesis el RESIDUO debe ser *IDÉNTICAMENTE CERO* , entonces RESIDUO $= 0 = (5k^4 - 5a)x + 4(b - k^5)$, para todo x real, y por lo tanto

$$\Rightarrow \quad \begin{cases} 5k^4 - 5a = 0 \\ 4(b - k^5) = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{matrix} a = k^4 \\ b = k^5 \end{matrix} .$$

Por lo tanto, $ab = k^9$.

7.14 TEOREMA DEL FACTOR

> Un polinomio $P(x)$ tiene como FACTOR a: $(x - a)$ ***si y sólo si*** $x = a$ es una RAÍZ de $P(x)$. Es decir, ***si y sólo si*** $P(a) = 0$.

PRUEBA.- Si $(x - a)$ es un FACTOR de $P(x)$, existe un polinomio $Q(x)$ tal que, para todo x real: $P(x) = (x - a)\,Q(x)$, y en particular para $x = a$: $P(a) = (a - a)\,Q(a) = 0$.

Reciprocamente, si $P(a) = 0$, entonces por el TEOREMA DEL RESIDUO se tiene que el RESIDUO de la división de $P(x)$ por $(x - a)$ es: $R = P(a) = 0$, y por lo tanto, existe un polinomio $Q(x)$ ta que, para todo x real:

$$P(x) = (x - a)\,Q(x) + 0 \quad \Rightarrow \quad P(x) = (x - a)\,Q(x)$$

de donde resulta que $(x - a)$ es un FACTOR de $P(x)$.

7.15 EJEMPLO.- Consideremos el polinomio siguiente:

$$\begin{aligned} P(x) &= x^4 - 2x^3 + x^2 - 2x = x(x^3 - 2x^2 + x - 2) \\ &= (x - 0)(x^3 - 2x^2 + x - 2) \quad [\text{ así, } x = 0 \text{ es una raíz }] \\ &= x(x - 2)(x^2 + 1) \\ &= (x - 2)[\,x(x^2 + 1)\,] \quad \Rightarrow \quad x = 2 \text{ es otra raíz.} \end{aligned}$$

7.16 NOTA

(1) El número x_1 es una RAÍZ de un polinomio $P(x)$ de grado $n \geq 1$ ***si y sólo si existe un polinomio*** $Q(x)$ de grado $n - 1$ tal que:

$$P(x) = (x - x_1)\,Q(x) , \qquad \forall\, x \in \mathbb{R} .$$

(2) Dados m números reales distintos entre sí: $x_1 , x_2 , \ldots , x_m$. Estos números son RAÍCES del polinomio $P(x)$ de grado $n \geq m$ ***si y sólo si existe un polinomio*** $G(x)$ de grado $n - m$ tal que

$$P(x) = (x - x_1)(x - x_2)(\ \ldots\ )(x - x_m)G(x)\,.$$

7.17 DEFINICIÓN.- Sea $P(x)$ un polinomio que se puede expresar como

$$P(x) = c(x - x_1)(x - x_2)\ \ldots\ (x - x_{n-1})(x - x_n) \qquad (*)$$

donde es posible que algunos de los x_i sean iguales. Si exactamente k de los factores $(x - x_i)$ en $(*)$ son idénticos, entonces a la RAÍZ x_i se le llama RAÍZ DE MULTIPLICIDAD k . Se dice entonces que el factor $(x - x_i)$ es un FACTOR DE MULTIPLICIDAD k.

Por ejemplo, el polinomio $P(x) = x^5 - 4x^4 - x^3 + 10x^2 - 4x - 8$ puede ser escrito como

$$P(x) = (x - 2)(x - 2)(x - 2)(x + 1)(x + 1)$$
$$= (x - 2)^3 (x + 1)^2$$

de lo cual se ve que $P(x)$ tiene dos raices: $x = 2$ de multiplicidad 3 , y la raiz $x = -1$ de multiplicidad 2 .

7.18 EJERCICIO Por medio del TEOREMA DEL FACTOR pruebe que $x - 5$ es un FACTOR de $P(x) = 2x^3 - 16x^2 + 38x - 40$.

SOLUCIÓN.- Basta verificar que $P(5) = 0$. En efecto,

$$P(5) = 2(5)^3 - 16(5)^2 + 38(5) - 40 = -150 + 150 = 0\,.$$

7.19 EJERCICIO Utilizando el Teorema del Factor y la División Sintética, determinar si la ecuación dada tiene la raiz indicada:

a) $x^3 - 9x^2 + 26x - 24 = 0$, $x = 2$

b) $x^4 + 5x^3 + 4x^2 - 7x - 3 = 0$, $x = -3$

SOLUCIÓN.- Hallaremos el Residuo de las divisiones por División Sintética

a) para el divisor: $(x - 2)$

	1	− 9	26	− 24
2		2	− 14	24
	1	− 7	12	0

← RESIDUO $R = 0$

Luego, $(x - 2)$ es un factor del polinomio dado, y por lo tanto $x = 2$ es una RAÍZ de dicho polinomio.

b) para el divisor: $(x + 3)$

	1	5	4	− 7	− 3
− 3		− 3	− 6	6	3
	1	2	− 2	− 1	0

← RESIDUO $R = 0$

Luego, $x = -3$ si es una RAÍZ del polinomio dado en (b) .

7.20 EJERCICIO.- Demuestre que $(x - 3)$ es un factor del polinomio $x^3 - 2x^2 - 23x + 60$. Halle los otros factores.

SOLUCIÓN.-

	1	− 2	−23	60
3		3	3	− 60
	1	1	−20	0

← RESIDUO $R = 0$

Por lo tanto, $(x - 3)$ si es un factor del polinomio dado, y

$$x^3 - 2x^2 - 23x + 60 = (x - 3)(x^2 + x - 20) = (x - 3)(x + 5)(x - 4)$$

[por factorización simple]

7.21 EJERCICIO.- Pruebe que 2 y -4 son dos de las raices de $P(x) = x^4 + x^3 - 16x^2 - 4x + 48$. Hallar las otras.

SOLUCIÓN.- Por haber por lo menos dos raices involucradas, aplicaremos la división sintética:

	1	1	− 16	− 4	48
2		2	6	− 20	− 48
	1	3	− 10	− 24	0

← RESIDUO

En efecto, 2 es una raíz. Además, $P(x) = (x - 2)(x^3 + 3x^2 - 10x - 24)$ $(*)$

Para probar que -4 es otra raiz, probaremos que $(x + 4)$ es factor del polinomio $x^3 + 3x^2 - 10x - 24$. En efecto,

	1	3	−10	− 24
− 4		− 4	4	24
	1	− 1	− 6	0

← RESIDUO

de modo que $x^3 + 3x^2 - 10x - 24 = (x + 4)(x^2 - x - 6)$ y por tanto

$$P(x) = (x-2)(x+4)(x^2-x-6)$$
$$= (x-2)(x+4)(x-3)(x+2)$$

de donde podemos ver que las demás raíces son: $x = 3$ y $x = -2$.

7.22 EJERCICIO.- ¿Cuál es el valor de la constante k que permite que el polinomio $P(x) = 2x^3 + kx^2 - 3x - 4$ sea divisible exactamente por $(x+1)$?.

SOLUCIÓN.- El Residuo de la división por $(x+1)$ debe ser 0 por dato, entonces

$$0 = P(-1) = 2(-1)^3 + k(-1)^2 - 3(-1) - 4 = k - 3$$
$$\Rightarrow \quad k - 3 = 0 \quad \Rightarrow \quad k = 3 .$$

7.23 EJERCICIO.- Determine el valor k para que al dividir el polinomio $P(x) = x^4 + 2x^3 - 3x^2 + kx - 7$ entre $x - 2$, el residuo sea 3 .

SOLUCIÓN.- Por el Teorema del Residuo y por el dato tenemos que:

Residuo $3 = P(2) = (2)^4 + 2(2)^3 - 3(2)^2 + k(2) - 7 = 2k + 13$

$$\Rightarrow \quad 2k + 13 = 3 \quad \Rightarrow \quad k = -5 .$$

7.24 EJERCICIO.- Halle los valores de a y b que hagan que 1 y -2 sean dos soluciones de la ecuación $x^4 + ax^3 + bx - 2 = 0$.

SOLUCIÓN.- Sea $P(x) = x^4 + ax^3 + bx - 2$. Para que 1 y -2 sean soluciones de la ecuación dada en el enunciado, entonces deben ser raíces de $P(x)$. Es decir, debe cumplirse que

$$\begin{array}{lll} & P(1) = 0 & 1 + a + b - 2 = 0 \\ y & P(-2) = 0 & \Rightarrow \quad 16 - 8a - 2b - 2 = 0 \end{array}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{array}{l} a + b = 1 \\ 4a + b = 7 \end{array}$$

Resolviendo este sistema de ecuaciones obtenemos: $a = 2$, $b = -1$.

7.25 EJERCICIO.- Encuentre un polinomio $P(x)$ de grado 3 que tenga como raíces: 2 , 4 , 1 y -1 .

SOLUCIÓN.- Por el Teorema del Factor y por la DEFINICIÓN [7.12] , existe un polinomio $H(x)$ no nulo tal que ,

$$P(x) = (x-2)(x-4)(x-1)(x+1)H(x)$$

por lo tanto, $P(x)$ tiene necesariamente grado ≥ 4 ; así, se concluye que NO EXISTE NINGÚN POLINOMIO DE GRADO 3 CON DICHAS RAÍCES .

7.26 MÉTODO DE LOS COEFICIENTES INDETERMINADOS

Recordemos que

(1) Dos polinomios $P(x)$ y $Q(x)$ *SON IGUALES* ***si sus coeficientes correspondientes a términos del mismo grado son iguales.***

(2) Un polinomio es IDÉNTICAMENTE NULO *si,* luego de haber ordenado sus potencias en orden creciente (o en orden decreciente), ***sus coeficientes son todos iguales a cero*** .

7.27 PROBLEMA- Halle los valores de las constantes a y b para que el polinomio $P(x) = x^4 - 3x^3 + ax + b$ sea divisible por $x^2 - 2x + 4$.

SOLUCIÓN.- Debe existir un polinomio de grado 2 de la forma

$Q(x) = x^2 + px + q$ tal que, para todo x real:

$$P(x) = x^4 - 3x^3 + ax + b = (x^2 - 2x + 4)Q(x) =$$
$$= x^4 + (p-2)x^3 + (q - 2p + 4)x^2 + (4p - 2q)x + 4q$$

Y como los polinomios son IGUALES entonces sus coeficientes correspondientes a términos del mismo grado deben ser iguales, es decir

$$\begin{cases} -3 = p - 2 & \text{de donde} \quad p = -1 \\ 0 = q - 2p + 4 & \text{de donde} \quad q = -6 \\ a = 4p - 2q & \text{de donde} \quad a = 8 \\ b = 4q & \text{de donde} \quad b = -24 \end{cases}$$

Además, se obtuvo el cociente $Q(x) = x^2 - x - 6$.

7.28 EJERCICIO.- $P(x)$ es un polinomio entero que dividido por el producto $(x+1)(x+2)(x-3)(x-4)$ da como resto el polinomio $R(x) = 2x^3 - 5x^2 + 7$. Calcule los restos que se obtendrían al dividir separadamente $P(x)$ por los binomios $(x+1)$, $(x+2)$, $(x-3)$ y $(x-4)$.

SOLUCIÓN.- Por el Algoritmo de División existe un polinomio $Q(x)$ tal que $P(x) = (x+1)(x+2)(x-3)(x-4)Q(x) + (2x^3 - 5x^2 + 7)$ donde $R(x) = 2x^3 - 5x^2 + 7$ es el residuo de esta división. Por el Teorema del Resto, el residuo de dividir $P(x)$:

a) entre $(x+1)$ es : $P(-1) = 0 + 2(-1)^3 - 5(-1)^2 + 7 = 0$

b) entre $(x+2)$ es : $P(-2) = 0 + 2(-2)^3 - 5(-2)^2 + 7 = -29$

c) entre $(x-3)$ es : $P(3) = 0 + 2(3)^3 - 5(3)^2 + 7 = 16$

d) entre $(x-4)$ es : $P(4) = 0 + 2(4)^3 - 5(4)^2 + 7 = 55$.

7.29 EJERCICIO.- Halle un polinomio de tercer grado $P(x)$ tal que al dividirlo por $(x+1)$ da resto 1, por $(x-2)$ da resto 3, y por $(x+3)$ da resto -1. ¿Todos los polinomios así construidos, tienen las mismas raíces?

SOLUCIÓN.- Por el Algoritmo de División y el primer dato:

$$P(x) = (ax^2 + bx + c)(x+1) + 1 \quad \Rightarrow \quad P(-1) = 1$$

y por el Teorema del Resto:

$$3 = P(2) = 3(4a + 2b + c) + 1$$
$$-1 = P(-3) = -2(9a - 3b + c) + 1$$

Como hay tres incógnitas y solamente dos ecuaciones, resolveremos el sistema en términos de una las incógnitas, digamos a, como sigue:

$$\left[\begin{array}{rcl} 6b + 3c &=& 2 - 12a \\ -3b + c &=& 1 - 9a \end{array}\right] \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{rcl} c &=& -6a + (4/5) \\ b &=& a - (1/15) \end{array}$$

Así, el polinomio de tercer grado $P(x)$ buscado tiene la forma: (verificar)

$P(x) = ax^3 + (2a - \frac{1}{15})x^2 + (-5a + \frac{11}{15})x + (-6a + \frac{9}{5})$, con $a \neq 0$; sean x_1, x_2 y x_3 sus raíces; debido a la relación $x_1 + x_2 + x_3 = -(2a - \frac{1}{15})/a$, donde la suma de las tres raíces **depende** del parámetro a es que estas raíces no pueden ser las mismas para todos los polinomios $P(x)$ construidos con las condiciones del enunciado.

7.30 EJERCICIO.- El polinomio entero $P(x)$ de grado ≥ 3, al ser dividido separadamente por los binomios $(x-1)$, $(x+2)$ y $(x-4)$ da como restos -2, 1 y -1 respectivamente. Calcular el resto que se obtendrá al dividir $P(x)$ por el producto

$$(x-1)(x-2)(x-4).$$

SOLUCIÓN.- Por el Algoritmo de División existe un polinomio $Q(x)$ y un residuo $R(x) = ax^2 + bx + c$ [éste último de grado a lo más igual a 2] tales que

$$P(x) = (x-1)(x+2)(x-4)Q(x) + (ax^2 + bx + c)$$

donde, por el Teorema del Resto y los datos:

$$\left[\begin{array}{rcl} -2 = P(1) &=& 0 + a + b + c \\ 1 = P(-2) &=& 0 + 4a - 2b + c \\ -1 = P(4) &=& 0 + 16a + 4b + c \end{array}\right] \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} c = -2 - a - b \\ 3a - 3b = 3 \\ 12a + 6b = -2 \end{array}$$

y resolviendo el sistema: $a = 2/9$, $b = -7/9$, $c = -13/9$.

Por lo tanto, el residuo buscado es: $R(x) = \frac{2}{9}x^2 - \frac{7}{9}x - \frac{13}{9}$.

7.31 EJERCICIO.- Halle el polinomio de cuarto grado que al dividirlo por $(x-1)^2$ dé como residuo $2x$, y al dividirlo por $(x-2)^3$ dé como residuo $3x$.

SOLUCIÓN.- $P(x) = (ax + b)(x-2)^3 + 3x$, ... (β)

Desarrollando (β) y dividiendo $P(x)$ entre $(x-1)^2$ resulta (verificar):

$$P(x) = [ax^2 + (b - 4a)x + (3a - 4b)](x^2 - 2x + 1) +$$
$$+ [(2a + 3b + 3)x - (3a + 4b)] \leftarrow \textit{Residuo} \quad R(x) \equiv 2x \text{ (dato)}$$

y por el dato: $R(x) = (2a + 3b + 3)x - (3a + 4b) \equiv 2x$ (para todo x):

$$\left[\begin{array}{rcl} 2a + 3b + 3 &=& 2 \\ -(3a + 4b) &=& 0 \end{array}\right] \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{rcl} 2a + 3b &=& -1 \\ 3a + 4b &=& 0 \end{array}, \quad \text{y resolviendo el}$$

sistema: $a = 4$, $b = -3$, $\Rightarrow$ $P(x) = (4x - 3)(x-2)^3 + 3x$.

SERIE DE EJERCICIOS

1. Halle los valores indicados del polinomio dado por dos métodos: usando la División Sintética, y usando el Teorema del Resto.
   a) $P(x) = 2x^4 - 3x^3 + 2x^2 + x - 7$; $P(-2)$, $P(3)$
   b) $P(x) = x^5 - 4x^3 + 2x - 5$; $P(2)$, $P(-2)$
   c) $P(x) = 3x^4 + 2x^2 - 7x$; $P(3)$, $P(-2)$
   d) $P(y) = 3y^3 - 7y^2 + 5y - 2$; $P(-4)$, $P(2)$

2. Determine si el valor x dado es o no un cero (raíz) del polinomio dado.
   a) $P(x) = 6x^3 - 4x^2 + 5x - 42$; $x = 2$
   b) $P(x) = x^4 + x^2 + 27x - 9$; $x = -3$
   c) $Q(x) = x^4 - 3x^3 + x + 4$; $x = 2$
   d) $P(x) = x^5 - 6x^4 - x^3 + 2x$; $x = 3$

3. Use el cero dado para obtener los otros ceros de los polinomios indicados
   a) $x^3 + 6x^2 + 11x + 6$; un cero es -3
   b) $x^3 - 2x^2 - 9x + 18$; un cero es 2
   c) $3x^3 - 2x^2 - 11x + 10$; un cero es $5/3$
   d) $5x^3 + 28x^2 + 45x + 18$; un cero es $-3/5$

e) $x^3 + 2x^2 + 2x + 4$; un cero es -2.

4. Pruebe que $(x-1)$ y $(x+2)$ son factores del polinomio $P(x) = x^4 + 2x^3 - 7x^2 - 8x + 12$. Halle los factores restantes.
5. Halle el valor de k para el cual $3x^3 - 2x^2 + kx - 8$ sea divisible entre $(x-2)$.
6. Halle el valor de k para el cual, al dividir $4x^3 + kx^2 - 2x + 5$ entre el $(x-1)$, el residuo sea 5.
7. Halle los valores de a y b para los cuales -3 y 2 sean raíces de la ecuación: $x^4 + x^3 + ax^2 + bx + 30 = 0$.
8. Demuestre que la ecuación $P(x) = 0$ tiene la raíz 1 si la suma de los coeficientes de $P(x)$ es igual a cero.
9. Determine k tal que $x+2$ sea un factor de: $x^3 + 6x^2 + 4x + k$.
10. Determine k tal que $x+2$ sea un factor de: $x^3 + 6x^2 + k + 8$.
11. Dado que $\frac{1}{2}$ y $-\frac{1}{2}$ son raíces de $P(x) = 4x^4 + ax^3 + bx^2 + 5x - 4$ determine a y b así como las otras raíces reales, si existieran.
12. Dados los polinomios $x^4 + ax^2 - b$, $x^2 + 2x + 5$, determine a y b de modo que el primero sea divisible por el segundo.
13. Determine a, b y c de modo que $(x-3)(x+1)(x-1)$ sea un factor de: $x^5 - 2x^4 - 6x^3 + ax^2 + bx + c$.
14. Sea $P(x) = x^3 - 7x - 2k$. El conjunto de valores de k para los cuales $P(x)$ es divisible por $(x-k)$ tiene n elementos cuya suma es A. Halle el valor de $n^2 + A^2$.
15. Sea $P(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$. Al dividir $P(x)$ tanto por $x+2$ como por $x+3$ el residuo obtenido es cero; pero al dividir por $(x-1)$ el residuo es -12. Calcule $A = 14a - 4b + 2c$.
16. Cuando el polinomio $15x^4 + Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$ se divide entre el polinomio $5x^2 - x + 3$ se obtiene un cociente cuyos coeficientes van disminuyendo de uno en uno a partir del primer término de mayor grado, y un residuo igual a $2x - 9$. Halle $A + B - C + D$.
17. Pruebe que $x^5 - x^4 - 2x^3 + 2x^2 + x - 1$ es divisible por:
    a) $x^2 - 1$ b) $(x+1)^2$ c) $(x-1)^3$.
18. Un polinomio $P(x)$ de cuarto grado cuyo coeficiente del término de mayor grado es 3, es divisible por $(x^2 - 9)$ y por $(x-1)$. Si al dividir $P(x)$ entre $(x-2)$ se obtiene como residuo -50, halle el residuo de la división de $P(x)$ entre $(x+1)$.

19. Al dividir un polinomio $P(x)$ separadamente entre los binomios $(x-1)$ y $(x-2)$ se obtiene como restos 5 y 3 respectivamente. Calcule el resto que se obtendrá al dividir $P(x)$ entre el producto de los dos binomios: $(x-1)(x-2)$.
20. Al dividir el polinomio $P(x)$ por $(x-1)^2$ se obtiene como residuo $2x$, y al dividirlo por $(x-2)^3$ da como residuo $3x$. Halle el residuo de la división de $P(x)$ por $(x-1)(x-2)$.

CLAVE DE RESPUESTAS

1. (a) 55, 95 (b) -1, -9 (c) 240, 70 (d) -326, 4
2. (a) sí (b) sí (c) no (d) no ; 3. (a) -1, -2
3. (b) -3, 3 (c) 1, -2 (d) -3, -2 (e) $\pm\sqrt{2}i$
4. $(x-2)$, $(x+3)$; 5). -4 ; 6). -2 ;
7. $a = -11$, $b = -5$; 9). -8 ; 10). $k = 12$
11. $a = -20$, $b = 15$; las otras raíces son: 1 y 4.
12. $a = 6$, $b = 25$; 13). $a = 8$, $b = 5$, $c = -6$; 14). 9 ;
15. $a = 3$, $b = -4$, $c = -12$; 16). 6, cociente: $3x^2 + 2x + 1$.
18. De los datos tenemos que: $P(x) = (x^2 - 9)(x-1)(ax+b)$, donde $a = 3$ por hipótesis. Además, al dividir $P(x) = (x^2 - 9)(x-1)(3x+b)$ entre $(x-2)$ se obtiene el resto:

    Resto $= -50 = P(2) = (4-9)(2-1)(6+b) = -5(6+b)$, $b = 4$.

    Luego, $P(x) = (x^2 - 9)(x-1)(3x+4)$ y el resto de la división por $(x+1)$ es: $r = P(-1) = [(-1)^2 - 9][(-1)-1][3(-1)+4] = (-8)(-2)(1) = 16$

19. Por el ALGORITMO DE DIVISIÓN existe un polinomio cociente $Q_1(x)$ y un RESIDUO $R(x) = ax + b$, de grado a lo más 1, tales que al dividir $P(x)$ entre $(x-1)(x-2)$ resulta:

$$P(x) = (x-1)(x-2)\,Q_1(x) + (ax+b)$$

RESIDUO

Y por el TEOREMA DEL RESTO, y los datos:

$$\begin{bmatrix} 3 = P(2) = 2a + b \\ 5 = P(1) = a + b \end{bmatrix} \Rightarrow a = -2,\ b = 7$$

Así, $R(x) = -2x + 7$.

20. Por el ALGORITMO DE DIVISIÓN existen polinomios $Q_1(x)$ y $Q_2(x)$ tales que (por los datos):

$$P(x) = (x-1)^2 Q_1(x) + 2x \quad \Rightarrow \quad P(1) = 2 \qquad (\alpha)$$

$$P(x) = (x-2)^3 Q_2(x) + 3x \quad \Rightarrow \quad P(2) = 6 \qquad (\beta)$$

Asimismo, existen polinomios $Q_3(x)$ y RESIDUO $R(x) = (ax + b)$ de grado a lo más igual a 1, tales que:

$$P(x) = (x-1)(x-2)Q_3(x) + (ax + b) \qquad (*)$$

De (α) y (β) en $(*)$:

$$\left[\begin{array}{l} 2 = P(1) = 0 + (a\cdot 1 + b) = a + b \\ 6 = P(2) = 0 + (a\cdot 2 + b) = 2a + b \end{array}\right] \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} a = 4 \\ b = -2 \end{array}$$

Por lo tanto, el residuo buscado es: $R(x) = 4x - 2$.

8. NÚMERO DE RAÍCES DE UN POLINOMIO

Una ecuación cuadrática puede tener dos raíces reales, una raíz doble, o ninguna raíz real como en el caso de $P(x) = x^2 + 4$ pues la ecuación $x^2 + 4 = 0$ no tiene raíces reales; pero sí tiene dos raíces complejas: $2i$, $-2i$.

8.1 TEOREMA FUNDAMENTAL DEL ÁLGEBRA

> Todo polinomio $P(x)$ de grado $n \geq 1$ tiene por lo menos una raíz, la que puede ser ***real o compleja, en general***.

Es decir, que la ecuación $P(x) = 0$ tiene por lo menos una raíz, la cual puede ser real o compleja en general.

8.2 TEOREMA.- Todo polinomio de grado n, con $a_n \neq 0$:

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

tiene exactamente n ***raíces***, que pueden ser ***reales o complejas en general***. Es decir, toda ecuación polinómica de grado n:

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0 \quad , \quad \text{con} \quad a_n \neq 0 \ ,$$

tiene exactamente n ***raíces***, que pueden ser ***reales o complejas, en general***.

Dentro de estas n raíces pueden existir algunas que se repiten, digamos k veces; en tal caso son contadas como si fueran k raíces en este Teorema.

8.3 TEOREMA.- ***Todo polinomio con coeficientes reales puede ser escrito como una constante real multiplicada por un producto de factores lineales (grado 1) y de factores cuadráticos irreducibles, todos ellos con coeficientes reales.***

8.4 EJEMPLO.- Sabiendo que $P(x) = x^3 - 5x^2 + x - 5$ tiene a 5 como una raíz entonces por la división sintética tenemos que:

$$x^3 - 5x^2 + x - 5 = (x-5)(x^2+1)$$

donde vemos que las otras dos raíces corresponden a $x^2 + 1$, y que no son reales [son complejas: i y $-i$].

8.5 TEOREMA.- Todo polinomio $P(x)$ con coeficientes reales y de grado impar tiene por lo menos una raíz real.

8.6 TEOREMA.- Sea a y b dos números racionales tales que $\sqrt{b}$ es ***irracional***, y sea $P(x)$ un polinomio con ***COEFICIENTES RACIONALES***.

Si $a + \sqrt{b}$ es una raíz de la ecuación $P(x) = 0$, entonces $a - \sqrt{b}$ también es raíz de tal ecuación.

8.7 EJEMPLO.- Sabiendo que $1 - \sqrt{2}$ es una raíz del polinomio $P(x) = x^3 - 6x^2 + 7x + 4$

hallaremos las raíces restantes y la factorización de $P(x)$: por el Teorema 8.6, $1 + \sqrt{2}$ también es raíz de $P(x)$; por lo tanto,

$$\begin{aligned} x^3 - 6x^2 + 7x + 4 &= [\,x - (1-\sqrt{2})\,][\,x - (1+\sqrt{2})\,](x - a) \\ &= [\,(x-1)^2 - (\sqrt{2})^2\,](x-a) \\ &= (x^2 - 2x - 1)(x - a) \end{aligned}$$

Sólo falta hallar el cociente para encontrar el factor $(x - a)$

$$\begin{array}{rrrr|rrr} 1 & -6 & 7 & 4 & 1 & -2 & -1 \\ \cline{5-7} -1 & 2 & 1 & & 1 & -4 & \\ \cline{1-3} & -4 & 8 & 4 & & & \\ & 4 & -8 & -4 & & & \\ \cline{2-4} & & & 0 & & & \end{array}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{aligned} x^3 - 6x^2 + 7x + 4 &= (x^2 - 2x - 1)(x - 4) \\ &= [\,x - (1-\sqrt{2})\,][\,x - (1+\sqrt{2})\,](x-4) \end{aligned}$$

Por lo tanto, las tres raíces son: 4 , $1-\sqrt{2}$ y $1+\sqrt{2}$.

8.8 PROBLEMA.- Halle una ecuación de menor grado, con ***coeficientes racionales*** y que tenga como raíces: 1 y $1+\sqrt{5}$.

SOLUCIÓN.- En tal ecuación, si $1+\sqrt{5}$ es una raíz, también debe serlo $1-\sqrt{5}$, por lo tanto tal ecuación puede ser:

$$(x-1)[x-(1+\sqrt{5})][x-(1-\sqrt{5})]=0$$

$$\Rightarrow \quad (x-1)[(x-1)^2-(\sqrt{5})^2]=0$$

$$\Rightarrow \quad (x-1)(x^2-2x-4)=0 \quad \Rightarrow \quad x^3-3x^2-2x+4=0$$

8.9 EJERCICIO.- Halle la ecuación de menor grado, con coeficientes racionales que tenga las raíces indicadas, y el término de mayor grado con coeficiente igual a 1:

a) 2 , -3 , $2-\sqrt{3}$ b) $\sqrt{7}$, $1-\sqrt{2}$

RESPUESTA.- a) $x^4-3x^3-9x^2+25x-6=0$

b) $x^4-2x^3-8x^2+14x+7=0$.

9. REGLA DE LOS SIGNOS DE DESCARTES

Esta regla permite determinar el número máximo de raíces positivas y de raíces negativas de un polinomio con COEFICIENTES REALES

$$P(x)=a_n x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ \ldots\ +a_1 x+a_0 , \quad \text{con} \quad a_n\neq 0$$

Si este polinomio $P(x)$ tiene alguna raíz nula, ésta no es ni positiva ni negativa. Si $P(x)$ no tiene término independiente, es decir si $a_0=0$, pero tiene el término de primer grado (es decir, $a_1\neq 0$), entonces posee ***una sola raíz nula*** .

Si $a_0=0$ y $a_1=0$, pero $a_2\neq 0$, entonces $P(x)$ tiene dos raíces nulas, y así sucesivamente.

En lo que se refiere a esta sección el primer paso en la solución de la ecuación $P(x)=0$ es la separación de las raíces nulas.

Por ejemplo, en el análisis de la ecuación $3x^4-5x^3+6x^2=0$ o su equivalente $x^2(3x^2-5x+6)=0$ existen dos raíces nulas (debido al factor x^2), de modo que el análisis se reduce al de la expresión $3x^2-5x+6$ para las demás raíces.

Las raíces de la ecuación $P(-x)=0$ son obtenidas de las raíces de $P(x)=0$ cambiándoles de signo. Por ejemplo, la ecuación

$$P(x)=x^4-6x^3+3x^2+26x-24=0 \qquad (1)$$

tiene las raíces 1 , -2 , 3 y 4 ; sin embargo, la ecuación

$$P(-x)=x^4+6x^3+3x^2-26x-24=0$$

tiene las raíces -1 , 2 , -3 , -4 como se puede verificar.

Note que el polinomio $P(-x)$ difiere de $P(x)$ tan sólo en los signos de los términos de grado impar, considerándose el término independiente, si hubiera, como término de grado par (grado cero).

9.1 VARIACIONES EN SIGNO DE UN POLINOMIO

Sea $P(x)$ un polinomio con coeficientes reales y ordenados de acuerdo a los términos de potencias descendentes. Cuando dos términos sucesivos difieren en signo entonces se tiene ***UNA VARIACIÓN EN SIGNO***, o simplemente ***VARIACIÓN***.

En el caso de la ecuación (1) previa, hay tres variaciones: una de x^4 a $-6x^3$, otra de $-6x^3$ a $3x^2$, y otra de $26x$ a -24 .

En cambio $P(-x)$ tiene una sola variación de $3x^2$ a $-26x$.

Esta definición de VARIACIÓN se presenta entre dos términos consecutivos aún cuando no existan las potencias intermedias; por ejemplo, en el polinomio $x^6-7x^4+8x^3-2$ hay tres variaciones: una de x^6 a $-7x^4$, otra de $-7x^4$ a $8x^3$, y otra de $8x^3$ a -2 .

9.2 TEOREMA (REGLA DE LOS SIGNOS DE DESCARTES)

Sea $P(x)$ un polinomio con coeficientes REALES y sin raíces nulas, entonces

1° El número de raíces positivas de la ecuación $P(x)=0$ es igual al número de variaciones en signo de $P(x)$, o es menor que esta cantidad en un número par.

2° El número de raíces negativas de $P(x)=0$ es igual al número de variaciones de $P(-x)$, o es menor que esta cantidad en un número par.

9.3 NOTA.-

Debido al resultado que todo polinomio de grado n tiene ***exactamente*** n raíces, se tiene que si

n_+ = número de raíces positivas

n_- = número de raíces negativas

entonces el número n_c de raíces complejas es igual a :

$$n_c = n - (n_+ + n_-) \qquad (*)$$

9.4 EJEMPLO.- El polinomio $P(x) = x^4 - 6x^3 + 3x^2 - 26x - 24$ dado en (1) tiene tres variaciones en signo, por lo tanto tiene:

- tres raíces positivas
o - una raíz positiva

y el polinomio $P(-x)$ tiene una sola variación en signo, por lo que el polinomio $P(x)$ tiene una raíz negativa.

Podemos exhibir en una tabla las posibles combinaciones del número de raíces positivas, negativas y de raíces complejas del polinomio $P(x)$, en relación a $(*)$:

n_+	n_-	n_c	
3	1	0	(α)
1	1	2	(β)

En este caso ya vimos que $P(x)$ tiene exactamente tres raíces positivas, una raíz negativa y ninguna raíz compleja; es decir, la combinación (α) .

9.5 NOTA.- Si $P(x)$ tuviera solamente 1 variación, entonces $P(x)$ tiene exactamente una raíz positiva, ya que no se puede restar a 1 un número par en el campo de los enteros positivos.

9.6 NOTA.- Si $P(x)$ tiene un número impar de variaciones entonces tiene por lo menos una raíz positiva.

9.7 NOTA.- El polinomio $P(x)$ ***o no tiene ninguna raíz compleja o tiene un número par de ellas ya que cuando*** $P(x)$ ***tiene coeficientes reales, las raíces complejas aparecen por pares*** (***conjugados entre sí en cada par***).

9.8 EJEMPLO. Pruebe que la ecuación $4x^4 - 3x^3 - x - 10 = 0$ tiene exactamente dos raíces complejas.

SOLUCIÓN.- Sea $P(x) = 4x^4 - 3x^3 - x - 10$, entonces $P(x)$ tiene una sola variación, y $P(-x) = 4x^4 + 3x^3 + x - 10$ tiene también una sola variación; por lo tanto $P(x)$ tiene exactamente una raíz positiva y una raíz negativa; de modo que, siendo 4 el grado del polinomio $P(x)$, tiene sus dos raíces restantes complejas, una conjugada de la otra.

SERIE DE EJERCICIOS

1. Indique todas las posibilidades respecto a la naturaleza de las raíces de la ecuación siguiente, por medio de la Regla de Descartes:

   a) $2x^4 + x^2 - 2x - 3 = 0$ b) $3x^3 + 9x^2 - 7x + 4 = 0$

   b) $2x^6 + 3x^4 + 2x^2 + 9 = 0$ d) $x^6 - 1 = 0$

   e) $x^6 + 1 = 0$ f) $x^5 - 1 = 0$

   g) $x^5 + 1 = 0$ h) $x^5 - 2x^4 + 5x^3 - 7x^2 = 0$

   i) $x^9 + 4x^7 + 6x^6 - 4x^4 + 8 = 0$

   j) $x^5 + 2x^4 - 3x^3 + 8x^2 - 9x = 0$

2. Demuestre que la ecuación $3x^5 + x^4 + 2x + 8 = 0$ tiene por lo menos dos raíces complejas y por lo menos una raíz negativa, pero ninguna raíz positiva.
3. Demuestre que la ecuación $x^7 - 4x^6 + 2x^3 - 9x^2 - 6 = 0$ tiene por lo menos cuatro raíces complejas y por lo menos una raíz positiva, pero ninguna raíz negativa.
4. Demuestre que la ecuación $2x^6 + 5x^4 - 4x^2 - 8 = 0$ tiene exactamente cuatro raíces complejas.
5. Si todas las raíces de una ecuación $P(x) = 0$ son reales, demuestre que el número de raíces positivas es exactamente igual al número de variaciones de $P(x)$, y que el número de raíces negativas es exactamente igual al número de variaciones de $P(-x)$.
6. Demuestre que $P(x) = 0$ que tiene sólo términos de grado par (con término independiente no nulo) todos con el mismo signo, no tiene raíces reales.
7. Demuestre que una ecuación $P(x) = 0$ que tiene sólo términos de grado impar (con término independiente nulo) todos con el mismo signo, sus únicas raíces reales son ceros (es decir, no tiene raíces reales diferentes de cero).

CLAVE DE RESPUESTAS

1. a) $\begin{bmatrix} n_+ & n_- & n_c \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} n_+ & n_- & n_c \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

   c) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$ d) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 \end{bmatrix}$

   e) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$ f) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \end{bmatrix}$

   g) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$ h) $\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ \text{(y dos raíces nulas)} \end{bmatrix}$

   i) $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 6 \\ 0 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 8 \end{bmatrix}$ j) $\begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ \text{(y una raíz nula)} \end{bmatrix}$

10. RAÍCES RACIONALES DE UN POLINOMIO

Recordemos que dos números enteros son PRIMOS ENTRE SÍ, si los únicos divisores comunes que tienen son $+1$ y -1.

En esta Sección, $P(x)$ es un polinomio con coeficientes enteros, o con coeficientes racionales.

10.1 TEOREMA DE GAUSS Dado el polinomio $P(x)$ de grado n:

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ \ldots\ + a_1 x + a_0$$

con coeficientes enteros, $a_n \neq 0$, $a_0 \neq 0$. Si $P(x)$ tiene una raíz racional $x = \frac{p}{q}$, donde p y q son enteros primos entre sí, entonces

p *es un divisor del término independiente* a_0,

y q *es un divisor del coeficiente principal* a_n.

10.2 NOTA.- Del TEOREMA DE GAUSS se sigue que ***si un polinomio*** $P(x)$ con las condiciones allí indicadas, ***tiene raíces racionales, éstas deberán buscarse solamente entre aquellos racionales de la forma*** $\frac{p}{q}$, ***donde*** p ***es un divisor de*** a_0, y q ***es un divisor de*** a_n. Aquí, p y q son primos entre sí.

10.3 EJEMPLO.- Determine, si existen, las raíces racionales de:

$$P(x) = 8x^3 - 10x^2 - 11x - 2 \qquad [\text{grado } 3]$$

SOLUCIÓN.- De la Regla de Descartes se sigue que $P(x)$ tiene una raíz real positiva y dos raíces reales negativas, o una raíz real positiva y dos raíces complejas conjugadas. Si las tres posibles raíces reales son racionales, éstas se buscarán según la forma

$$r = \frac{p}{q} = \frac{\text{divisor de } a_0}{\text{divisor de } a_3} = \frac{\text{divisor de } -2}{\text{divisor de } 8}$$

$$= \frac{\pm 1\,,\ \pm 2}{1\,,\ 2\,,\ 4\,,\ 8}$$

es decir, r sólo podrá tomar tres valores de los siguientes valores posibles:

$$\pm 1\,,\ \pm 2\,,\ \pm\frac{1}{2}\,,\ \pm\frac{1}{4}\,,\ \pm\frac{1}{8}$$

Al probar con cada una de ellas mediante la División Sintética (Regla de Ruffini) vemos que las únicas que producen el Residuo $R = 0$ son: $2\,,\ -1/2\,,\ -1/4$.
En efecto,

	8	−10	−11	−2	← $P(x)$: BASE
2		16	12	2	
	8	6	1	0	←
−1/2		−4	−1		
	8	2	0		←
−1/4		−2			
	8	0			←

Por lo tanto, $P(x) = 8(x-2)(x+\frac{1}{2})(x+\frac{1}{4})$, o equivalentemente:

$$P(x) = (x-2)(2x+1)(4x+1)\,.$$

10.4 EJEMPLO.- Determine, si existen, las raíces racionales de

$$P(x) = x^2 - 3x + 1 \qquad [\text{grado } n = 2]$$

SOLUCIÓN.- Coeficiente principal $a_2 = 1$; $a_0 = 1$.
Si $P(x)$ tiene raíces racionales, éstas sólo pueden ser de la forma:

$$\frac{p}{q} = \frac{\text{divisores de } a_0}{\text{divisores de } a_2} = \frac{\pm 1}{1} = \pm 1$$

Verificamos las posibles raíces 1 y -1 con la Regla de Ruffini:

	1	−3	1	
1		1	−2	
	1	−2	−1	← $\neq 0$

	1	−3	1	
−1		−1	4	
	1	−4	5	← $\neq 0$

Los valores indicados en las casillas señaladas, y que son diferentes ambos de cero, determinan que 1 y -1 no son raíces de $P(x)$. Más aún, $P(x)$ ya no tiene raíces racionales, pero como es de grado 2, sus DOS raíces serán: o ambas irracionales, o ambas complejas conjugadas, de acuerdo a la Regla de Descartes.

En la Sección [12] se obtiene una fórmula para hallar exactamente estas raíces en un polinomio cuadrático, y son:

$$\frac{3+\sqrt{5}}{2} \quad \text{y} \quad \frac{3-\sqrt{5}}{2} \qquad \text{(ambas reales e irracionales } > 0)$$

10.5 EJEMPLO.- Determine las raíces racionales, si existen, del polinomio

$$P(x) = x^3 - \frac{19}{3}x^2 + 12x - \frac{10}{3}$$

SOLUCIÓN.- Para aplicar el Teorema de Gauss, los coeficientes deben ser enteros, así podemos expresar $P(x) = \frac{1}{3}(3x^3 - 19x^2 + 36x - 10)$

y es suficiente trabajar con: $3x^3 - 19x^2 + 36x - 10$; sus posibles raíces racionales serán de la forma

$$\frac{p}{q} = \frac{\pm 1\ ,\ \pm 2\ ,\ \pm 5\ ,\ \pm 10}{1\ ,\ 3}$$

Mediante la regla de Ruffini se verifica que la única raíz racional es $\frac{1}{3}$:

	3	−19	36	−10	
1/3		1	−6	10	
	3	−18	30	0	← Residuo = 0

Luego, $P(x) = \frac{1}{3}(x - \frac{1}{3})(3x^2 - 18x + 30) = (x - \frac{1}{3})(x^2 - 6x + 10)$

Las otras dos raíces se obtendrán del polinomio cuadrático $x^2 - 6x + 10$, y son: $3 + i$, $3 - i$ (ambas complejas conjugadas) , como veremos en la siguiente Sección de este Capítulo.

10.6 COROLARIO.- Si el polinomio $P(x)$ del Teorema de Gauss tiene coeficiente principal a_n igual a 1, entonces toda raíz racional es un número entero y es divisor del término independiente a_0 .
(Note que $a_0 \neq 0$ en el Teorema de Gauss) .

10.7 DEFINICIÓN.- Cuando un polinomio cualquiera $P(x)$ tiene su coeficiente principal igual a 1, se llama **POLINOMIO MÓNICO.**

10.8 PROBLEMA.- Las dimensiones de una caja rectangular son 3 cm. , 5 cm., y 7 cm. Si cada una de estas dimensiones se aumenta en la misma cantidad, su volumen se triplica. Calcule esta cantidad.

SOLUCIÓN.- Sean $a = 3$, $b = 5$, $c = 7$, $V = abc$,

$$3V = (a + x)(b + x)(c + x) , \quad x > 0$$

$$3abc = x^3 + (a + b + c)x^2 + (ab + ac + bc)x + abc .$$

Y reemplazando los valores de a , b, c , dados:

$x^3 + 15x^2 + 71x - 210 = 0 \quad \Rightarrow$ una raíz (racional) es $x = 2$.

La cantidad que se debe aumentar a cada dimensión es de 2 cm.

SERIE DE EJERCICIOS

1. Verifique que $P(x) = x^4 - 5x^2 + 6$ carece de raíces racionales.
2. Determine el polinomio mónico de grado 4 , cuyas raíces son
   -2 , -1 , 1 y 2
3. Halle todas las raíces racionales, si existen, de $P(x) =$
   a) $x^3 + 3x^2 - 4x - 12$ b) $6x^3 + 7x^2 - 11x - 2$
   c) $2x^3 - 3x^2 - 7x + 3$ d) $6x^4 + 5x^3 - 9x^2 - x + 2$
   e) $2x^4 - 3x^3 + 12x^2 - 16x + 5$ f) $3x^5 - 5x^3 + 2x$
   g) $2x^3 + 3x^2 - 9x - 5$ h) $8x^4 + 30x^3 + 29x^2 - 2x - 30$
   i) $x^6 - x^5 - 2x^3 - 4x^2$ j) $2x^3 + \frac{29}{3}x^2 - \frac{40}{3}x + 4$
4. Verifique que los siguientes polinomios carecen de raíces racionales:
   a) $x^4 + 4x^2 - x + 6$ b) $x^4 + 2x^3 - 3x^2 - 4x + 3$
   c) $2x^4 - x^3 + 4x^2 + x + 2$ d) $x^5 + 4x^4 + x^3 - 2x^2 - 8x - 2$
5. Las dimensiones de una caja rectangular son 6 cm., 8 cm. y 12 cm. Si cada una de estas dimensiones disminuye en la misma cantidad, el volumen disminuye en 441. Calcule esta cantidad.

CLAVE DE RESPUESTAS

2. $(x + 2)(x + 1)(x - 1)(x - 2) = x^4 - 5x^2 + 4$
3. a) -3 , -2 , 2 b) 1 , -2 , $-1/6$ c) $-3/2$
   d) $2/3$, $-1/2$ e) 1 f) 0 , 1 , -1 g) $-1/2$
   h) $3/4$, $-5/2$ i) 0 (de multiplicidad 2) , -1 , 2
   j) -6 , $1/2$, $2/3$; 5. Cantidad = 3 cm.

11. RELACIONES ENTRE LAS RAÍCES Y LOS COEFICIENTES

Presentaremos aquí ciertas relaciones entre las raíces y los coeficientes de un polinomio, que serán útiles al tratar de encontrar dichas raíces.

11.1 EJEMPLO.- Sea el polinomio cuadrático $P(x) = x^2 + a_1x + a_0$, (*)
cuyas raíces son x_1 y x_2 , entonces se puede expresar:

$$P(x) = (x - x_1)(x - x_2) \qquad (1)$$

$$P(x) = x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1x_2 \qquad (2)$$

De (*) y (2) obtenemos las relaciones siguientes:

$a_1 = -(x_1 + x_2) =$ ***suma de las raíces , con el signo cambiado*** ;

$a_0 = x_1 x_2 =$ ***producto de ambas raíces.***

11.2 NOTA.- Consideremos ahora el polinomio de grado tres:

$$P(x) = x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

cuyas raíces son x_1 , x_2 , x_3 , entonces se puede expresar

$$P(x) = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$$
$$= x^3 - (x_1 + x_2 + x_3)x^2 + (x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3)x - x_1x_2x_3 ,$$

de donde se obtienen las siguientes relaciones

$a_2 = -(x_1 + x_2 + x_3)$ = ***suma de las raíces, con el signo cambiado***

$a_1 = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3$ = ***suma de los dobles productos de las raíces***

$a_0 = -x_1x_2x_3$ = ***producto de las tres raíces, con signo opuesto.***

11.3 TEOREMA.- Si x_1 , x_2 , ... , x_n son las n raíces de la ecuación:

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0$$

cuyo coeficiente principal es a_n , entonces

$a_{n-1} / a_n = -(x_1 + x_2 + \ldots + x_n)$ = ***– (suma de las raíces)***

$a_{n-2} / a_n = (x_1x_2 + x_1x_3 + \ldots + x_{n-1}x_n)$

= ***(suma de los dobles productos de las raíces)***

$a_{n-3} / a_n = -(x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + \ldots + x_{n-2}x_{n-1}x_n)$

= ***– (suma de los triples productos de las raíces)***

. . . . . .

$a_0 / a_n = (-1)^n x_1x_2x_3 \ldots x_n$

= $(-1)^n$ ***(producto de las n raíces)*** .

La prueba de este Teorema consiste en desarrollar la expresión

$$P(x) = a_n(x - x_1)(x - x_2) \ldots (x - x_n)$$

11.4 NOTA.- Las relaciones del TEOREMA [11.3] sólo se cumplen cuando el coeficiente principal a_n es distinto de cero.

11.5 DEFINICIÓN.- Dada una ecuación polinómica $P(x) = 0$, se entiende por RESOLVER ESTA ECUACIÓN al proceso de hallar todas las raíces del polinomio $P(x)$.

11.6 EJEMPLO.- Resuelva la ecuación: $3x^3 + 2x^2 - 27x - 18 = 0$, si se sabe que una de sus raíces es el negativo de la otra.

SOLUCIÓN.- Sean las raíces x_1 , $-x_1$ y x_2 ; su suma es $= x_2$.

Antes de utilizar las relaciones del TEOR. 11.3, transformaremos la ecuación en otra equivalente con coeficiente principal 1:

$x^3 + \frac{2}{3}x^2 - 9x - 6 = 0$ entonces $\frac{2}{3} = -[\, x_1 + (-x_1) + x_2 \,] = -x_2$

Luego, $x_2 = -2/3$. Reduciendo la ecuación mediante la regla de Ruffini:

	3	2	– 27	–18	
– 2/3		– 2	0	18	
	3	0	– 27	0	← Residuo

$\Rightarrow \quad (x + \frac{2}{3})(3x^2 - 27) = 0 \quad \Rightarrow \quad 3(x + \frac{2}{3})(x - 3)(x + 3) = 0$

Así, las raíces de la ecuación original son: $-\frac{2}{3}$, 3 y -3 .

11.7 PROBLEMA.- Resuelva la ecuación: $x^3 - 9x^2 + kx - 24 = 0$, y halle el valor de k si las raíces, en cierto orden, están en progresión aritmética.

SOLUCIÓN.- Sean $x_1 - a$, x_1 , $x_1 + a$, las raíces. Entonces

$-9 = -[\,(x_1 - a) + x_1 + (x_1 + a)\,] = -3x_1 \quad \Rightarrow \quad \boxed{x_1 = 3}$

$-24 = -(x_1 - a)(x_1)(x_1 + a) = -x_1(x_1^2 - a^2) = -3(9 - a^2)$

de donde $a = 1$, y por lo tanto: $a = \pm 1$. Así, se obtienen las raíces: 2 , 3 y 4.

El coeficiente k se obtiene de:

$k =$ ***suma de los dobles productos de las raíces***

$= (2)(3) + (2)(4) + (3)(4) = 26$

11.8 PROBLEMA.- Si x_1 , x_2 y x_3 son las raíces de la ecuación:

$$6x^3 - 11x^2 - 3x + 2 = 0 \ , \quad \text{calcule} \quad \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} \ ,$$

sin hallar directamente las raíces.

SOLUCIÓN.- Como $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} = \frac{x_2x_3 + x_1x_3 + x_1x_2}{x_1x_2x_3}$, $\quad (\alpha)$

Y por [11.2] :

$$\begin{cases} x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = -\dfrac{1}{2} \\ (-1)^3 x_1x_2x_3 = \dfrac{1}{3} \end{cases}$$

entonces la suma en (α) resulta igual a : $\dfrac{-1/2}{-1/3} = \dfrac{3}{2}$.

(Verifique que las raíces son: 2 , $1/3$ y $-1/2$).

11.9 PROBLEMA.- Resuelva la ecuación: $x^4 - 5x^3 + 6x^2 + 4x - 8 = 0$, si se sabe que tiene una raiz triple.

SOLUCIÓN.- Aquí, el grado es $n = 4$, de las relaciones de [11.3] tenemos que si las raíces son: x_1 , x_2 , x_3 y x_4 , tales $x_1 = x_2 = x_3$,

entonces

$$a_{n-1} = a_1 = -5 = -(x_1 + x_2 + x_3 + x_4) = -(3x_1 + x_4)$$

$$a_{n-2} = a_2 = 6 = x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4$$

$$= 3x_1^2 + 3x_1x_4 \quad \text{[de la hipótesis]}$$

de donde, $3x_1 + x_4 = 5 \qquad (\alpha)$

$$x_1^2 + x_1x_4 = 2 \qquad (\beta)$$

despejando x_4 de (α) y reemplazando en (β) se obtiene:

$$2x_1^2 - 5x_1 + 2 = (2x_1 - 1)(x_1 - 2) = 0$$

$$\Rightarrow \quad x_1 = 1/2 \quad \vee \quad x_1 = 2$$

Comprobando en la ecuación original del enunciado, mediante la división sintética, resulta que debemos descartar el valor $x_1 = 1/2$, y por lo tanto la ecuación original se puede factorizar como

$$(x - 2)^3 (x + 1) = 0$$

cuyas raíces, como podemos ver son: 2 (de multiplicidad 3), y -1 como raiz simple.

11.10 PROBLEMA.- Resuelva la ecuación $2x^3 + 9x^2 + 10x + 3 = 0$, si las raíces están en la proporción $1 : 2 : 6$.

SOLUCIÓN.- Sean x_1 , x_2 , x_3 , las raíces, entonces

$$\frac{x_1}{1} = \frac{x_2}{2} = \frac{x_3}{6} \quad \Rightarrow \quad x_2 = 2x_1 \ , \ x_3 = 6x_1 \qquad (\alpha)$$

Como $-\dfrac{9}{2} = x_1 + x_2 + x_3 = x_1 + 2x_1 + 6x_1 = 9x_1$

entonces $x_1 = -1/2$, $x_2 = -1$, $x_3 = -3$

(Verifique estos resultados con la división sintética)

SERIE DE EJERCICIOS

1. Resuelva la ecuación: $3x^3 + kx^2 - 7x + 3 = 0$, y halle el valor de k si las raíces, en cierto orden, se encuentran en progresión geométrica. SUG.- Representar las raíces por : r/a , a , ar .
2. Resuelva las ecuaciones:
   a) $4x^3 - x^2 - 16x + 4 = 0$, si una raíz es el negativo de la otra.
   b) $x^3 - 10x^2 + 11x + 70 = 0$, si la suma de dos raíces es 3 .
   c) $9x^3 - 45x^2 - 52x - 12 = 0$, si una raiz es el doble de la otra.
   d) $x^3 + 2x^2 - 15x - 36 = 0$, si tiene una raíz doble.
   e) $x^3 + 2x^2 - 5x - 6 = 0$, si una raiz excede a otra en 2 unidades.
3. Resuelva la ecuación: $4x^4 + 28x^3 + 33x^2 - 56x + 16 = 0$, sabiendo que tiene dos raíces dobles.
4. Dada la ecuación: $x^3 - 7x + k = 0$, determine k para que una raíz sea el doble de la otra.
5. Determine la suma de los cuadrados de las raíces de la ecuación:

$$x^4 - 3x^3 + \frac{5}{2}x^2 - \frac{7}{2}x + \frac{1}{2} = 0$$

CLAVE DE RESPUESTAS

1. $k = -7$; raíces: $1/3$, 3 , -1 ; [$a = -3$] .
2. a) raíces: -2 , 2 , $1/4$ b) raíces: 7 , -2 , 5
   c) raíces: $-1/3$, $-2/3$, 6 d) raíces: -3 (raíz doble), 4 .
   e) raíces: 2 , -1 , -3 .
3. $(2x - 1)^2(x + 4)^2 = 0$; $x = 1/2$ (doble) , $x = -4$ (raíz doble)
4. Dos valores posibles para k : 6 y -6 .
5. $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = (x_1 + x_2 + x_3 + x_4)^2 - 2$ (suma de los dobles productos) $= 9 - 2(5/2) = 4$

12. RESOLUCIÓN DE LA ECUACIÓN DE SEGUNDO GRADO EL MÉTODO DE COMPLETAR CUADRADOS

En el Capítulo 7 haremos un estudio más detallado y completo de la ECUACIÓN DE 2º GRADO cuya forma general es:

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad , \qquad \text{con} \quad a \neq 0 \qquad (*)$$

pero en esta Sección presentaremos una técnica para su resolución, con el objetivo de tener una base sólida para el Capítulo 6 que estudia la forma de resolver INECUACIONES : ***LINEALES, CUADRÁTICAS*** y de ***GRADO SUPERIOR*** .

La resolución de una Ecuación Cuadrática $(*)$ puede realizarse ya sea por *FACTORIZACIÓN* o *COMPLETANDO CUADRADOS*, ambos métodos basados en los siguientes TEOREMAS, el primero de los cuales ya fue demostrado en el Capítulo 3 : NÚMEROS REALES.

12.1 TEOREMA .- Sean a y b en $\mathbb{R}$, entonces

$$ab = 0 \quad \Leftrightarrow \quad [\,(a = 0) \vee (b = 0)\,]$$

Como consecuencia de este Teorema tenemos el siguiente resultado

12.2 TEOREMA .- Sean a y b en $\mathbb{R}$, entonces

$$a^2 = b^2 \quad \Leftrightarrow \quad [\,a = b \;\vee\; a = -b\,]$$

PRUEBA .- $a^2 = b^2 \Leftrightarrow a^2 - b^2 = 0 \Leftrightarrow (a-b)(a+b) = 0$
$\Leftrightarrow [\,a - b = 0 \;\vee\; a + b = 0\,]$ por (12.1)
$\Leftrightarrow [\,a = b \;\vee\; a = -b\,]$ L. q.q.d.

Debido a la notación: $a = \pm b \equiv (a = b) \vee (a = -b)$, el Teorema previo también se puede enunciar como sigue.

12.2´ TEOREMA .- Sean a y b en $\mathbb{R}$, entonces

$$a^2 = b^2 \quad \Leftrightarrow \quad a = \pm b$$

12.3 EJEMPLO .- Resuelva la ecuación: $x^2 - 8x + 15 = 0$.

SOLUCIÓN.- $x^2 - 8x + 15 = 0 \Leftrightarrow (x-3)(x-5) = 0$
$\Leftrightarrow [\,x - 3 = 0 \;\vee\; x - 5 = 0\,] \Leftrightarrow x = 3 \;,\; x = 5$
Luego, el Conjunto Solución es: C.S. $= \{3, 5\}$.

12.4 MÉTODO DE COMPLETAR CUADRADOS

Cuando una expresión cuadrática $ax^2 + bx + c$ no se puede factorizar en una forma sencilla como en el EJEMPLO 12.3 entonces trataremos de conseguir el CUADRADO DE UN BINOMIO en la forma equivalente :

$$ax^2 + bx + c \quad \equiv \quad a(x \pm h)^2 \pm k \qquad (*)$$

donde h y k pueden ser inclusive positivos, negativos o cero.

De las relaciones $(x + d)^2 = x^2 + 2(d)(x) + (d)^2$
$(x - d)^2 = x^2 - 2(d)(x) + (d)^2$

vemos que en principio debe obtenerse el término $2(d)(x)$ en cualquiera de los dos casos. Por ejemplo,

$$\underline{x^2 - 8x + 15} = (x^2 - 8x\quad) + 15 = [\,x^2 - 2(4)(x)\quad] + 15$$
$$= [\,x^2 - 2(4)(x) + 4^2 - 4^2\,] + 15$$
$$= [\,x^2 - 2(4)(x) + 4^2\,] - 16 + 15 = \underline{(x-4)^2 - 1}$$

Este proceso es conocido como la COMPLETACIÓN DE CUADRADOS.

Como una regla para este proceso tenemos que

1° Al coeficiente de x , en este caso 8 , se le toma la mitad obteniéndose así el valor de d :

$$8x = 2(d)(x) \quad \Rightarrow \quad d = \frac{8}{2} = 4$$

2° Luego, se suma y resta el cuadrado d^2 , es este caso 16 , para que no se altere la expresión original.

3° Por último se establece el ***cuadrado perfecto*** *y* el ***término independiente*** t luego de realizar los cálculos correspondientes en forma adecuada. Así obtenemos:

$$x^2 - 8x + 15 = (x-4)^2 - 1$$

FORMA DIRECTA DE COMPLETAR CUADRADOS:

1° Escribir la expresión cuadrática de modo que tenga 1 como coeficiente de x^2 :

$$x^2 + bx + c \qquad o \qquad x^2 - bx + c$$

(Esto se consigue factorizando el coeficiente a en la expresión $ax^2 + bx + c$).

2° Entonces $x^2 + bx + c = (x + \frac{b}{2})^2 - (\frac{b}{2})^2 + c$

o $x^2 - bx + c = (x - \frac{b}{2})^2 - (\frac{b}{2})^2 + c$

Por ejemplo, $x^2 + 8x + 15 = (x+4)^2 - (4)^2 + 15$
$= (x+4)^2 - 1$

$x^2 - 6x - 11 = (x-3)^2 - (3)^2 - 11$

$$= (x-3)^2 - 20$$

$$3x^2 + 4x - 1 = 3[\,x^2 + \tfrac{4}{3}x\,] - 1$$

$$= 3[\,x^2 + \tfrac{4}{3}x \qquad\,] - 1$$

$$= 3[\,(x+\tfrac{2}{3})^2 - (\tfrac{2}{3})^2\,] - 1$$

$$= 3(x+\tfrac{2}{3})^2 - 3(\tfrac{2}{3})^2 - 1$$

$$= 3(x+\tfrac{2}{3})^2 - \tfrac{4}{3} - 1$$

$$3x^2 + 4x - 1 = 3(x+\tfrac{2}{3})^2 - \tfrac{7}{3}\ .$$

12.5 EJEMPLO .- Completando cuadrados, resolver: $x^2 - 8x + 15 = 0$

SOLUCIÓN .- $x^2 - 8x + 15 = [\,x^2 - 2(4)(x) + 4^2\,] - 4^2 + 15$

$= (x-4)^2 - 1 = (x-4-1)(x-4+1)$

Por lo tanto, $x^2 - 8x + 15 = (x-5)(x-3) = 0 \quad \Leftrightarrow$
$x = 5 \quad \vee \quad x = 3$, que ya conocíamos del Ejemplo [12.3] .

12.6 EJEMPLO.- Resuelva la ecuación: $x^2 - 6x - 11 = 0$

SOLUCIÓN .- $x^2 - 6x - 11 = [\,x^2 - 2(3)(x) + 3^2 - 3^2\,] - 11$

$= (x^2 - 6x + 9) - 9 - 11 = (x-3)^2 - 20$

Por lo tanto, $x^2 - 6x - 11 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x-3)^2 - 20 = 0$

$\Leftrightarrow \quad (x-3)^2 = 20 = (\sqrt{20}\,)^2 = (2\sqrt{5}\,)^2$

$\Leftrightarrow \quad (x-3) = \pm 2\sqrt{5} \quad \Leftrightarrow \quad x = 3 \pm 2\sqrt{5}$

$\Leftrightarrow \quad x \in$ C.S. $= \{3 + 2\sqrt{5}\ ,\ 3 - 2\sqrt{5}\}$

12.7 EJEMPLO.- Resuelva la ecuación: $x^2 - 5x - 36 = 0$

SOLUCIÓN.- $x^2 - 5x - 36 = [\,x^2 - 2(\tfrac{5}{2})x + (\tfrac{5}{2})^2 - (\tfrac{5}{2})^2\,] - 36$

$= (x - \tfrac{5}{2})^2 - \tfrac{25}{4} - 36 = (x - \tfrac{5}{2})^2 - \tfrac{169}{4}$

Así, $x^2 - 5x - 36 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x - \tfrac{5}{2} = \pm\sqrt{\tfrac{169}{4}} \quad \Leftrightarrow$

$x = \tfrac{5}{2} \pm \tfrac{13}{2} \quad \Leftrightarrow \quad [\ x = 9 \quad \vee \quad x = -4\ ]$

Por lo tanto, C.S. $= \{9\ ,\ -4\}$. Note que este resultado también pudo hallarse factorizando

$$x^2 - 5x - 36 = (x-9)(x+4)$$

12.8 EJEMPLO .- Resuelva la ecuación: $3x^2 + 4x - 1 = 0$.

SOLUCIÓN .-

$3x^2 + 4x = 1 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 + \tfrac{4}{3}x + * = \tfrac{1}{3} + *$

$\Leftrightarrow \quad x^2 + 2(\tfrac{2}{3})x + \tfrac{4}{9} = \tfrac{1}{3} + \tfrac{4}{9} = \tfrac{7}{9}$

$\Leftrightarrow \quad (x+\tfrac{2}{3})^2 = \tfrac{7}{9} \quad \Leftrightarrow \quad x + \tfrac{2}{3} = \pm\tfrac{\sqrt{7}}{3}$

$\Leftrightarrow \quad x = -\tfrac{2}{3} \pm \tfrac{\sqrt{7}}{3}$. Luego, C.S. $= \left\{\dfrac{-2+\sqrt{7}}{3}\ ,\ \dfrac{-2-\sqrt{7}}{3}\right\}$

12.9 EJEMPLO .- ¿Tiene raíces reales la ecuación: $x^2 + 4x + 7 = 0$?

SOLUCIÓN.- Luego de completar cuadrados obtenemos:

$(x+2)^2 = -3 = (i\sqrt{3})^2$ donde $i = \sqrt{-1}$

Pues los únicos números cuyos cuadrados son negativos son los complejos imaginarios. Luego, se obtiene:

$(x+2)^2 = (i\sqrt{3})^2 \quad \Leftrightarrow \quad x + 2 = \pm i\sqrt{3}$

$\Leftrightarrow \quad x = -2 \pm i\sqrt{3} \quad \Leftrightarrow$ C.S. $= \{-2 + i\sqrt{3}\ ,\ -2 - i\sqrt{3}\}$

Como sus dos raíces son complejas, entonces la ecuación dada ***no tiene raíces reales***. Esto quiere decir que la expresión $x^2 + 4x + 7$ *NUNCA PUEDE SER CERO* en $\mathbb{R}$.

Vea este tema en el Cap. 6: LA ECUACIÓN DE SEGUNDO GRADO, también.

12.10 EJERCICIO .- Resuelva la ecuación : $x - \dfrac{1}{x} = 0$

SOLUCIÓN $x - \dfrac{1}{x} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \dfrac{x^2 - 1}{x} = 0 \quad \Leftrightarrow$

$x^2 - 1 = 0\ ,\ x \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = \pm 1$.

Luego, el Conjunto Solución es C.S. $= \{1, -1\}$.

12.11 EJERCICIO .- Si $P(x) = ax^2 + bx + c$, con $a \neq 0$, tiene las raíces m y n, halle el valor de k para que el polinomio $Q(x)$ que tiene como únicas raíces a : $(m + k)$ y $(n + k)$, tenga como coeficiente de x al cero.

SOLUCIÓN .- Datos: Como m y n son las únicas dos raíces de $P(x)$, entonces
$P(m) = 0$ y $P(n) = 0$ $(*)$

Si definimos un polinomio $Q(x)$ como: $Q(x) = P(x - k)$, entonces

$$\begin{cases} Q(m + k) = P(m + k - k) = P(m) = 0 \text{ por } (*) \Rightarrow Q(m + k) = 0 \\ Q(n + k) = P(n + k - k) = P(n) = 0 \text{ por } (*) \Rightarrow Q(n + k) = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ $Q(x)$ tiene como únicas dos raíces a: $(m + k)$ y $(n + k)$, por ser además un polinomio también de grado 2 . Y como el coeficiente del término en x de $Q(x)$ debe ser CERO tenemos que:

$$b - 2ak = 0 \quad \Rightarrow \quad k = b/(2a)$$

12.12 EJERCICIO Si las ecuaciones $4x^2 + 8x + c = 0$, $ax^2 + 2x - 8 = 0$, tienen el mismo Conjunto Solución, y si S y P son la suma y el producto de las soluciones, respectivamente, halle $S + P$, así como el Conjunto Solución común.

SOLUCIÓN.- Sean x_1 y x_2 tales soluciones comunes, entonces

$S = x_1 + x_2 = -\frac{8}{4} = -\frac{2}{a}$ [de las dos ecuaciones dadas]

$P = x_1 x_2 = \frac{c}{4} = -\frac{8}{a}$ [de las dos ecuaciones dadas]

$\Rightarrow$ $a = 1$, $c = -32$ $\Rightarrow$ $S = -2$, $P = -8$ $(*)$

Y como la ecuación generada es: $x^2 + 2x - 8 = (x + 4)(x - 2) = 0$

$\Rightarrow$ $x_1 = -4$, $x_2 = 2$ $\Rightarrow$ C.S. $= \{-4, 2\}$

Por lo tanto $S + P = (-2) + (-8) = -10$.

12.13 EJERCICIO .- Dados los polinomios $P(x) = x^2 - 5x + m$,
$Q(x) = x^2 - 7x + 2m$,
halle el valor de m si una raíz del polinomio $Q(x)$ es el doble de una raíz del polinomio $P(x)$.

SOLUCIÓN .- Sean x y $\bar{x}$ las raíces de $Q(x)$ y $P(x)$, respectivamente , tales

que $x = 2\bar{x}$. Por hipótesis, tenemos que:

$$\begin{cases} x^2 - 7x + 2m = 0 \\ \bar{x}^2 - 5\bar{x} + m = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} 4\bar{x}^2 - 14\bar{x} + 2m = 0 \\ \bar{x}^2 - 5\bar{x} + m = 0 \end{matrix} \quad (*) \Rightarrow m = 3\bar{x}$$

Reemplazando en cualquiera de las ecuaciones de $(*)$: $\bar{x}^2 - 2\bar{x} = 0$ $\Rightarrow$
$(\bar{x} = 0 \Rightarrow m = 0) \vee (\bar{x} = 2 \Rightarrow m = 6)$. Luego, $m = 0$ ó $m = 6$.

Si $m = 0$: $P(x) = x^2 - 5x = x(x - 5)$, $Q(x) = x^2 - 7x = x(x - 7)$

Si $m = 6$: $P(x) = x^2 - 5x + 6 = (x - 2)(x - 3)$ y

$Q(x) = x^2 - 7x + 12 = (x - 4)(x - 3)$.

12.14 EJERCICIO .- Si las raíces del polinomio $P(x) = 2x^2 - 6x + c$ son reales positivos, encontrar la suma de los posibles valores enteros de c .

RESPUESTA : $\Delta \geq 0$: $36 - 8c \geq 0$ $\Rightarrow$ $c \leq 9/2$; y como la raíz menor debe ser > 0 : $x = (6 - \sqrt{36 - 8c}\,)/2 > 0$ $\Rightarrow$ $c > 0$.

Así $c \in \langle 0, 9/2] \cap \mathbb{Z} = \{1, 2, 3, 4\}$, SUMA $= 1 + 2 + 3 + 4 = 10$.

SERIE DE EJERCICIOS

1. Resuelva las siguientes ecuaciones, vía factorización:
   a) $x^2 - 11x + 28 = 0$ d) $2x^2 + x - 1 = 0$
   b) $x^2 + 4x - 45 = 0$ e) $3x^2 - 6x + 3 = 0$
   c) $x^2 - 4x - 21 = 0$ f) $3x^2 + x - 10 = 0$

2. Resuelva en $\mathbb{R}$, completando cuadrados:
   a) $x^2 - 6x + 6 = 0$ e) $5x^2 - 4x - 1 = 0$
   b) $x^2 + 5x - 5 = 0$ f) $2x^2 - 2x - 1 = 0$
   c) $x^2 + 2x - 4 = 0$ g) $16x^2 + 24x + 5 = 0$
   d) $2x^2 - 6x - 1 = 0$ h) $x^2 + 4 = 0$
   i) $x + \frac{1}{x} = 0$

CLAVE DE RESPUESTAS

1. a) $\{4, 7\}$ b) $\{-9, 5\}$ c) $\{7, -3\}$
   d) $\{\frac{1}{2}, -1\}$ e) $\{1\}$ f) $\{\frac{5}{3}, -2\}$

2. a) $x = 3 \pm \sqrt{3}$; b) $-\frac{5}{2} \pm \frac{3}{2}\sqrt{5}$; c) $-1 \pm \sqrt{5}$;

d) $\{\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{11}}{2}, \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{11}}{2}\}$; e) $\{\frac{1}{5}, -1\}$; f) $\frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{3})$;

g) $\{-\frac{5}{4}, -\frac{1}{4}\}$; h) $\varnothing$ (raíces complejas: $\pm 2i$) ; i) $\varnothing$.

13. ECUACIONES DE GRADO SUPERIOR

Resolver en $\mathbb{R}$ una ecuación polinómica de grado mayor que dos:

$$P(x) = 0$$

consiste en hallar todas sus raíces reales del polinomio $P(x)$ del primer miembro (de grado mayor que dos) . Por ejemplo, para resolver la ecuación:

$x^3 + x^2 - 2x = 0$ hallamos sus raíces:

$$x(x^2 + x - 2) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x(x+2)(x-1) = 0 \quad \Leftrightarrow$$
$$(x = 0) \vee [(x+2)(x-1) = 0] \quad \Leftrightarrow$$
$$(x = 0) \vee [x = -2 \vee x = 1] \quad \Leftrightarrow$$
$$(x = 0) \vee (x = -2) \vee (x = 1) \quad \Leftrightarrow \quad \text{C.S.} = \{0, 1, -2\}$$

13.1 EJEMPLO .- Resuelva la ecuación: $x^2 - 13 + \frac{12}{x} = 0$.

SOLUCIÓN .- Como $x \neq 0$, se tiene la ecuación equivalente:

$$\frac{x^3 - 13x + 12}{x} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^3 - 13x + 12 = 0 \quad \wedge \quad x \neq 0$$

y utilizando la División Sintética :

$$\Leftrightarrow \quad (x-1)(x+4)(x-3) = 0 \quad \wedge \quad x \neq 0$$
$$\Leftrightarrow \quad [x = 1 \vee x = -4 \vee x = 3].$$

Por lo tanto, el Conjunto Solución es: C.S. $= \{1, -4, 3\}$.

13.2 EJERCICIO.- Resolver en $\mathbb{R}$, la ecuación: $x^3 - 3x^2 + 4x - 12 = 0$

SOLUCIÓN.- Factorizando:

$$(x-3)(x^2+4) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x - 3 = 0) \vee (x^2 + 4 = 0)$$
$$\Leftrightarrow \quad (x = 3) \vee F \quad , \quad F: \text{ falso, } \varnothing$$
$$\Leftrightarrow \quad x = 3 \quad .$$

Esta es la única solución en $\mathbb{R}$, pues $x^2 + 4$ nunca se hace cero en $\mathbb{R}$; es decir, que $x^2 + 4 = 0$ no tiene soluciones reales.

SERIE DE EJERCICIOS

Resuelva los 4 primeros Ejercicios de la SERIE DE EJERCICIOS de la Sección 11.

En otras palabras, halle sus Conjuntos Solución.

CLAVE DE RESPUESTAS

1. C.S. $= \{\frac{1}{3}, 3, -1\}$; 2. a) C.S. $= \{2, -2, \frac{1}{4}\}$,

2. b) C.S. $= \{7, -2, 5\}$, c) C.S. $= \{-\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, 6\}$,

d) C.S. $= \{-3, 4\}$ e) C.S. $= \{2, -1, -3\}$

3. $\{\frac{1}{2}, -4\}$; 4. Si $k = 6$: C.S. $= \{1, 2, -3\}$, y si $k = -6$: C.S. $= \{-1, -2, 3\}$.

Ω Ω Ω Ω Ω

5

INECUACIONES

1. RELACIÓN DE ORDEN Y SUS TEOREMAS

1.1 DEFINICIONES.-

1) Un número $a \in \mathbb{R}$ se llama POSITIVO si $0 < a$.
2) Un número $a \in \mathbb{R}$ es NEGATIVO si $a < 0$.
3) La relación 'MAYOR QUE', denotada por $>$, se define como:

$$a > b \quad \Leftrightarrow \quad b < a$$

4) La relación 'MENOR o IGUAL QUE' $(\leq)$, se define por:

$$a \leq b \quad \Leftrightarrow \quad [\, a < b \ \vee \ a = b \,]$$

5) La relación 'MAYOR o IGUAL QUE' $(\geq)$, se define por:

$$a \geq b \quad \Leftrightarrow \quad [\, a > b \ \vee \ a = b \,]$$

6) La cadena de desigualdades $a < b < c$ se define como:

$$a < b < c \quad \Leftrightarrow \quad [\, a < b \ \wedge \ b < c \,]$$

7) La cadena de desigualdades $a < b \leq c$ se define como:

$$a < b \leq c \quad \Leftrightarrow \quad [\, a < b \ \wedge \ (b \leq c) \,]$$
$$\Leftrightarrow \quad [\, a < b \ \wedge \ (\, b < c \ \vee \ b = c \,) \,]$$

1.2 EJEMPLO .- Halle $A = \{ x \in \mathbb{R} \,/\ x < 6 \ \Rightarrow \ x < 2 \}$

SOLUCIÓN .- Hacemos $p: x < 6$, $q: x < 2$. Entonces,

$$p \Rightarrow q \ \equiv \ (\sim p) \vee q \ \equiv \ [\sim (x < 6)] \vee (x < 2)$$
$$\equiv \ [\sim (x \in \langle -\infty, 6 \rangle)] \vee x \in \langle -\infty, 2 \rangle$$
$$\equiv \ [x \in \complement \langle -\infty, 6 \rangle] \vee x \in \langle -\infty, 2 \rangle$$
$$\equiv \ x \in [\, 6, \infty \rangle \vee x \in \langle -\infty, 2 \rangle$$

$$\equiv \ x \in \langle -\infty, 2 \rangle \cup [\, 6, \infty \rangle$$

Por lo tanto, $A = \langle -\infty, 2 \rangle \cup [\, 6, \infty \rangle$.

1.3 TEOREMA .- Si $a < b$ y $c < d$, entonces $a + c < b + d$.

PRUEBA .- Usando los Axiomas de Orden del Sistema de los Números Reales

$$a < b \ \Rightarrow \ a + c < b + c \qquad (03)$$
$$\wedge \quad c < d \ \Rightarrow \ b + c < b + d \qquad (03)$$

y por la LEY TRANSITIVA (02) se concluye que: $a + c < b + d$.

1.4 TEOREMA .- Sean a y $b \in \mathbb{R}$, entonces

$$a < b \quad \Leftrightarrow \quad -a > -b$$

PRUEBA .- $(\Rightarrow)$

$$a < b \overset{03}{\Rightarrow} (-a) + a < (-a) + b \overset{A5}{\Rightarrow} 0 < (-a) + b \overset{03}{\Rightarrow}$$
$$\overset{03}{\Rightarrow} 0 + (-b) < [(-a) + b] + (-b)$$
$$\overset{A3}{\Rightarrow} -b < -a + [b + (-b)] \overset{A5}{\Rightarrow} -b < -a + 0$$
$$\Rightarrow -b < -a \quad (\text{por A4}) .$$

La prueba de la recíproca $(\Leftarrow)$ es análoga. (Ejercicio)

En palabras este teorema afirma que: "***Si se cambia de signo a ambos miembros de una desigualdad, ésta cambia de sentido***".

1.5 TEOREMA .- Sean a , b , c y $d \in \mathbb{R}$, entonces:

$$a < b \quad y \quad c < 0 \quad \Rightarrow \quad ac > bc .$$

PRUEBA .- Como $c < 0$ entonces $-c > 0$ por el TEOREMA [1.4] ;

luego, $a < b \overset{04}{\Rightarrow} (-c)a < (-c)b \ \Rightarrow \ -(ca) < -(cb)$

$$\overset{TE.\,1.4}{\Rightarrow} -(ac) < -(bc) \ \Rightarrow \ -(-(ac)) > -(-(bc))$$
$$\Rightarrow ac > bc$$

En palabras este teorema afirma que:

"***Si se multiplican ambos miembros de una desigualdad por un mismo número negativo, la desigualdad cambia de sentido***".

1.6 TEOREMA .- Sea $a \in \mathbb{R}$, entonces $a \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad a^2 > 0$

"El cuadrado de cualquier número real diferente de cero, es estrictamente positivo".

PRUEBA .- (1) Si $a \neq 0$ entonces $a > 0$ o $a < 0$, TRICOTOMÍA:

i) si $a > 0 \Rightarrow a \cdot a > a \cdot 0 \Rightarrow a^2 > 0$

ii) si $a < 0 \Rightarrow a \cdot a > a \cdot 0 \Rightarrow a^2 > 0$

Recíprocamente, (2) Si $a^2 > 0$; supongamos que $a = 0$, entonces

$$a \cdot a = a \cdot 0 = 0 \Rightarrow a^2 = 0$$

lo cual es una contradicción, de modo que nuestra suposición es errada, y por lo tanto, a no puede ser cero $(a \neq 0)$.

1.7 COROLARIO .- Sea $a \in \mathbb{R}$, entonces

$$a^2 \geq 0 \quad , \quad \forall\, a \in \mathbb{R}$$

1.8 TEOREMA .- Sean $a, b, c, d \in \mathbb{R}$; entonces

Si $0 \leq a < b$ y $0 \leq c < d$ entonces $ac < bd$

PRUEBA .- i) Si $c = 0$ entonces $ac = 0$, y como
$bd > 0 = ac$ entonces $ac < bd$

ii) Si $c > 0$ entonces $ac < bc$, y como
$b > 0$ entonces $bc < bd$

luego $ac < bd$ por la LEY TRANSITIVA (02).

1.9 NOTA .- Esta propiedad previa que se cumple para la multiplicación, ***no se cumple con la división, en general***. Por ejemplo,

$$\underline{4 < 6} \quad \wedge \quad \underline{1 < 2} \quad \not\Rightarrow \quad \frac{4}{1} < \frac{6}{2} \quad \text{[pues sino } 8 < 6 \text{ } \textit{falso} \text{]}$$

1.10 TEOREMA .- Dados a y $b \in \mathbb{R}$:

(1) Si a y b tienen el mismo signo entonces $ab > 0$.
(2) Si a y b tienen signos diferentes entonces $ab < 0$.

PRUEBA .-

(1) $(a > 0$ y $b > 0)$ o $(a < 0$ y $b < 0)$

1i) Si $a > 0$ y $b > 0$ entonces $a \cdot b > a \cdot 0$
$\Rightarrow ab > 0$

1ii) Si $a < 0$ y $b < 0$ entonces $a \cdot b > a \cdot 0$
$\Rightarrow ab > 0$

(2) $(a > 0$ y $b < 0)$ o $(a < 0$ y $b > 0)$. Ejercicio.

1.11 TEOREMA .- Dados a y $b \in \mathbb{R}$:

(1) Si $ab > 0$ entonces a y b tienen el mismo signo.
(2) Si $ab < 0$ entonces a y b tienen signos diferentes.

PRUEBA .- (1) Sea $ab > 0$, entonces si suponemos que a y b tienen signos diferentes, entonces $ab < 0$ (por el Teorema 1.10), lo cual sería una contradicción. Por lo tanto a y b tienen el mismo signo.

(2) Análogo a (1). (Ejercicio).

Resumiendo estos dos teoremas previos obtenemos la siguiente REGLA DE LOS SIGNOS.

2. LA REGLA DE LOS SIGNOS

2.1 TEOREMA (REGLA DE LOS SIGNOS).-

$ab > 0 \Leftrightarrow a$ y b tienen el mismo signo.
$ab < 0 \Leftrightarrow a$ y b tienen signos diferentes.

2.2 TEOREMA .- Si $a \neq 0$, a^{-1} tiene el mismo signo que a.

PRUEBA .- Como $1 = 1 \times 1 = 1^2 > 0$ (es decir $1 > 0$), entonces

$a \cdot a^{-1} = 1 \ (> 0) \Rightarrow a \cdot a^{-1} > 0$

$\Rightarrow a$ y a^{-1} tienen el mismo signo.

2.3 TEOREMA .- *Si a y b tienen el mismo signo, entonces*

$a < b \Leftrightarrow a^{-1} > b^{-1}$

PRUEBA .- $(\Rightarrow)$

Si a y b tienen el mismo signo entonces $ab > 0$, $\overset{[2.2]}{\Rightarrow} (ab)^{-1} > 0$

$\Rightarrow \quad a^{-1}b^{-1} > 0$. Y siendo $a < b$:

$a < b \quad \Rightarrow \quad (a^{-1}b^{-1})a < (a^{-1}b^{-1})b \qquad \ldots$ [por (04)]

$\Rightarrow \quad (a^{-1}a)b^{-1} < a^{-1}(b^{-1}b) \quad \Rightarrow \quad 1 \cdot b^{-1} < a^{-1} \cdot 1$

$\Rightarrow \quad b^{-1} < a^{-1}$

($\Leftarrow$) Análogo. (Ejercicio)

3. DESIGUALDADES LINEALES Y CUADRÁTICAS. INECUACIONES

3.1 TEOREMA I .-

> Si $a \geq 0$ y $b \geq 0$, entonces
> $a^2 > b^2 \quad \Leftrightarrow \quad a > b$

PRUEBA .-

($\Leftarrow$) Si $a > b$ y $b \geq 0$ entonces se presentan dos casos:

1) Si $b = 0$: $a > 0 = b \quad \Rightarrow \quad a^2 > 0$

$\Rightarrow \quad a^2 > b^2 = 0$

2) Si $b > 0$: entonces $a > 0$ (por transitividad) ,

$\Rightarrow \quad a \cdot a > b \cdot a > b \cdot b \quad \Rightarrow \quad a^2 > b^2$.

($\Rightarrow$) Si $a^2 > b^2$ con $b \geq 0$: se presentan dos casos:

1) Si $b = 0$: $a^2 > b^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad a \neq 0$
y como $a \geq 0$ entonces $a > 0 = b$ (TRICOTOMÍA)

2) Si $b > 0$ y $a^2 > b^2$ (> 0) entonces $a > 0$, pues
$a \geq 0$, $\Rightarrow \quad a^2 - b^2 = (a - b)(a + b) > 0 \quad \Rightarrow$
$(a + b)$ y $(a - b)$ tienen el mismo signo, y como $a + b > 0$
pues $a \geq 0$ y $b \geq 0$, entonces $a - b > 0$, y por lo tanto: $a > b$.

3.2 DEFINICIÓN.- RESOLVER UNA INECUACIÓN consiste en hallar el conjunto de todos los números reales que satisfacen dicha inecuación. Tal conjunto es llamado el CONJUNTO SOLUCIÓN C.S. de la inecuación.

3.3 EJEMPLO .- Resuelva la inecuación: $4x + 5 > 6x - 13$.

SOLUCIÓN.- La inecuación es equivalente a:

$4x + 5 - 6x - 5 > 6x - 13 - 6x - 5 \quad \Leftrightarrow \quad -2x > -18$

$\Leftrightarrow \quad 2x < 18 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{2}2x < \frac{1}{2}18 \quad \Leftrightarrow \quad x < 9 \quad \Leftrightarrow \quad x \in \langle -\infty , 9 \rangle$

Luego, el Conjunto Solución es: C.S. $= \langle -\infty , 9 \rangle$

Los siguientes dos Teoremas son fundamentales para la resolución de ***INECUACIONES CUADRÁTICAS***.

3.4 TEOREMA II .-

> Si $b \geq 0$, entonces
> $a^2 > b \quad \Leftrightarrow \quad [\, a > \sqrt{b} \quad o \quad a < -\sqrt{b} \,]$

PRUEBA .- Consideremos los dos casos: $a \geq 0$ o $a < 0$:

1) Si $a \geq 0$ entonces $a^2 > b = (\sqrt{b})^2 \underset{\text{TEO I}}{\Leftrightarrow} a > \sqrt{b}$

2) Si $a < 0$ entonces $(-a) > 0$, y

$(-a)^2 = a^2 > b = (\sqrt{b})^2 \Leftrightarrow (-a) > \sqrt{b} \Leftrightarrow a < -\sqrt{b}$

Por los Teoremas [3.1] y [1.4] , respectivamente.

NOTA. La palabra 'o' representa el conectivo de UNIÓN (lógica) '$\vee$'.

3.5 TEOREMA III .-

> Si $b > 0$, *entonces:*
> $a^2 < b \quad \Leftrightarrow \quad -\sqrt{b} < a < \sqrt{b}$

PRUEBA .- Consideremos los dos casos: $a \geq 0$ o $a < 0$,

1) Si $a \geq 0$, siendo $b > 0$, entonces $a + \sqrt{b} > 0$, y
$a^2 < b = (\sqrt{b})^2 \quad \Leftrightarrow \quad a^2 - (\sqrt{b})^2 < 0$
$\Leftrightarrow \quad (a - \sqrt{b})(a + \sqrt{b}) < 0$
$\Leftrightarrow \quad a - \sqrt{b}$ y $a + \sqrt{b}$ ***tienen signos diferentes***
$\Leftrightarrow \quad (a - \sqrt{b}) < 0$ y $(a + \sqrt{b}) > 0$, pues $a + \sqrt{b} > 0$.
$\Leftrightarrow \quad a < \sqrt{b} \ \wedge \ a > -\sqrt{b} \quad \Leftrightarrow \quad \underline{-\sqrt{b} < a < \sqrt{b}}$.

2) Si $a < 0$, siendo $b > 0$, entonces: $(-a) > 0$ y $(-a) + \sqrt{b} > 0$;
$(-a)^2 = a^2 < b = (\sqrt{b})^2 \quad \Leftrightarrow \quad (-a)^2 - (\sqrt{b})^2 < 0$
$\Leftrightarrow \quad (-a - \sqrt{b})(-a + \sqrt{b}) < 0$
$\Leftrightarrow \quad (-a - \sqrt{b})$ y $(-a + \sqrt{b})$ ***tienen signos diferentes***
$\Leftrightarrow \quad (-a - \sqrt{b}) < 0$, pues $(-a + \sqrt{b}) > 0$

$\Leftrightarrow \quad a > -\sqrt{b} \ \wedge \ \sqrt{b} > a \quad \Leftrightarrow \quad -\sqrt{b} < a < \sqrt{b}$.

3.6 NOTA .- Recuerde que: (intersección)

$$-\sqrt{b} < a < \sqrt{b} \quad \equiv \quad (-\sqrt{b} < a) \ \wedge \ (a < \sqrt{b}) \ .$$

3.7 NOTA .- Los TEOREMAS I y II se convierten en otros teoremas válidos al sustituir, donde aparezcan, los símbolos $< \ 6 \ >$, por $\leq$ ó $\geq$, respectivamente.

3.8 EJEMPLO .- Resolveremos la inecuación: $x^2 - x - 6 > 0$.

$x^2 - x - 6 > 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - x > 6 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - x + \frac{1}{4} > 6 + \frac{1}{4}$

$\Leftrightarrow \quad (x - \frac{1}{2})^2 > \frac{25}{4} \quad \Leftrightarrow \quad \left[x - \frac{1}{2} > \sqrt{\frac{25}{4}} \ \vee \ x - \frac{1}{2} < -\sqrt{\frac{25}{4}} \right]$

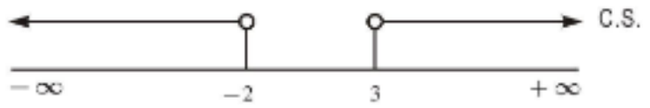
$\Leftrightarrow \quad \left[(x - \frac{1}{2} > \sqrt{\frac{25}{4}}) \ \vee \ (x - \frac{1}{2} < -\sqrt{\frac{25}{4}}) \right]$

$\Leftrightarrow \quad [\ (x > \frac{1}{2} + \frac{5}{2}) \ \vee \ (x < \frac{1}{2} - \frac{5}{2}) \ ]$

$\Leftrightarrow \quad [\ x > 3 \ \vee \ x < -2 \ ]$ (UNIÓN DE INTERVALOS)

$\Leftrightarrow \quad x \in \langle 3, \infty \rangle \ \vee \ x \in \langle -\infty, -2 \rangle$.

Por lo tanto, el Conjunto Solución es: C.S. $= \langle -\infty, -2 \rangle \cup \langle 3, \infty \rangle$



3.9 EJEMPLO .- Resuelva la inecuación: $x^2 - 9x + 18 < 0$.

SOLUCIÓN.- $x^2 - 9x + 18 < 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - 9x < -18$

$\Leftrightarrow \quad x^2 - 9x + \frac{81}{4} < -18 + \frac{81}{4} \quad \Leftrightarrow \quad (x - \frac{9}{2})^2 < \frac{9}{4}$

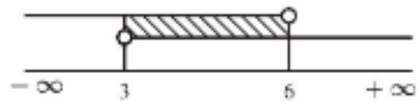
$\Leftrightarrow \quad -\sqrt{\frac{9}{4}} < x - \frac{9}{2} < \sqrt{\frac{9}{4}}$ (por el TEOREMA III [3.5])

$\Leftrightarrow \quad \frac{9}{2} - \frac{3}{2} < x < \frac{9}{2} - \frac{3}{2}$ (sumando $\frac{9}{2}$ a la cadena)

$\Leftrightarrow \quad 3 < x < 6$.

Luego, el ***Conjunto Solución es***

C.S. $= \langle 3, 6 \rangle$



3.10 EJERCICIO .- Resuelva la inecuación: $x^2 - x - 20 \geq 0$.

SOLUCIÓN.- $x^2 - x - 20 \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - x \geq 20$

$\Leftrightarrow \quad x^2 - x + \frac{1}{4} \geq 20 + \frac{1}{4} \quad \Leftrightarrow \quad (x - \frac{1}{2})^2 \geq \frac{81}{4}$

$\Leftrightarrow \quad x - \frac{1}{2} \geq \sqrt{\frac{81}{4}} \ \vee \ x - \frac{1}{2} \leq -\sqrt{\frac{81}{4}}$ (Teorema II [3.4])

$\Leftrightarrow \quad (x \geq \frac{1}{2} + \frac{9}{2}) \ \vee \ (x \leq \frac{1}{2} - \frac{9}{2}) \quad \Leftrightarrow \quad x \geq 5 \ \vee \ x \leq -4$

$\Leftrightarrow \quad x \in \langle -\infty, -4] \cup [5, \infty \rangle \ =$ C.S. Conjunto Solución.

3.11 EJERCICIO.- Resuelva las siguientes inecuaciones, indicando el Conjunto Solución (C.S.) correspondiente:

a) $x^2 \geq 0$
b) $x^2 > 0$
c) $x^2 < 0$
d) $x^2 \leq 0$
e) $(x - 3)^2 \geq 0$
f) $(x - 3)^2 > 0$
g) $(x - 4)^2 \leq 0$
h) $(x - 4)^2 < 0$
i) $x^2 + 5 \geq 0$
j) $(x + 6)^2 + 1 \geq 0$
k) $(x - 5)^2 + 4 < 0$
l) $(x + 8)^2 + 6 \leq 0$
m) $x^2 < -9$
n) $(x + 1)^2 \leq -7$

SOLUCIÓN .- Por el COROLARIO [1.7] : $z^2 \geq 0$, $\forall \ z \in \mathbb{R}$.

Si $a > 0$, entonces $z^2 + a \geq a \ (> 0)$, $\forall \ z \in \mathbb{R}$ (por 03) y por lo tanto, $z^2 + a > 0$, $\forall \ z \in \mathbb{R}$ (*)

$z^2 + a \geq 0$, $\forall \ z \in \mathbb{R}$ (**)

Luego,

a) $x^2 \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \in \mathbb{R} = \langle -\infty, \infty \rangle =$ C.S.

b) $x^2 > 0$ válido $\forall \ x \neq 0$ (TEOR. 1.6). Así, C.S. $= \mathbb{R} - \{ 0 \}$

c) $x^2 < 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \in \complement\mathbb{R} = \varnothing$. Así, C.S. $= \varnothing$; lo cual indica que esta desigualdad *NUNCA SE CUMPLE EN LOS NÚMEROS REALES.*

d) $x^2 \leq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 < 0 \ \vee \ x^2 = 0$

$\Leftrightarrow \quad x \in \varnothing \quad \vee \quad x = 0$

$\Leftrightarrow \quad x \in \varnothing \cup \{0\} = \{0\} =$ C.S. ; lo cual indica que la única solución para esta desigualdad es $x = 0$.

e) $(x-3)^2 \geq 0$ es VÁLIDO PARA TODO $x \in \mathbb{R}$ = C.S.

f) $(x-3)^2 > 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x-3) \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \neq 3 \quad \Leftrightarrow$
$x \in \mathbb{R} - \{3\}$. Luego, C.S. $= \langle -\infty, 3 \rangle \cup \langle 3, \infty \rangle$

g) $(x-4)^2 \leq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \in \{4\} =$ CONJUNTO SOLUCIÓN. Ver (d).

h) $(x-4)^2 < 0$ ***nunca se cumple en*** $\mathbb{R}$. Así que, C.S. $= \varnothing$

ii) $x^2 + 5 \geq 0$ ***se cumple*** *PARA TODO* $x \in \mathbb{R} = \langle -\infty, \infty \rangle$ = C.S.
[de $(**)$] .

j) $(x+6)^2 + 1 \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \in$ C.S. $= \mathbb{R}$ [de $(**)$] .

k) $(x-5)^2 + 4 < 0$ tiene como C.S. $= \varnothing$ [de $(**)$] .

l) $(x+8)^2 + 6 \leq 0$ tiene como C.S. $= \varnothing$ [de $(*)$]

pues (en (k) y (l)) un número positivo ***no puede ser*** $<$ ***ni*** ≤ 0 . .

m) $x^2 < -9 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 + 9 < 0$ el cual tiene como C.S. $= \varnothing$

n) $(x+1)^2 \leq -7 \quad \Leftrightarrow \quad (x+1)^2 + 7 \leq 0$ tiene C.S. $= \varnothing$

3.12 COROLARIO .-

> Si a es ***cualquier número real,*** entonces
> $x^2 + a \geq a \quad , \quad \forall\, x \in \mathbb{R} = \langle -\infty, \infty \rangle$

PRUEBA .- Por el Corolario [1.7] : $x^2 \geq 0 \quad , \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$

[y por 03] $\Leftrightarrow \quad x^2 + a \geq a \quad , \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$

3.13 EJERCICIO .- Halle el menor número real M tal que se cumpla:

$$6 + 6x - x^2 \leq M \quad , \quad \textbf{\textit{PARA TODO}} \;\; x \;\; \textbf{\textit{REAL}} .$$

SOLUCIÓN .- Completando cuadrados: $6 + 6x - x^2 = 15 - (x-3)^2$, $(*)$

Y como $(x-3)^2 \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad -(x-3)^2 \leq 0 \quad , \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow \quad 15 - (x-3)^2 \leq 15 \quad , \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$

Luego, $6 + 6x - x^2 = 15 - (x-3)^2 \leq 15 \quad , \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$.

Además, y con mayor razón se tendrá también que: ***PARA TODO*** $x \in \mathbb{R}$:

$6 + 6x - x^2 = 15 - (x-3)^2 \leq 15{,}1$ (y que $15{,}2$, 16 , 16.5 , 18 , 28 , etc.)

pero ***EL MENOR DE TODOS ESTOS NÚMEROS*** (de la derecha) que satisfacen la desigualdad dada ***PARA TODO*** x ***REAL*** es : $\underline{M = 15}$.

3.14 EJERCICIO .- Halle el mayor número real m tal que se cumpla:

$$m \leq x^2 - 4x + 41 \;, \quad \textit{PARA TODO} \;\; x \;\; \textit{REAL} .$$

SOLUCIÓN .- $x^2 - 4x + 41 = (x-2)^2 + 37 \geq 37$, *PARA TODO* x *REAL*, y por supuesto que la expresión dada también será, con mayor razón, mayor que 35, 26 , 20 , 12 , etc. ; pero ***EL MAYOR DE TODOS ESTOS NÚMEROS*** m es $\underline{m = 37}$.

3.15 PROBLEMA .- Demuestre que si $x > 0$, $y > 0$, entonces

a) $xy = 1 \quad \Rightarrow \quad x + y \geq 2$

b) $(xy = 1 \quad \wedge \quad x + y = 2) \quad \Leftrightarrow \quad x = y = 1$

SOLUCIÓN. a) $(\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 \geq 0 \quad \Rightarrow \quad x + y \geq 2\sqrt{xy}$

[y como por dato: $xy = 1$] $\quad \Rightarrow \quad x + y \geq 2$.

b) $(\Rightarrow) \qquad x + y = 2 \quad \Rightarrow \quad x + \frac{1}{x} = 2$, pues $xy = 1$

$\Rightarrow \quad x^2 + 1 = 2x \quad \Rightarrow \quad (x-1)^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 1 = y$

$(\Leftarrow)$ Obvio.

3.16 PROBLEMA .- Si $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$, demuestre que

a) $xyz = 1 \quad \Rightarrow \quad x + y + z \geq 3$

b) $(xyz = 1 \quad \wedge \quad x + y + z = 3) \quad \Leftrightarrow \quad x = y = z = 1$

SOLUCIÓN.- Utilizaremos los resultados del Problema [3.15] $(*)$

a) a1) Si al menos uno de ellos es 1, por ejemplo $z = 1$, entonces

$xyz = 1 \quad \Rightarrow \quad xy = 1 \quad \Rightarrow \quad x + y \geq 2$ de $(*)$,

$\Rightarrow \quad x + y + z \geq 2 + 1 = 3$

a2) Si todos son diferentes de 1, entonces existe uno que es mayor que 1 y otro que es menor que 1. Sean

$x < 1$, $y > 1$, $w = xy > 0$, entonces

$(y-1)(x-1) < 0$ lo que implica que $x + y - xy > 1$ $(*)$

además, $wz \;(= xyz) = 1 \quad \Rightarrow \quad w + z > 2$ $(**)$

[ya que $w + z = 2$ implicaría que $w = z = 1$, absurdo]

Luego, $x + y + z = (w + z) + x + y - w$

$= (w + z) + x + y - xy > 2 + 1 = 3$

debido a $(**)$ y $(*)$. Así, $x + y + z > 3$.

b) $(\Rightarrow)$ b1) Si al menos uno de ellos es 1, el problema anterior implica que todos son iguales a 1.

b2) Si todos son diferentes de 1, entonces por [a2]:
$x + y + z > 3$ que contradice al dato $x + y + z = 3$
Por lo tanto, al menos uno de ellos es 1, con lo cual estamos en el caso [b1].

$(\Leftarrow)$ Obvio.

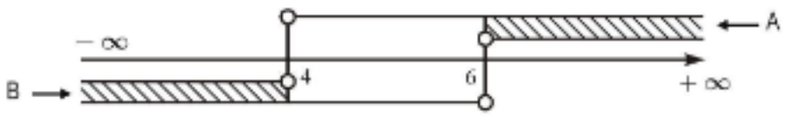
4. REGLA GRÁFICA DE LOS SIGNOS PARA RESOLVER INECUACIONES

Cuando se tiene una inecuación de la forma $(x-4)(x-6) > 0$ entonces, según la REGLA DE LOS SIGNOS [TEOR. (1.10 (1))], se resuelve como sigue:

$$(x-4)(x-6) > 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} [\,(x-4) > 0 \quad \wedge \quad (x-6) > 0\,] & (\alpha) \\ \vee \; [\,(x-4) < 0 \quad \wedge \quad (x-6) < 0\,] & (\beta) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{[(x > 4) \quad \wedge \quad (x > 6)]}_{\mathbf{A}} \quad \vee \quad \underbrace{[(x < 4) \quad \wedge \quad (x < 6)]}_{\mathbf{B}}$$



$$\Leftrightarrow \quad x \in \langle -\infty, 4\rangle \cup \langle 6, \infty\rangle = \text{C. S.} \qquad (*)$$

Notamos que si el producto de los factores lineales (de primer grado) hubiera consistido de tres o más factores, habrían aparecido mayor número de condiciones y posibilidades para encontrar la solución de la inecuación, y habría sido más difícil de seguir la secuencia de cálculos parciales.
Para evitar esta situación engorrosa, presentaremos a continuación una REGLA GRÁFICA que es un método equivalente, enfocado geométricamente, pero más práctico.

4.1 REGLA GRÁFICA DE LOS SIGNOS.-

1° Se hallan las raíces de cada factor lineal y se les ordena en una recta real en forma creciente, en este caso 4 y 6; estos valores reciben el nombre de VALORES CRÍTICOS o PUNTOS CRÍTICOS.

2° Se trazan rectas horizontales, una para cada factor lineal (en las que se indicarán los signos del factor correspondiente, por zonas) y una última (recta horizontal) para el producto de todos los factores lineales.

3° Se trazan segmentos verticales, uno para cada VALOR CRÍTICO, de modo que corten a todas las rectas horizontales:

×	x	④	x	⑥	x	
	− − − − − − −		+ + + + + + +		+ + + + + + +	$(x-4)$
	− − − − − − −		− − − − − − −		+ + + + + + +	$(x-6)$
	+ + + + + + +		− − − − − − −		+ + + + + + +	$(x-4)(x-6)$

4° Para cada factor $(x-a)$, a la derecha del valor crítico a se colocan los signos $+$, pues para $x > a$ se tiene: $(x-a) > 0$ [valores positivos de $(x-a)$]; a la izquierda de este valor crítico se colocan los signos $(-)$, o sea los signos negativos, lo que dará los valores de x para los que $(x-a)$ resulta negativo.

5° Luego, simplemente se multiplican los signos ***verticalmente***, y los resultados se colocan en la última recta horizontal correspondiente al producto de todos los factores lineales.

×	3	④	5	⑥	7	
	− − − − − − −		+ + + + + +		+ + + + + −	$(x-4)$
	− − − − − − −		− − − − − − −		+ + + + + −	$(x-6)$
	+ + + + + +		− − − − − − −		+ + + + + −	$(x-4)(x-6)$

Por último y dependiendo del sentido de la desigualdad de la inecuación, se eligen los intervalos que conformarán el CONJUNTO SOLUCIÓN:

se eligen los signos $(+)$

$$(x-4)(x-6) > 0 \quad \underset{(+)}{\Leftrightarrow} \quad x \in \langle -\infty, 4\rangle \cup \langle 6, \infty\rangle = \text{C.S.}$$

lo cual coincide exactamente con la Solución $(*)$.

NOTA .- En el caso de la inecuación: $(x-4)(x-6) \geq 0$, el CONJUNTO SOLUCIÓN incluye a los dos valores críticos $x = 4$, $x = 6$:

$$(x-4)(x-6) \geq 0 \quad \overset{(+)}{\Leftrightarrow} \quad x \in \langle -\infty, 4\,] \cup [\,6, \infty\rangle = \text{C.S.}$$

NOTA .- Resolveremos las siguientes inecuaciones utilizando el mismo gráfico anterior:

$$(x-4)(x-6) < 0 \quad \overset{(-)}{\Leftrightarrow} \quad x \in \langle 4, 6\rangle = \text{C.S.}$$

$$(x-4)(x-6) \leq 0 \quad \overset{(-)}{\Leftrightarrow} \quad x \in [4\,,\,6] = \text{C.S.}$$

4.2 OBSERVACIÓN.- Los factores lineales siempre deben escribirse en la forma:
$(x \pm a)$ o $(cx \pm a)$ con $c > 0$.

En el caso del factor lineal $cx + a$ la raiz es $x = -a/c$, y en el caso de $cx - a$ la raiz es $x = a/c$.

Esta REGLA GRÁFICA está basada en la multiplicación de Signos:

$$(+) \times (+) = (+)\,, \qquad (+) \times (-) = (-)\,, \qquad (-) \times (-) = (+)\,.$$

4.3 EJEMPLO .- Resuelva la inecuación: $3x^2 + 14x - 5 \geq 0$.

SOLUCIÓN.- $3x^2 + 14x - 5 = (3x-1)(x+5) \geq 0$

Vemos que los valores críticos son -5 y $1/3$ escritos en orden creciente:

×	-5		$1/3$	
	− − − − −	− − − − −	+ + + + +	$(3x-1)$
	− − − − −	+ + + + +	+ + + + +	$(x+5)$
	+ + + + +	− − − − −	+ + + + +	$(3x-1)(x+5)$

En el caso de nuestra inecuación particular elegimos los signos $(+)$, obteniendo

$$(3x-1)(x+5) \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \in \langle -\infty\,,-5] \cup [\tfrac{1}{3}\,,\infty\rangle\,.$$

4.4 EJERCICIO .- Resuelva: $x^3 - 3x^2 - 10x + 24 < 0$.

SOLUCIÓN.- Factorizando, $(x-2)(x-4)(x+3) < 0$ $(*)$

Los valores críticos son las raíces: -3 , 2 , y 4 . Pasamos al esquema gráfico:

×	-3		2		4	
	− − −		− − −	+ + +	+ + +	$(x-2)$
	− − −		− − −	− − −	+ + +	$(x-4)$
	− − −	+ + +	+ + +	+ + +	+ + +	$(x+3)$
	− − −	+ + +	− − −	+ + +	+ + +	$(x-2)(x-4)(x+3)$

Por lo tanto, debido a la forma $(*)$, elegimos los valores correspondientes a los signos $(-)$, de modo que el CONJUNTO SOLUCIÓN es:

$$x \in \langle -\infty\,,-3\rangle \cup \langle 2\,,4\rangle = \text{C.S.}$$

Note que los signos siempre se van alternando de derecha a izquierda en la última fila de la gráfica, donde más a la derecha SIEMPRE VA EL SIGNO $'+'$.

4.5 NOTA .- Debido a que el resultado de DIVIDIR SIGNOS es el mismo que el de MULTIPLICAR SIGNOS, ***esta misma REGLA se utiliza también para*** *COCIENTES,* ***y para combinaciones de*** *PRODUCTOS Y COCIENTES*, teniendo cuidado de ***no incluir*** en el CONJUNTO SOLUCIÓN ***aquellos valores criticos que hagan cero al denominador en ningún caso.***

Recuerde que la división entre cero no está definida.

Por ejemplo, resolveremos: $\dfrac{x^2 - 5x + 6}{x^2 + x - 42} \geq 0$

para lo cual previamente factorizamos: $\dfrac{(x-3)(x-2)}{(x+7)(x-6)} \geq 0$

siendo los valores críticos las raices -7 , 2 , 3 y 6 .

Obtenemos el CONJUNTO SOLUCIÓN directamente del esquema de signos siguiente

×	-7	2	3	6	
	− − −	− − −	− − −	+ + +	+ + +	$\leftarrow (x-3)$
	− − −	− − −	+ + +	+ + +	+ + +	$\leftarrow (x-2)$
	− − −	+ + +	+ + +	+ + +	+ + +	$\leftarrow (x+7)$
	− − −	− − −	− − −	− − −	+ + +	$\leftarrow (x-6)$
	+ + +	− − −	+ + +	− − −	+ + +	$\leftarrow \dfrac{(x-3)(x-2)}{(x+7)(x-6)}$

Por lo tanto,

$$\frac{(x-3)(x-2)}{(x+7)(x-6)} \geq 0 \quad \overset{(+)}{\Leftrightarrow} \quad x \in \langle -\infty\,,-7\rangle \cup [2\,,3] \cup \langle 6\,,\infty\rangle = \text{C.S.}$$

Note que en la Solución no hemos incluido a: $x = 6$ ni a $x = -7$, pues ambos valores anulan al denominador.

4.6 EJERCICIO.- Resuelva: $\dfrac{x(5-x)}{x+7} \leq 0$ $(*)$

SOLUCIÓN.- El factor $(5-x)$ debe ser transformado a la forma normal $(x-5)$ para poder aplicar directamente la REGLA DE LOS SIGNOS; para lo cual cambiamos de signo ambos miembros de $(*)$, y la desigualdad cambiará de sentido: $-\dfrac{x(5-x)}{x+7} \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \dfrac{x(x-5)}{x+7} \geq 0$

siendo los factores: x , $x-5$ y $x+7$, entonces sus valores críticos son sus raices: 0 , 5 y -7 . ***Verifique que el CONJUNTO SOLUCIÓN es***

$$\text{C.S.} = \langle -7 , 0] \cup [5 , \infty \rangle$$

de donde se ha excluido al valor $x = -7$ por anular al denominador.

5. MÉTODO DE LOS PUNTOS CRÍTICOS PARA RESOLVER INECUACIONES

El método que ahora presentaremos es mucho más práctico que la REGLA GRÁFICA DE LOS SIGNOS, y es útil para resolver inecuaciones que involucran productos y cocientes, y que luego de reducirla mediante factorizaciones toma una de las formas ***equivalentes*** siguientes:

I) : $(x \pm a_1)(x \pm a_2) \ \ldots \ (x \pm a_n) > 0 \ , \ \geq 0 \ , \ < 0 \ , \ \leq 0 \ ,$

donde todos los a_i son diferentes entre si .

II) : $\dfrac{(x \pm a_1)(x \pm a_2) \ \ldots \ (x \pm a_n)}{(x \pm b_1)(x \pm b_2) \ \ldots \ (x \pm b_m)} > 0 \ , \geq 0 \ , < 0 \ , \leq 0 \ ,$

donde los a_i y los b_i son todos diferentes entre sí.

5.1 NOTA .- El método que enunciaremos en [5.2] permite también que en lugar de los factores $(x \pm a)$ puedan estar factores de la forma: $(cx \pm a)$ PERO CON $c > 0$, así como en lugar de los factores $(x \pm b)$.

5.2 MÉTODO DE LOS PUNTOS CRÍTICOS

1° SE HALLAN TODOS LOS VALORES CRÍTICOS (raíces) de cada factor $(x \pm a)$ y de cada factor $(x \pm b)$, ordenándolos en forma creciente.

2° Se coloca ***entre estos VALORES CRÍTICOS*** los signos $(+)$ y $(-)$ ALTERNADAMENTE DE DERECHA A IZQUIERDA, es decir, comenzando de la derecha del mayor valor crítico y *SIEMPRE CON EL SIGNO* $(+)$ *AQUÍ*.

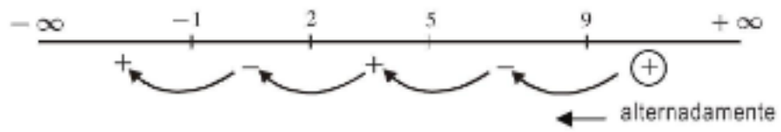
3° Ello indicará que la expresión original del problema será:
> 0 (positiva) en todos los INTERVALOS ABIERTOS donde el signo $(+)$ aparezca.

< 0 (negativa) en todos los INTERVALOS ABIERTOS donde aparezca el signo $(-)$.

4° Si la inecuación corresponde a: ≥ 0 *o* ≤ 0 , entonces los Intervalos Abiertos determinados en el paso anterior (3°) ***SE CIERRAN*** , pero SOLAMENTE para aquellos valores críticos que no hagan cero al denominador.

POR EJEMPLO, consideremos la expresión: $\dfrac{(x-5)(x-2)}{(x+1)(x-9)}$, $(*)$

sus puntos (valores) críticos son: $-1 , 2 , 5 , 9$ [en orden creciente]. Trazamos el esquema:



de donde, viendo los signos adecuados, la expresión dada $(*)$ será:

a) $> 0 \ , \ \forall \ x \in \langle -\infty , -1 \rangle \cup \langle 2 , 5 \rangle \cup \langle 9 , \infty \rangle =$ C.S.

b) $\geq 0 \ , \ \forall \ x \in \langle -\infty , -1 \rangle \cup [2 , 5] \cup \langle 9 , \infty \rangle =$ C.S. ¿Por qué?

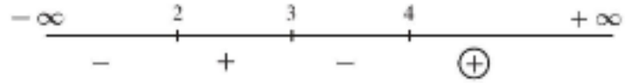
c) $< 0 \ , \ \forall \ x \in \langle -1 , 2 \rangle \cup \langle 5 , 9 \rangle =$ C.S.

d) $\leq 0 \ , \ \forall \ x \in \langle -1 , 2] \cup [5 , 9 \rangle =$ C.S.

5.3 EJERCICIO.- Resuelva la inecuación: $x^3 - 9x^2 + 26x - 24 < 0$.

SOLUCIÓN.- Factorizando: $(x-2)(x-3)(x-4) < 0 \qquad (*)$

cuyos puntos críticos son : $2 , 3 , 4$. Pasamos al esquema:



Debido a la desigualdad $(*)$, elegimos los signos $(-)$, y por lo tanto:

CONJUNTO SOLUCIÓN: $x \in \langle -\infty , 2 \rangle \cup \langle 3 , 4 \rangle =$ C.S.

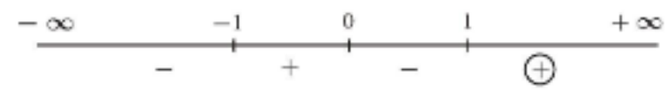
5.4 PROBLEMA .- Resuelva la inecuación: $x \geq \dfrac{1}{x}$.

SOLUCIÓN.- Pasando todo a uno de los miembros:

$$x \geq \frac{1}{x} \quad \Leftrightarrow \quad x - \frac{1}{x} \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x^2 - 1}{x} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{(x+1)(x-1)}{x} \geq 0 \qquad \text{[factorizando]}$$

siendo sus VALORES CRÍTICOS: $-1 , 0 , 1$



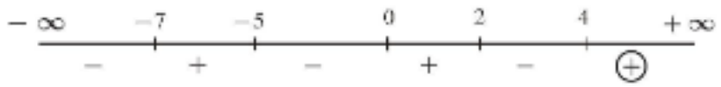
$\Leftrightarrow$ CONJUNTO SOLUCIÓN: $x \in [-1 , 0 \rangle \cup [1 , \infty \rangle =$ C.S.

5.5 EJERCICIO.- Resuelva: $\dfrac{-x^3+x^2+22x-40}{x(x+7)} \geq 0 \qquad (*)$

SOLUCIÓN.- Multiplicando por (-1) ambos miembros de $(*)$ cambia el sentido de la desigualdad, $\dfrac{x^3-x^2-22x+40}{x(x+7)} \leq 0$

y factorizando el numerador : $\dfrac{(x-2)(x-4)(x+5)}{x(x+7)} \leq 0 \qquad (*)$

Así, tenemos los Valores Críticos: $-7\ ,\ -5\ ,\ 0\ ,\ 2\ ,\ 4$



$\Leftrightarrow \quad x \in \langle -\infty, -7\rangle \cup [-5, 0\rangle \cup [2, 4] = \text{C.S.}$

5.6 PROBLEMA.- Resuelva:

a) $\dfrac{(x-2)(x-4)^2}{(x+3)(x-7)} < 0$

b) $\dfrac{(x-1)(x-3)}{(x-4)^2(x+5)} \geq 0$

SOLUCIÓN.-

a) Como $(x-4)^2 > 0\ ,\ \forall\ x \neq 4\ ,$ entonces

$$\frac{(x-2)(x-4)^2}{(x+3)(x-7)} < 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{(x-2)}{(x+3)(x-7)} < 0 \quad \wedge \quad x \neq 4$$

Valores Críticos: $-3 \quad 2 \quad 7$

$$- \quad + \quad - \quad \oplus$$

$\Leftrightarrow \quad x \in (\langle -\infty, -3\rangle \cup \langle 2, 7\rangle) - \{4\} = \text{C.S.}$

b) Como $(x-4)^2 \geq 0\ ,\ \forall\ x \in \mathbb{R}\ ,$ pero por estar en el denominador entonces debe considerarse $x \neq 4\ ,$ de modo que

$$\frac{(x-1)(x-3)}{(x-4)^2(x+5)} \geq 0 \Leftrightarrow \left[\frac{(x-1)(x-3)}{(x+5)} \geq 0 \quad \wedge \quad x \neq 4\right]$$

Valores Críticos: $-5 \quad 1 \quad 3$

$$- \quad + \quad - \quad \oplus$$

$\Leftrightarrow \quad x \in (\langle -5, 1] \cup [3, \infty\rangle) - \{4\}$

$\Leftrightarrow \quad \text{C.S.} \ \langle -5, 1] \cup [3, 4\rangle \cup \langle 4, \infty\rangle$

Este problema [5.6] es uno de los casos especiales en el que ALGÚN FACTOR SE REPITE UN NÚMERO PAR DE VECES, y que está contemplado dentro del siguiente TEOREMA , el cual resulta muy útil en estos casos.

5.7 TEOREMA.- Sea $n \in \mathbb{Z}^+$ (entero positivo) , entonces

1)	$a^{2n}b > 0$	$\Leftrightarrow$	$b > 0$	$\wedge$	$a \neq 0$
2)	$a^{2n}b < 0$	$\Leftrightarrow$	$b < 0$	$\wedge$	$a \neq 0$
3)	$a^{2n}b \geq 0$	$\Leftrightarrow$	$b \geq 0$	$\vee$	$a = 0$
4)	$a^{2n}b \leq 0$	$\Leftrightarrow$	$b \leq 0$	$\vee$	$a = 0$
5)	$\dfrac{b}{a^{2n}} > 0$	$\Leftrightarrow$	$b > 0$	$\wedge$	$a \neq 0$
6)	$\dfrac{b}{a^{2n}} \geq 0$	$\Leftrightarrow$	$b \geq 0$	$\wedge$	$a \neq 0$
7)	$\dfrac{b}{a^{2n}} < 0$	$\Leftrightarrow$	$b < 0$	$\wedge$	$a \neq 0$
8)	$\dfrac{b}{a^{2n}} \leq 0$	$\Leftrightarrow$	$b \leq 0$	$\wedge$	$a \neq 0$

5.8 EJEMPLOS .-

a) $(x-4)^6(x-2)(x+3) > 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x-2)(x+3) > 0 \ \wedge \ x \neq 4$
$\Leftrightarrow \quad x \in (\langle -\infty, -3\rangle \cup \langle 2, \infty\rangle) - \{4\} = \text{C.S.}$

b) $(x-4)^4(x-6) < 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x-6) < 0 \ \wedge \ x \neq 4$
$\Leftrightarrow \quad x \in \langle -\infty, 6\rangle - \{4\} = \langle -\infty, 4\rangle \cup \langle 4, 6\rangle = \text{C.S.}$

c) $\dfrac{(x-4)^8(x-2)}{(x+3)(x-7)} \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \dfrac{(x-2)}{(x+3)(x-7)} \geq 0 \quad \vee \quad x = 4$

$\Leftrightarrow \quad x \in (\langle -3, 2] \cup \langle 7, \infty\rangle) \quad \vee \quad x = 4$

$\Leftrightarrow \quad x \in \langle -3, 2] \cup \{4\} \cup \langle 7, \infty\rangle = \text{C.S.}$

d) $(x-3)^2(x-1) \leq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x - 1 \leq 0 \quad \vee \quad x = 3$

$\Leftrightarrow \quad x \in \langle -\infty, 1] \cup \{3\} = \text{C.S.}$

e) $\dfrac{(x-2)(x-6)}{(x-3)^4(x-1)} < 0 \quad \Leftrightarrow \quad \dfrac{(x-2)(x-6)}{(x-1)} < 0 \quad \wedge \quad x \neq 3$

$\Leftrightarrow \quad x \in (\langle -\infty, 1\rangle \cup \langle 2, 6\rangle) - \{3\} = \text{C.S.}$

$\Leftrightarrow \quad x \in \langle -\infty, 1\rangle \cup \langle 2, 3\rangle \cup \langle 3, 6\rangle = \text{C.S.}$

5.9 EJERCICIO .- Resuelva la inecuación : $\dfrac{(x+1)(x-2)^2}{(x-2)(x+1)(x-3)} \geq 0$.

SOLUCIÓN.- Antes de resolver esta inecuación la transformaremos en otra equivalente:

$\dfrac{(x+1)(x-2)^2}{(x+1)(x-2)(x-3)} \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \dfrac{(x-2)}{(x-3)} \geq 0 \quad \wedge \quad \underbrace{x \neq -1 \,,\; x \neq 2}$

¡ importante !

$\Leftrightarrow \quad x \in (\langle -\infty, 2] \cup \langle 3, \infty\rangle) - \{-1, 2\}$

$\Leftrightarrow \quad x \in \langle -\infty, -1\rangle \cup \langle -1, 2\rangle \cup \langle 3, \infty\rangle = \text{C.S.}$

5.10 EJERCICIO.- Resuelva: $\dfrac{x+1}{x^3 + 8x^2 + 14x + 12} < 0 \qquad (*)$

SOLUCIÓN.- Factorizando (MÉTODO DE RUFFINI) :

$\dfrac{x+1}{(x+6)(x^2+2x+2)} < 0 \quad \Leftrightarrow \quad \dfrac{x+1}{(x+6)[(x+1)^2+1]} < 0$

donde la expresión cuadrática del corchete es ***estrictamente positiva***, *para todo* $x \in \mathbb{R}$, luego,

$(*) \quad \Leftrightarrow \quad \dfrac{x+1}{x+6} < 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \in \langle -6, -1\rangle = \text{C.S.}$

A continuación presentaremos un TEOREMA que simplifica una inecuación cuando uno de sus miembros es cero y que luego de factorizar se tiene que ALGÚN FACTOR LINEAL SE REPITE UN NÚMERO IMPAR DE VECES.

5.11 TEOREMA.- Debido a los resultados siguientes, para $n \in \mathbb{Z}^+$

1) $a^{2n+1} > 0 \quad \Leftrightarrow \quad a > 0$

2) $a^{2n+1} < 0 \quad \Leftrightarrow \quad a < 0$

3) $a^{2n+1} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a = 0$

4) $\dfrac{1}{a^{2n+1}} > 0 \quad \Leftrightarrow \quad a > 0$

5) $\dfrac{1}{a^{2n+1}} < 0 \quad \Leftrightarrow \quad a < 0$

6) $\dfrac{1}{a^{2n+1}} = 0$ *NO SE CUMPLE PARA NINGÚN* $a \in \mathbb{R}$

6a) $\dfrac{1}{a^{2n+1}} \leq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \dfrac{1}{a^{2n+1}} < 0 \quad \Leftrightarrow \quad a < 0$

6b) $\dfrac{1}{a^{2n+1}} \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \dfrac{1}{a^{2n+1}} > 0 \quad \Leftrightarrow \quad a > 0$

Entonces las inecuaciones que tienen uno de sus miembros igual a cero, y el otro miembro una expresión con UNA POTENCIA IMPAR como

$$a^{2n+1} \cdot b$$

se transforman en otras inecuaciones EQUIVALENTES (que tienen las mismas soluciones que la original) en las que la expresión anterior se reemplaza simplemente por la expresión

$$a \cdot b$$

manteniéndose el mismo sentido de la desigualdad.

5.12 EJEMPLO .- Resuelva la inecuación $\dfrac{(x-1)^5(x+3)}{x+7} \leq 0$

SOLUCIÓN .- Esta inecuación es equivalente a:

$\dfrac{(x-1)(x+3)}{x+7} \leq 0$ cuyos valores críticos son : $-7 \,,\; -3 \,,\; 1.$

$$[\ \overset{-}{\ } \ -7 \ \overset{+}{\ } \ -3 \ \overset{-}{\ } \ 1 \ \overset{\oplus}{\ } \ ]$$

Por lo tanto, su Conjunto Solución es el conjunto de las x tales que

$$x \in \langle -\infty, -7\rangle \cup [-3, 1] = \text{C.S.}$$

Aquí hemos utilizado la propiedad (4) enunciada dentro del TEOREMA [5.13].

5.13 TEOREMA.- Sea $n \in \mathbb{Z}^+$, entonces

1) $a^{2n+1} b > 0 \quad \Leftrightarrow \quad ab > 0$

2) $a^{2n+1}\, b \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad ab \geq 0$

3) $a^{2n+1}\, b < 0 \quad \Leftrightarrow \quad ab < 0$

4) $a^{2n+1}\, b \leq 0 \quad \Leftrightarrow \quad ab \leq 0$

5) $\dfrac{b}{a^{2n+1}} < 0 \quad \Leftrightarrow \quad ab < 0 \quad \wedge \quad a \neq 0$

5) $\dfrac{b}{a^{2n+1}} \leq 0 \quad \Leftrightarrow \quad ab \leq 0 \quad \wedge \quad a \neq 0$

7) $\dfrac{b}{a^{2n+1}} > 0 \quad \Leftrightarrow \quad ab > 0 \quad \wedge \quad a \neq 0$

8) $\dfrac{b}{a^{2n+1}} \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad ab \geq 0 \quad \wedge \quad a \neq 0$

5.14 EJERCICIO .- Resuelva: $\dfrac{(x+3)}{(x-1)^5\,(x+7)} \leq 0 \qquad (*)$

SOLUCIÓN .- En forma equivalente se tiene:

$(*) \quad \Leftrightarrow \quad (x-1)\cdot\dfrac{(x+3)}{(x+7)} \leq 0 \quad \wedge \quad x \neq 1 \qquad [\,5.13\ (6)\,]$

$\Leftrightarrow \quad \dfrac{(x-1)(x+3)}{(x+7)} \leq 0 \quad \wedge \quad x \neq 1$

$\Leftrightarrow \quad x \in \langle -\infty, -7\rangle \cup [-3, 1\rangle = \text{C.S.} \qquad (\text{Ver } 5.12)$

5.15 EJEMPLO .- Resuelva: $\dfrac{(x+4)^3\,(x+1)^4}{(x-3)^5\,(x+2)^6} > 0 \qquad (*)$

SOLUCIÓN .-

$(*) \overset{5.13(1)}{\Leftrightarrow} \dfrac{(x+4)(x+1)^4}{(x-3)(x+2)^6} > 0 \overset{5.7(1)}{\Leftrightarrow}$

$\Leftrightarrow \quad \dfrac{(x+4)}{(x-3)(x+2)^6} > 0 \quad \wedge \quad x \neq -1$

$\Leftrightarrow \quad \dfrac{(x+4)}{(x-3)} > 0 \quad \wedge \quad x \neq -2 \quad \wedge \quad x \neq -1 \quad \Leftrightarrow$

$x \in (\langle -\infty, -4\rangle \cup \langle 3, \infty\rangle) - \{-2, -1\} = \text{C.S.} \quad \Leftrightarrow$

$\text{C.S.} = \langle -\infty, -4\rangle \cup \langle 3, \infty\rangle \ .$

5.16 PROBLEMA .- Resuelva:

a) $\dfrac{3x-2}{x+1} < 4 \qquad$ b) $\dfrac{2}{1-x} \geq \dfrac{4}{14x}$

SOLUCIÓN .-

a) $\dfrac{3x-2}{x+1} - 4 < 0 \quad \Leftrightarrow \quad \dfrac{3x-2-4x-4}{x+1} < 0 \quad \Leftrightarrow$

$\dfrac{(-x-6)}{x+1} < 0 \quad \Leftrightarrow \quad \dfrac{x+6}{x+1} > 0 \quad \Leftrightarrow$

$x \in \langle -\infty, -6\rangle \cup \langle -1, \infty\rangle = \text{C.S.}$

b) $\dfrac{2}{1-x} - \dfrac{4}{14x} \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \dfrac{28x-4+4x}{14x(1-x)} \geq 0 \quad \Leftrightarrow$

$\dfrac{32x-4}{14x(1-x)} \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \dfrac{4(8x-1)}{14x(x-1)} \leq 0 \quad (\ ¿?\ ), \quad \Leftrightarrow$

$\dfrac{8x-1}{x(x-1)} \leq 0 \quad$ [cuyos VALORES CRÍTICOS son: $0\ ,\ \dfrac{1}{8}\ ,\ 1$]

$\quad - \quad + \quad - \quad \oplus$

$\Leftrightarrow \quad x \in \langle -\infty, 0\rangle \cup [1/8, 1\rangle = \text{C.S.}$

5.17 EJERCICIO .- Resuelva la inecuación : $\dfrac{1}{(x-2)^3} \leq 0 \ .$

SOLUCIÓN .- Por el Teorema [5.11] :

$\dfrac{1}{(x-2)^3} \leq 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x-2) < 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \in \langle -\infty, 2\rangle = \text{C.S.}$

5.18 EJERCICIO.- Resuelva: $\dfrac{2x^2-4x+5}{x^3-6x^2+12x-8} < 0$

SOLUCIÓN.- Completando cuadrados y factorizando:

$\dfrac{2(x-1)^2+3}{(x-2)^3} < 0 \quad \underset{(*)}{\Leftrightarrow} \quad (x-2)^3 > 0 \quad \Leftrightarrow \quad x-2 > 0$

La equivalencia $(*)$ se cumple debido a que el numerador $2(x-1)^2+3$ es ***SIEMPRE POSITIVO*** (>0), ***para todo*** $x \in \mathbb{R}$. Por lo tanto, $x \in \text{C.S.} = \langle 2, \infty\rangle$.

5.19 EJERCICIO.- Resuelva: $\frac{1}{x+5} < \frac{1}{x-4}$

SOLUCIÓN.-

$$\frac{1}{x+5} - \frac{1}{x-4} < 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{(x-4)-(x+5)}{(x+5)(x-4)} < 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\frac{-9}{(x+5)(x-4)} < 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x+5)(x-4) > 0 \quad \Leftrightarrow$$

$x \in \langle -\infty, -5 \rangle \cup \langle 4, \infty \rangle$ = C.S.

5.20 EJERCICIO.- Sea $A = \{ x \in \mathbb{R} / \ 0 < x^2 < 50 \} \cap \mathbb{Z}^+$, y sea B el conjunto solución de

$$\frac{1}{x+5} < \frac{1}{x-4} \quad \text{en } \mathbb{R}.$$

Halle la suma S de todos los elementos de $A \cap B$.

RPTA: $A \cap B = \{5, 6, 7\}$, $S = 18$.

5.21 INECUACIONES CON FACTORES CUADRÁTICOS IRREDUCIBLES

Se dice que una expresión cuadrática: $ax^2 + bx + c$, con ***coeficientes reales***, es IRREDUCIBLE en $\mathbb{R}$ si su DISCRIMINANTE $\Delta = b^2 - 4ac$ es negativo: $b^2 - 4ac < 0$.

Esto equivale a decir que la ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$ $(*)$ no tenga ninguna raiz real, y que por lo tanto el primer miembro de $(*)$: o es SIEMPRE POSITIVO (> 0), o es SIEMPRE NEGATIVO (< 0), PARA TODO x REAL. Es decir,

Si $b^2 - 4ac < 0$, y

1) Si $a > 0$, entonces $ax^2 + bx + c > 0$, $\forall\ x \in \mathbb{R}$

2) Si $a < 0$, entonces $ax^2 + bx + c < 0$, $\forall\ x \in \mathbb{R}$

5.22 NOTA.- Decir que una expresión cuadrática $ax^2 + bx + c$ con coeficientes reales es IRREDUCIBLE EN $\mathbb{R}$, es también equivalente a decir que $ax^2 + bx + c$ no se puede factorizar como el producto de dos factores lineales con coeficientes reales.

Ampliaremos este análisis en el siguiente Capítulo 7.

5.23 NOTA IMPORTANTE.-

Todo polinomio con coeficientes REALES de grado $n \geq 1$, siempre se puede factorizar hasta factores lineales y/o factores ***cuadráticos irreducibles***, con coeficientes reales. (Ver [8.3], CAP. 5).

5.24 EJERCICIO.- Resuelva: $2x^4 - 5x^3 - 7x^2 + 16x - 12 > 0$

SOLUCIÓN.- Buscando las raíces (MÉTODO DE RUFFINI):

	2	−5	−7	16	−12
−2		−4	18	−22	12
	2	−9	11	−6	0
3		6	−9	6	
	2	−3	2	0	

$$\Rightarrow \quad 2x^4 - 5x^3 - 7x^2 + 16x - 12 = (x+2)(x-3)(2x^2 - 3x + 2)$$

donde la expresión cuadrática $2x^2 - 3x + 2$ no tiene factores lineales por ser IRREDUCIBLE en $\mathbb{R}$, pues su DISCRIMINANTE es negativo. En efecto,

$$b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4(2)(2) = -7 < 0$$

Luego, debido al recuadro en [5.21], como $a = 2 > 0$, entonces se cumple que: $2x^2 - 3x + 2 > 0$, $\forall\ x \in \mathbb{R}$.

Por lo tanto,

$$(x+2)(x-3)(2x^2 - 3x + 2) > 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x+2)(x-3) > 0$$

$$\Leftrightarrow \quad x \in \langle -\infty, -2 \rangle \cup \langle 3, \infty \rangle = \text{C.S.} \qquad \text{(Verificar)}$$

5.25 EJERCICIO.- Resuelva: $\frac{x^2 - 2x - 1}{x - 1} \leq -2x$

SOLUCIÓN.- Pasando $-2x$ al primer miembro, obtenemos:

$$\frac{x^2 - 2x - 1}{x - 1} + 2x \leq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x^2 - 2x - 1 + 2x(x-1)}{x - 1} \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{3x^2 - 4x - 1}{x - 1} \leq 0 \qquad (*)$$

donde el DISCRIMINANTE del numerador NO ES NEGATIVO, y por lo tanto existen raíces reales las cuales son calculadas como sigue

$$3x^2 - 4x - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 4(3)(-1)}}{6} = \frac{4 \pm 2\sqrt{7}}{6}$$

Luego, las raíces de $3x^2 - 4x - 1$ son:

$$x_1 = \frac{1}{3}(2 - \sqrt{7}) = -0,21 \quad , \quad x_2 = \frac{1}{3}(2 + \sqrt{7}) = 1,54$$

ahora factorizamos en $(*)$:

$$\frac{3[x - \frac{1}{3}(2 - \sqrt{7})][x - \frac{1}{3}(2 + \sqrt{7})]}{x - 1} \leq 0 \qquad \text{(Verificar)}$$

cuyos valores críticos son:

$$\frac{1}{3}(2 - \sqrt{7}) \ , \quad 1 \ , \quad \frac{1}{3}(2 + \sqrt{7})$$
$$- \qquad + \qquad - \qquad \oplus$$

Por lo tanto, el Conjunto Solución es el conjunto de los x tales que:

$$x \in \langle -\infty , \frac{1}{3}(2 - \sqrt{7})] \ \cup \ (1, \frac{1}{3}(2 + \sqrt{7})] = \text{C.S.}$$

6. PROBLEMAS DE APLICACIÓN SOBRE DESIGUALDADES

6.1 PROBLEMA .- Si a y b son números positivos distintos, demostrar que:

$$\frac{a}{b^2} + \frac{b}{a^2} > \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$$

SOLUCIÓN .- Como $(a - b)^2 > 0$ entonces $a^2 + b^2 > 2ab$,

luego, $a^2 - ab + b^2 > ab \quad \Rightarrow \quad (a + b)(a^2 - ab + b^2) > (a + b)ab$

$$\Rightarrow \quad \boxed{a^3 + b^3 > a^2 b + b^2 a} \quad \Rightarrow \quad \frac{a^3 + b^3}{a^2 b^2} > \frac{a^2 b + b^2 a}{a^2 b^2}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{a}{b^2} + \frac{b}{a^2} > \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$$

6.2 PROBLEMA .- Si a , b y c son números positivos todos distintos, demuestre que $(a + b)(b + c)(c + a) > 8abc$

SOLUCIÓN .- De la relación $(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 > 0$, se sigue que

$$a + b > 2\sqrt{a}\sqrt{b} > 0 \quad , \text{ y análogamente:}$$

$$b + c > 2\sqrt{b}\sqrt{c} > 0$$
$$c + a > 2\sqrt{c}\sqrt{a} > 0$$

Multiplicando las desigualdades tenemos que

$$(a + b)(b + c)(c + a) > 8(\sqrt{a})^2 (\sqrt{b})^2 (\sqrt{c})^2 = 8abc .$$

6.3 PROBLEMA .- Sean a , b , x , y números positivos, todos distintos, tales que

$$a^2 + b^2 = 1 \qquad y \qquad x^2 + y^2 = 1 \ ,$$

demuestre que: $ax + by < 1$.

SOLUCIÓN .- Como $a^2 + x^2 > 2ax$, $b^2 + y^2 > 2by$

entonces $(a^2 + b^2) + (x^2 + y^2) > 2ax + 2by$

$$\Rightarrow \quad 1 + 1 > 2(ax + by) \quad \Rightarrow \quad 1 > ax + by .$$

SERIE DE EJERCICIOS

1. Si a y b son números positivos desiguales, demuestre que
$$a + b < a^2/b + b^2/a$$
2. Si a , b y c son números positivos distintos, demuestre que
$$(a + b + c)^2 < 3(a^2 + b^2 + c^2)$$
3. Si a y b son números positivos distintos, demuestre que
$$(a^3 + b^3)(a + b) > (a^2 + b^2)^2$$
4. Si a y b son números distintos, demuestre que
$$a^4 + b^4 > a^3 b + ab^3$$
5. Si x y y son números distintos, demuestre que
$$(x^4 + y^4)(x^2 + y^2) > (x^3 + y^3)^2$$
6. Si x , y , z , son números positivos distintos, demuestre que
$$xy(x + y) + yz(y + z) + zx(z + x) > 6xyz$$
7. Determine los valores de x para los cuales: $x^3 + 1 > x^2 + x$.
8. Sean a , b , c , d , números positivos distintos. Si se tiene
$\frac{a}{b} > \frac{c}{d}$, demuestre: $\frac{a}{b} > \frac{a + c}{b + d} > \frac{c}{d}$.
9. Sean a , b , c , x , y , z , números positivos distintos tales que
$a^2 + b^2 + c^2 = 1 \ \wedge \ x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Demuestre que
$$ax + by + cz < 1$$
10. Sean a , b , c , x , y , z , números positivos distintos. Demuestre que

$(a^2 + b^2 + c^2)(x^2 + y^2 + z^2) > (ax + by + cz)^2$

11. Si a , b y c son números positivos distintos, demuestre que

$$a^3 + b^3 + c^3 > 3abc$$

12. Resuelva:

a) $\frac{3x - 2}{x + 1} < 3$

b) $x^2 - 11x + 28 \leq 0$

c) $\frac{x}{2} \geq \frac{3}{x - 5}$

d) $x(x^4 - 7x^2 + 12) > 0$

e) $\frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 + 3x + 2} \geq 0$

f) $\frac{x^2 + 10x + 16}{x - 1} > 10$

g) $\frac{7x - 5}{8x + 3} > 4$

h) $\frac{(x - 1)(x - 2)}{(x - 3)(x - 4)} \geq 1$

i) $\frac{2x^2 - 6x + 3}{x^2 - 5x + 4} > 1$

j) $\frac{x - 2}{x + 2} \geq \frac{2x - 3}{4x - 1}$

13. Resuelva:

a) $\frac{1}{x - 1} > 1$

b) $\frac{2}{3x - 5} > 0$

e) $(x + 4)(x + 5) - 6 \geq 6$

f) $x + \frac{2}{x} > -3$

c) $x + \frac{4}{x} > 4$

d) $2 - \frac{x - 2}{x - 1} > \frac{x - 3}{x - 2}$

g) $\frac{x - 10}{5 + x^2} < \frac{1}{2}$

h) $\frac{x + 1}{1 - x} - 2 \leq \frac{1 - x}{x}$

14. Demuestre la validez de las siguientes desigualdades:

a) $\frac{d}{3c} > 1 - \frac{3c}{4d}$, donde $d > 0$, $c > 0$, $2d \neq 3c$

b) $x^2 + (9/x^2) \geq 6$, donde $x \neq 0$.

c) $\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}} + \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}} > 2$, si $x > 0$, $y > 0$, $x \neq y$

d) $\frac{3a}{5b} + \frac{5b}{3a} > 2$, si $a > 0$, $b > 0$, $3a \neq 5b$.

e) Para cualesquier números reales a, b, c, d :

$$(ab + cd)^2 \leq (a^2 + c^2)(b^2 + d^2)$$

15. Resuelva:

a) $\frac{1}{x + 1} + \frac{2}{x + 3} > \frac{3}{x + 2}$

b) $\frac{6}{x - 1} - \frac{3}{x + 1} - \frac{7}{x + 2} < 0$

c) $\frac{2x}{2x^2 + 7x + 5} > \frac{x}{x^2 + 6x + 5}$

d) $x^4 - 21x^2 - 20x < 0$

e) $(x - \frac{1}{4})^2 + 4(x - \frac{1}{4}) + 3 < 0$

16. Resuelva los siguientes sistemas de inecuaciones:

a) $\begin{cases} x^2 - 2x - 3 > 0 \\ x^2 - 11x + 28 \geq 0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 4x^2 - 1 > 0 \\ -2x^2 + 5x - 3 > 0 \end{cases}$

c) $5 < x^2 - 8x + 25 < 18$

17. Resuelva:

a) $\frac{x^2 + 3x + 2}{x - 2} < \frac{x - 2}{x + 2}$

b) $\frac{x}{x - 5} > 6$

c) $3x^{-1} > -(x - 4)$

d) $-4 \leq -2x + 3 \leq 4$

e) $3x^3 - 9x^2 + 11x \leq 5$

f) $2x^4 < 2x^2$

g) $x^3 \leq x$

18. Resuelva:

a) $(x - 1)(2x^2 - 12x + 19) < 0$,

b) $\frac{x^2 - 2x + 1}{x - 1} \geq 0$

c) $\frac{(2x^2 - 8x + 8)(x + 3)}{x + 6} \geq 0$,

d) $\frac{3x^3 - 24x^2 + 63x - 54}{3x + 15} \geq 0$

e) $\frac{2}{2x + 3} \in \langle 1/4 , 2]$

f) $\frac{3}{x + 2} \leq \frac{6}{x + 5}$

g) $x^2 + 4 < x + 10$ h) $\dfrac{x^3 - 2}{x^2 - 1} > \dfrac{x^3 - 4}{x^2 + 2}$

19. Resuelva:

a) $(x^2 + 7)(x^2 + 25)(x^2 - 4)(x^2 + 3) > 0$

b) $\dfrac{x^2 + 8x + 24}{x + 2} \geq 8$ c) $\dfrac{x + 2}{x - 2} \geq \dfrac{x^2 + 2}{x^2}$

d) $\dfrac{3x^2 - 4}{x - 6} \leq x + 6$

20. Resuelva:

a) $\dfrac{(4x + 2)^2 (x^2 + 2)^3 (2x - 8)^9}{(x + 1)^2 (2x + 5)^{13}} < 0$

b) $\dfrac{(x^2 - 4x - 12)(x^2 - x - 12)}{(x^2 - 9)(x^2 - 4)} < 0$

c) $\dfrac{2x}{x + 1} - \dfrac{x}{x - 1} \geq \dfrac{x - 1}{x}$, d) $\dfrac{x^2 + 8}{x + 4} \geq \dfrac{5x - 8}{5}$

e) $\dfrac{(x^2 - 2x + 4)^5 (1 - x)^3 (2 + x)^6}{x^4 (2x + 1)(x + 4)} \geq 0$

f) $\dfrac{x^4 - 2x^3 - x^2 - 4x - 6}{x^3 - 4x^2 + x - 4} \leq 0$

g) $\dfrac{1 + x^3}{(1 - x^2)(1 - x)} > \dfrac{x - x^2 + x^4 - x^5}{(1 - x)^2 (1 + x)} + 9$

21. Demuestre que:

a) $a < b < 0 \Rightarrow 0 < 1/a^2 < 1/b^2$

b) $x > 1 \Rightarrow 1 < x < x^2$

c) $0 < x < 1 \Rightarrow 0 < x^2 < x < 1$

d) $a \leq b < 1 \Rightarrow \dfrac{a - 2}{a - 1} \leq \dfrac{b - 2}{b - 1}$

22. Demuestre que:

a) $0 < d < c \Rightarrow \dfrac{c^3}{3} - \dfrac{d^3}{3} > d^2(c - d)$

b) $0 \leq d < c \Rightarrow d^3(c - d) < \dfrac{c^4}{4} - \dfrac{d^4}{4} < c^3(c - d)$

c) $x > 0 , y > 0 , z > 0 \Rightarrow \dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{z} + \dfrac{z}{x} \geq 3$

SUG: $(x/y)(y/z)(z/x) = 1$, y el Problema [3.16] .

d) $0 < a \leq b \Rightarrow \dfrac{a}{b} + \dfrac{3b}{a} \leq \dfrac{b^2}{a^2} + 3$

SUG: $(b - a)^3 \geq 0 \Rightarrow (b - a) \geq 0$.

23. Dados los polinomios $P(x) = x^3 + 3x^2 - 2x + 4$, $H(x) = 2x - a$ y $Q(x) = x^3 + 2x^2 + 2x + 1$. Si el residuo de dividir $P(x)$ entre $H(x)$ es menor que el residuo de dividir $Q(x)$ entre $H(x)$, halle la suma de todos los valores posibles de a .

24. Halle el menor de los números M que satisfacen la concición de que, *PARA TODO* x *REAL* :

a) $4 + 6x - 3x^2 \leq M$ c) $-x^2 \leq M$

b) $4x - 2x^2 \leq M$ d) $4x - x^2 - 10 \leq M$.

25. Halle el mayor de los números m que cumplen la condición de que, *PARA TODO* x *REAL*:

a) $m \leq 2x^2 - 4x + 2$ c) $m \leq x(x - 2) - 3$

b) $m \leq x^2 - 10x + 32$ d) $m \leq 1 - 6x + x^2$

26. Sea $x \in [\, 1/4 , 5/4 \,]$ y sean M el menor valor y m el mayor valor que satisfacen: $m \leq (x + 5)/(x - 2) \leq M$. Encuentre m y M.

27. ¿Es $x + x + x > x$ ***para todo*** x ***real***? ¿Para todo $x > 0$?

28. Si x es un número real cuya representación decimal comienza como sigue:

a) $x = 2.3476 \ldots$, b) $x = -5.3254 \ldots$, indique el intervalo cerrado de longitud 10^{-4} que lo contiene.

29. Resuelva: a) $6 - 2x \leq 3x - 9 \leq 2x - 6$ c) $x^2 \leq x^4$

b) $1 - x \leq 2x - 2 < x + 8$ d) $[\,(x - 1)^2 + 5\,]^{-1} < 1$

e) $\dfrac{x+1}{1-x} - 2 < \dfrac{1-x}{x}$, f) $\dfrac{2x-1}{x+1} + \dfrac{3x-1}{x+2} < 4 + \dfrac{x-7}{x-1}$

g) $(3x+5)(x+2) < (x-3)(x+4)$

h) $(2x-3)(x+1) \geq (x+5)(x-2)$

30. Resuelva:

a) $\dfrac{x+1}{x^2+2x+3} \geq 0$, b) $\dfrac{2x}{2x^2+7x+5} \geq \dfrac{x}{x^2+6x+5}$

c) $\dfrac{x^2+5x-6}{2x^4+14x^3+31x^2+24x+9} < 0$.

CLAVE DE RESPUESTAS

7. $\langle -1,1\rangle \cup \langle 1,\infty\rangle$, 12. a) $\langle -1,\infty\rangle$, b) $[4,7]$

12. c) $[-1,5\rangle \cup [6,\infty\rangle$, d) $\left\langle -2,-\sqrt{3}\right\rangle \cup \left\langle 0,\sqrt{3}\right\rangle \cup \langle 2,\infty\rangle$
e) $\langle -\infty,-2\rangle \cup \langle -1,1] \cup [2,\infty\rangle$ f) $\langle 1,\infty\rangle$
g) $\langle -17/25,-3/8\rangle$ h) $[5/2,3\rangle \cup \langle 4,\infty\rangle$
i) $\left\langle -\infty,(1-\sqrt{5})/2\right\rangle \cup \left\langle 1,(1+\sqrt{5})/2\right\rangle \cup \langle 4,8\rangle$
j) $\langle -\infty,-2\rangle \cup \langle 1/4,1] \cup [4,\infty\rangle$

13. a) $\langle 1,2\rangle$ b) $\langle 5/3,\infty\rangle$ c) $\langle 0,2\rangle \cup \langle 2,\infty\rangle$
d) $\langle 1,3/2\rangle \cup \langle 2,\infty\rangle$ e) $\langle -\infty,-8] \cup [-1,\infty\rangle$
f) $\langle -2,-1\rangle \cup \langle 0,\infty\rangle$, g) $\mathbf{R}$, h) $\langle -\infty,-1] \cup \langle 0,\frac{1}{2}] \cup \langle 1,\infty\rangle$

15. a) $\langle -3,-2\rangle \cup \langle -1,1\rangle$; b) $\langle -2,-5/4\rangle \cup \langle -1,1\rangle \cup \langle 5,\infty\rangle$
c) $\langle -\infty,-5\rangle \cup \langle -5/2,-1\rangle \cup \langle 0,\infty\rangle$; d) $\langle -4,-1\rangle \cup \langle 0,5\rangle$
e) $\langle -11/4,-3/4\rangle$ **16.** a) $\langle -\infty,-1\rangle \cup \langle 3,4] \cup [7,\infty\rangle$

16. b) $\langle 1,3/2\rangle$ c) $\langle 1,7\rangle$ **17.** a) $\langle -\infty,-2\rangle \cup \langle 0,2\rangle$

17. b) $\langle 5,6\rangle$ c) $\langle 0,1\rangle \cup \langle 3,\infty\rangle$ d) $[-1/2,7/2]$
e) $\langle -\infty,1]$, f) $\langle -1,1\rangle - \{0\}$, g) $\langle -\infty,-1] \cup [0,1]$

18. a) $\langle -\infty,1\rangle$ b) $\langle 1,\infty\rangle$ c) $\langle -\infty,-6\rangle \cup [-3,\infty\rangle$
d) $\langle -\infty,-5\rangle \cup [2,\infty\rangle$ e) $[-1,5/2\rangle$
f) $\langle -5,-2\rangle \cup [1,\infty\rangle$ g) $\langle -2,3\rangle$ h) $\langle -2,0\rangle \cup \langle 0,\infty\rangle$

19. a) $\langle -\infty,-2\rangle \cup \langle 2,\infty\rangle$ b) $\langle -2,\infty\rangle$ c) $\langle 2,\infty\rangle$
d) $\langle -\infty,6\rangle$ **20.** a) $\langle -5/2,4\rangle - \{-1,-1/2\}$

20. b) $\langle 2,3\rangle \cup \langle 4,6\rangle$ c) $\langle -\infty,-1\rangle \cup \langle 0,1\rangle$ d) $\langle -4,6]$
e) $\langle -\infty,-4\rangle \cup \{-2\} \cup \langle -1/2,0\rangle \cup \{0,1]$
f) $\langle -\infty,-1] \cup [3,4\rangle$
g) $\left\langle -\infty,-1-\sqrt{3}\right\rangle \cup \left\langle -1+\sqrt{3},1\right\rangle \cup \langle 1,2\rangle \cup \langle 2,\infty\rangle$

23. S = 12 pues $a \in \langle 2,6\rangle \cap \mathbb{Z} \Rightarrow a = 3,4,5$.

24. a) $M = 7$, b) $M = 2$, c) $M = 0$, d) $M = -6$

25. a) $m = 0$, b) $m = 7$, c) $m = -4$, d) $m = -8$

26. $m = -25/3$, $M = -3$

27. No se cumple para $x \leq 0$; sólo se cumple para todo $x > 0$.

28. a) $[2.3476, 2.3477]$, b) $[-5.3255, -5.3254]$

29. a) $x = 3$ b) $[1,10\rangle$ c) $\langle -\infty,-1] \cup \{0\} \cup [1,\infty\rangle$
d) $\mathbb{R}$, e) $\langle -\infty,-1\rangle \cup \langle 0,1/2\rangle \cup \langle 1,\infty\rangle$
f) $\langle -2,-5/4\rangle \cup \langle -1,1\rangle \cup \langle 5,\infty\rangle$ g) $\varnothing$ h) $\mathbb{R}$

30. a) $[-1,\infty\rangle$ b) $\langle -\infty,-5\rangle \cup \langle -5/2,-1\rangle \cup [0,\infty\rangle$
c) $\langle -6,1\rangle - \{-3\}$

Ω Ω Ω Ω Ω

6

ECUACIÓN DE 2º GRADO

1. LA ECUACIÓN DE SEGUNDO GRADO

Como ya sabemos esta ecuación tiene la forma general

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad , \qquad a \neq 0$$

y antes de estudiar directamente este caso general, comenzaremos analizando el caso particular de

$$x^2 + bx + c = 0 \qquad (*)$$

2. RAÍCES Y DISCRIMINANTE DE LA ECUACIÓN CUADRÁTICA

Sean x_1 , x_2 las raíces de la ecuación $(*)$:

$x^2 + bx + c = 0$. Entonces

$$x^2 + bx + c = (x - x_1)(x - x_2) = x^2 - (x_1 + x_2)x + (x_1 x_2)$$

Identificando coeficientes:

$$\boxed{\begin{aligned} x_1 + x_2 &= -b \\ x_1 x_2 &= c \end{aligned}} \qquad (**)$$

Es decir,

i) La suma de las raíces es igual al coeficiente de x, con el signo cambiado.

ii) El producto de ambas raíces es igual al término independiente.

2.1 EJERCICIO .- Si las raíces de la ecuación $kx^2 + 2kx + 5 = 0$, $(k \neq 0)$, son iguales, halle el cuadrado de dicho valor común.

SOLUCIÓN .- La ecuación dada es equivalente a: $x^2 + 2x + (5/k) = 0$.

Sean x_1 , x_2 las raíces. Como $x_1 = x_2 = r$, entonces

$$x_1 + x_2 = -2 \quad \wedge \quad x_1 x_2 = 5/k \qquad [\text{ de } (**)]$$

$$\Rightarrow \qquad 2r = -2 \quad \wedge \quad r^2 = 5/k$$

$$\Rightarrow \quad r = -1 \ , \quad k = 5 . \quad \text{Luego,} \quad r^2 = 1 .$$

2.2 EJERCICIO .- Halle los valores de k para que la ecuación:

$$3x^2 + kx + 2 = 0$$

tenga su Conjunto Solución de la forma $\{ r , 3r \}$.

SOLUCIÓN .- Equivalentemente: $x^2 + (k/3)x + (2/3) = 0$, siendo r y $3r$ las raíces, tenemos que

$$r + 3r = k/3 \qquad \text{y} \qquad r(3r) = 2/3$$

$$\Rightarrow \quad 4r = k/3 \quad \text{y} \quad r^2 = 2/9 \quad \Rightarrow \quad r = \pm\sqrt{2}/3 \ .$$

Por lo tanto, $k = 12r = \pm 4\sqrt{2}$.

2.3 CASO GENERAL .-

$$ax^2 + bx + c = 0 \ , \qquad a \neq 0$$

De lo ya expuesto, tenemos que si x_1 y x_2 son las raíces de esta ecuación general, entonces al dividir ambos miembros entre a se tiene:

$$\boxed{\begin{aligned} x_1 + x_2 &= -b/a \\ x_1 x_2 &= c/a \end{aligned}} \qquad (**)'$$

Además, si completamos cuadrados obtenemos :

$$ax^2 + bx + c = a\left[(x + \frac{b}{2a})^2 + \frac{(4ac - b^2)}{4a^2} \right] \qquad (\#)$$

en donde denotamos $\Delta = b^2 - 4ac$ y lo denominamos EL DISCRIMINANTE de: $ax^2 + bx + c$. Luego,

1) Si $\Delta = b^2 - 4ac \geq 0$, entonces de $(\#)$:

$$ax^2 + bx + c = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad (x + \frac{b}{2a}) = \pm\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$\Leftrightarrow \qquad \boxed{x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}} \qquad \ldots (\alpha)$$

y por lo tanto,

1A) Si $\Delta = b^2 - 4ac > 0$ (Discriminante positivo), entonces existen ***dos raíces reales distintas*** : x_1 y x_2, dadas por la fórmula (α) , una para cada signo; en cuyo caso, siempre es posible factorizar $ax^2 + bx + c$ como:

$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$, con x_1 , x_2 reales.

1B) Si $\Delta = b^2 - 4ac = 0$ (Discriminante igual a cero), entonces ***existe una sola raíz*** (***doble***)

$$x_1 = x_2 = x = -\frac{b}{2a}$$

y por $(*)$, en este caso, la expresión cuadrática resulta ser ***un cuadrado perfecto*** :

$$ax^2 + bx + c = a\,(x + \frac{b}{2a})^2$$

2) Si $\Delta = b^2 - 4ac < 0$, entonces: $4ac - b^2 > 0$, y por lo tanto, de $(*)$: tomando la expresión del corchete, ésta será ***estrictamente positiva, para todo*** x ***real*** :

$$[\,(x + \frac{b}{2a})^2 + \frac{(4ac - b^2)}{4a^2}\,] > 0 \quad , \quad \forall\ x \in \mathbb{R}$$

Y como $a \neq 0$ entonces $ax^2 + bx + c$ nunca se anulará en $\mathbb{R}$, es decir que la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$, en este caso, ***NO TENDRÁ SOLUCIONES REALES***. Además,

2A) Si $a > 0$, (con $\Delta = b^2 - 4ac < 0$), entonces
$ax^2 + bx + c > 0$ ¡ $\forall\ x \in \mathbb{R}$!

2B) Si $a < 0$, (con $\Delta = b^2 - 4ac < 0$), entonces
$ax^2 + bx + c < 0$ ¡ $\forall\ x \in \mathbb{R}$!

2.4 EJERCICIO .- Halle el valor de k de tal modo que la ecuación

$$(k + 1)x^2 + 2(k - 1)x + k = 0$$

admita dos soluciones iguales en $\mathbb{R}$.

SOLUCIÓN .- Para tener dos raíces iguales se debe cumplir que: el Discriminante sea igual a cero $(\Delta = 0)$. Es decir,

$b^2 - 4ac = 0 \quad \Rightarrow \quad 4(k - 1)^2 - 4(k + 1)k = 0 \quad \Rightarrow$
$-12k + 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad k = 1/3$.

2.5 EJERCICIO .- Halle el conjunto de valores de k para el cual el trinomio:

$$kx^2 + 8x + 4$$ no tenga raíces reales.

SOLUCIÓN .- Si la ecuación no ha de admitir raíces reales entonces su Discriminante debe ser ***negativo*** : $\Delta < 0$. Es decir,

$b^2 - 4ac < 0 \quad \Rightarrow \quad 64 - 16k < 0 \quad \Rightarrow \quad k > 4 \quad \Rightarrow \quad k \in \langle 4, \infty \rangle$.

2.6 EJERCICIO .- ¿Cuál es la ecuación cuadrática cuyas raíces son: -4 y 7 ?

SOLUCIÓN .- Sean las raíces $x_1 = -4$, $x_2 = 7$, entonces

$(x - x_1)(x - x_2) = 0 \quad \Rightarrow \quad [\,x - (-4)\,][\,x - 7\,] = 0 \quad \Rightarrow$

$(x + 4)(x - 7) = 0 \quad \Rightarrow \quad x^2 - 3x - 28 = 0$.

2.7 EJERCICIO .- ¿Cuáles de las siguientes proposiciones son verdaderas? :

1) Si $x \in \mathbb{R}$, y $A = \{\,a \in \mathbb{R} \,/\, 4x^2 - 2ax + (3 + a)$ es un cuadrado perfecto $\}$, entonces: $A \subset \{\,a \in \mathbb{Z} \,/\, a^3 + 24 = 6a^2 + 4a\,\}$.

2) $B = \{\,x \in \mathbb{Q} \,/\, 10x^2 = 13x + 3\,\}$ es un conjunto unitario.

SOLUCIÓN .- 1) Debe cumplirse en A que $4x^2 - 2ax + (3 + a) = (2x + d)^2$ es ***un cuadrado perfecto***, lo que equivale a tener dos raíces iguales (o sea, una raíz doble) , y ello ocurre si el Discriminante es igual a cero:

$\Delta = 4a^2 - 16(3 + a) = 0 \quad \Leftrightarrow$

$(a - 6)(a + 2) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a = 6 \quad \vee \quad a = -2$. Además,

$a^3 + 24 = 6a^2 + 4a \quad \Leftrightarrow \quad (a + 2)(a - 2)(a - 6) = 0 \quad \Leftrightarrow$

$a \in \{-2\,,\,2\,,\,6\}$. Luego, $A = \{-2\,,\,6\} \subset B = \{-2\,,\,2\,,\,6\}$

Por lo tanto, la proposición (1) es VERDADERA .

2) Como $10x^2 = 13x + 3 \quad \Leftrightarrow \quad (2x - 3)(5x + 1) = 0 \quad \Leftrightarrow$

$B = \{\,3/2\,,\,-1/5\,\}$. Luego, la proposición (2) es FALSA .

2.8 EJERCICIO .- Halle todos los valores de a tales que el trinomio

$$3x^2 + 2ax + (a^2 - 6)$$

sea un cuadrado perfecto, y expresarlo así.

SOLUCIÓN .- Como debe tener el DISCRIMINANTE $= 0$, entonces

$4a^2 - 4(3)(a^2 - 6) = 0 \quad \Rightarrow \quad a = \pm 3$

Luego, $3x^2 + 2ax + (a^2 - 6) = 3x^2 \pm 6x + 3 = 3(x \pm 1)^2$.

2.9 PROBLEMA .- Si $a > 0$, $W = ax^2 + (1 - 2a)x + a$, halle el conjunto de valores de a tales que $W > 0$, ***PARA TODO*** x ***REAL*** .

SOLUCIÓN .- Como debe ser $ax^2 + (1 - 2a)x + a > 0$, *PARA TODO* x *REAL*, entonces no debe admitir raíces reales, y por lo tanto debe cumplirse que $\Delta < 0$ (***discriminante negativo***); es decir,

$$(1 - 2a)^2 - 4a^2 < 0 \quad \Leftrightarrow \quad 4a - 1 > 0 \quad \Leftrightarrow \quad a \in \left\langle \frac{1}{4} , \infty \right\rangle .$$

2.10 PROBLEMA .- Halle todos los valores de c para los cuales

$$-1 < \frac{2x^2 - cx + 1}{x^2 + 2x + 2} < 3 , \qquad \textbf{\textit{PARA TODO}} \ x \ \textbf{\textit{REAL}} .$$

SOLUCIÓN .-

Denotemos $A = \dfrac{2x^2 - cx + 1}{x^2 + 2x + 2}$, entonces resolveremos: $-1 < A < 3$

es decir: $A > -1 \quad \wedge \quad A < 3 \qquad (*)$

Además, como $x^2 + 2x + 2 = (x + 1)^2 + 1 > 0$, $\forall\ x \in \mathbb{R}$, entonces

i) $A > -1 \quad \Leftrightarrow \quad 2x^2 - cx + 1 > -[(x + 1)^2 + 1]$

$\Leftrightarrow \quad 3x^2 + (2 - c)x + 3 > 0$

lo cual debe cumplirse ***para todo*** $x \in \mathbb{R}$, y esto ocurre si

$\Delta < 0 \quad \Leftrightarrow \quad (2 - c)^2 - 36 < 0 \quad \Leftrightarrow \quad c \in \langle -4 , 8 \rangle$ (Verificar)

ii) $A < 3 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 + (6 + c)x + 5 > 0$, $\forall\ x \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow \quad \Delta < 0 \quad \Leftrightarrow \quad (c + 6)^2 - 20 < 0$

$\Leftrightarrow \quad c \in \left\langle -6 - 2\sqrt{5} , -6 + 2\sqrt{5} \right\rangle$

Por $(*)$, intersectamos las soluciones de (i) con las de (ii) con lo cual obtenemos el Conjunto Solución para los valores de c buscados:

$$c \in \left\langle -4 , -6 + 2\sqrt{5} \right\rangle = \text{C.S.}$$

2.11 NOTA .- Hemos visto que en un trinomio de segundo grado

$$ax^2 + bx + cx$$

si el DISCRIMINANTE ES NEGATIVO: $\Delta = b^2 - 4ac < 0$, entonces ***dicho trinomio no tiene raíces reales***. Sin embargo, debido al Teorema Fundamental del Álgebra, tiene de todas maneras ***dos raíces***, las que serán ***complejas*** (***y conjugadas entre si***) :

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-b + i\sqrt{4ac - b^2}}{2a}$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-b - i\sqrt{4ac - b^2}}{2a}$$

donde,

$4ac - b^2 > 0$

2.12 EJEMPLO .- La ecuación $9x^2 - 12x + 5 = 0$ tiene su Discriminante $\Delta = 144 - 4(9)(5) = -36$ (negativo), entonces tiene ***dos raíces complejas conjugadas***:

$$x = \frac{12 \pm \sqrt{144 - 180}}{18} = \frac{12 \pm \sqrt{-36}}{18} = \frac{12 \pm 6i}{18}$$

$$\Rightarrow \quad x_1 = \frac{1}{3}(2 + i) , \qquad x_2 = \frac{1}{3}(2 - i) .$$

2.13 PROBLEMA .- Halle una ecuación de segundo grado, una de cuyas raíces es la fracción continua:

$$x = 1 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{2 + \ldots}}}}$$

Indique además el valor simplificado de x .

SOLUCIÓN .- Notamos que debe ser $x > 0$, y que

$$x - 1 = \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{2 + \ldots}}}} \quad \Rightarrow \quad x - 1 = \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{2 + (x - 1)}}$$

$$x - 1 = \frac{x + 1}{3x + 4} \quad \Rightarrow \quad 3x^2 - 5 = 0 \quad \wedge \quad x > 0$$

$$\Rightarrow \quad x = \sqrt{5/3} .$$

2.14 EJERCICIO .- Dado el polinomio $P(x) = x^2 - 6x + 11$, determine la constante k de modo que $P(x) \leq k$ tenga el Conjunto Solución al intervalo $[\,0 , r\,]$, donde $r > 0$. Calcule $2k - 5r$.

SOLUCIÓN .- $P(x) \leq k \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - 6x + (11 - k) \leq 0 \qquad (*)$

Las raíces del polinomio $x^2 - 6x + (11 - k)$ son:

$$x = \frac{1}{2}[\, 6 \pm \sqrt{36 - 44 + 4k}\,] = 3 \pm \sqrt{k - 2}$$

lo que implica que $3 - \sqrt{k-2} = 0 \quad \wedge \quad 3 + \sqrt{k-2} = r$

$\Rightarrow \quad k = 11 , \quad r = 6 .$ Además, $2k - 5r = 22 - 30 = -8 .$

2.15 EJERCICIO .- Halle la suma de los cuadrados de las raíces del polinomio $P(x) = (k-1)x^2 + (5-2k)x + 4k + 5$, si una de las raíces es la recíproca de la otra.

SOLUCIÓN .- Sean r y $\frac{1}{r}$ las raíces de $P(x)$; entonces

$$-\frac{(5-2k)}{k-1} = r + \frac{1}{r} \quad , \quad \frac{4k+5}{k-1} = (r)(\tfrac{1}{r}) = 1$$

De la segunda ecuación obtenemos $k = -2$, y reemplazando en la primera resulta: $r^2 - 3r + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad r = \frac{1}{2}(3 \pm \sqrt{5})$

Eligiendo $r = \frac{1}{2}(3 + \sqrt{5})$ tenemos que $\frac{1}{r} = \frac{1}{2}(3 - \sqrt{5})$.

Por lo tanto, la suma de los cuadrados de las raíces es igual a

$$r^2 + (\tfrac{1}{r})^2 = \frac{1}{4}(28) = 7$$

2.16 EJERCICIO .- Determine cuál es el mayor valor que puede tomar la expresión cuadrática

$$A = -4x^2 + 8x + 15 \quad , \quad x \in \mathbb{R}$$

e indique aquel valor de x para el cual esto ocurre.

SOLUCIÓN .- Completando cuadrados se tiene que

$$A = -4(x^2 - 2x + 1 - 1) + 15 = -4(x-1)^2 + 4 + 15$$

$$\Rightarrow \quad A = -4(x-1)^2 + 19 \quad , \quad \underline{\forall\, x \in \mathbb{R}}$$

Y como $-4(x-1)^2 \le 0 \quad , \quad \underline{\forall\, x \in \mathbb{R}}$, entonces

$$A = -4(x-1)^2 + 19 \le 0 + 19 = 19 \quad , \quad \underline{\forall\, x \in \mathbb{R}} .$$

Por lo tanto, A toma su mayor valor posible: $A = 19$, para $x = 1$.

2.17 EJERCICIO .- Para dos números reales a y b, la suma de uno de ellos con el doble del otro es 18, y el producto de ellos es el mayor posible. Halle a y b.

SOLUCIÓN .- Por hipótesis, $a + 2b = 18$, y

$$ab = (18 - 2b)b = -2[\, b^2 - 9b + (\tfrac{9}{2})^2 - (\tfrac{9}{2})^2 \,]$$

$$\Rightarrow \quad ab = -2(b - \tfrac{9}{2})^2 + \frac{81}{2} \le \frac{81}{2} \quad , \quad \underline{\forall\, b \in \mathbb{R}}$$

Y como este producto ab debe tomar su mayor valor posible, esto se presenta cuando $\underline{b = 9/2}$, de modo que este mayor valor posible resulta $ab = 81/2$. El valor de a correspondiente es $a = 9$. Es decir, $a = 9$, $b = 9/2$.

2.18 EJERCICIO .- Sea A el mayor número real tal que:

$4 + 2x + 5x^2 \ge A$, $\underline{\forall\, x \in \mathbb{R}}$, y B el menor número real tal que

$4 - 2x - 5x^2 \le B$, $\underline{\forall\, x \in \mathbb{R}}$. Halle $10A - 5B$.

SOLUCIÓN.- Completando cuadrados y como: $4 + 2x + 5x^2 = 5(x + \frac{1}{5})^2 + \frac{19}{5} \ge \frac{19}{5}$, $\underline{\forall\, x \in \mathbb{R}}$, entonces el mayor número real A tal que:

$4 + 2x + 5x^2 \ge A$, $\underline{\forall\, x \in \mathbb{R}}$, es $\underline{A = \frac{19}{5}}$ para $x = -\frac{1}{5}$.

Y como: $4 - 2x - 5x^2 = -5(x + \frac{1}{5})^2 + \frac{21}{5} \le \frac{21}{5}$, $\underline{\forall\, x \in \mathbb{R}}$,

entonces el menor número real B tal que: $4 - 2x - 5x^2 \le B$, $\underline{\forall\, x \in \mathbb{R}}$, es $\underline{B = \frac{21}{5}}$, para $x = -\frac{1}{5}$. Luego, $10A - 5B = 10(\frac{19}{5}) - 5(\frac{21}{5}) = 17$.

2.19 EJERCICIO .- Dada la ecuación cuadrática: $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$, con raíces r y s , halle (sin resolver la ecuación) una ecuación cuadrática cuyas raíces son r^3 y s^3.

SOLUCIÓN .- Por hipótesis: $r + s = -b/a$, $rs = c/a \quad \ldots \quad (\alpha)$

y como $r^3 + s^3 = (r+s)^3 - 3rs(r+s)$, entonces

$$r^3 + s^3 = (-\tfrac{b}{a})^3 - 3(\tfrac{c}{a})(-\tfrac{b}{a}) = (3abc - b^3)/a^3 \quad , \quad r^3 s^3 = c^3/a^3$$

y denotando: $r_1 = r^3$ y $s_1 = s^3$ las raíces de la nueva ecuación, ésta viene a ser:

$$x^2 - (r_1 + s_1)x + r_1 s_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad x^2 - (\frac{3abc - b^3}{a^3})x + \frac{c^3}{a^3} = 0$$

$$\Rightarrow \quad a^3 x^2 - (3abc - b^3)x + c^3 = 0 .$$

SERIE DE EJERCICIOS

1. Halle el conjunto de valores de k para que la ecuación $x^2 + kx = 2$ tenga dos raíces, una de las cuales es 1.
2. Si $\{r, s\}$ con $r > s$, es el conjunto solución de la ecuación: $15x^2 - 22x + 8 = 0$, halle la ecuación cuadrática cuyo conjunto solución es $\{1/r, -1/s\}$.
3. Halle el conjunto de valores de k para los que x tome valores reales en la ecuación $x^2 + 3k + 1 = (k + 2)x$.
4. Halle el conjunto de valores de m para que la siguiente ecuación NO TENGA SOLUCIONES REALES: $(m + 5)x^2 + 3mx - 4(m - 5) = 0$.
5. Halle el conjunto de valores de m para que el trinomio:
$$x^2 - 15x - m(2x - 8) = 0$$
tenga raíces iguales; es decir, para que sea un cuadrado perfecto.
6. Si r y s son las raíces de la ecuación: $6 + (1/x) = x$, halle el valor de $A = 2(r + s)/(rs)$.
7. Halle el valor de k para que la ecuación $(k + 1)x^2 - 2(k - 1)x + k = 0$ admita dos raíces iguales.
8. Dado el sistema: $\begin{cases} y = x^2 - 2x - 15 \\ y = m(x + 5) \end{cases}$, si $y = 9$ satisface el sistema, halle la suma de los posibles valores de m.
9. Dado el trinomio: $ax^2 + bx + c$, demuestre que:
   a) Si la suma de sus raíces es igual a su producto, entonces $b + c = 0$.
   b) Si una raíz es la negativa de la otra, entonces $b = 0$.
   c) Si una raíz es el doble de la otra, entonces $2b^2 = 9ac$.
10. Sean r y s las raíces de la ecuación $ax^2 + ax + c = 0$, con $r > s$. Halle el valor de: $r^2 - s^2$.
11. Si las raíces de $x^2 + mx + n = 0$ son las recíprocas de las de la ecuación $4x^2 + 8x - 5 = 0$, hallar el valor del producto mn.
12. La ecuación cuadrática $mx^2 - 3x + q = 0$ tiene por raíces a los ***números reales***
$$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a} + \sqrt{a+m}} \quad \text{y} \quad \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a} - \sqrt{a-m}},$$
halle el valor de a.
13. Si las raíces del polinomio $P(x) = 2x^2 - 6x + c$ son ***reales positivos***, encuentre la suma de los posibles valores ***enteros*** de c.

14. Exprese en intervalos el conjunto $A = \{a \in \mathbb{R} / \mathbb{R}$ es el conjunto solución de $ax^2 - 6x + a^2 > 2ax - 3x^2 - 1\}$.

CLAVE DE RESPUESTAS

1. $k = 1$, $x_2 = -2$; 2. $8x^2 + 2x - 15 = 0$;
3. $\Delta \geq 0$, $\langle -\infty, 0] \cup [8, \infty\rangle$; 4. $\langle -4, 4\rangle$;
5. $m \in \{3, 5\}$; 6. $A = 12$; 7. $k = 1/3$; 8. $108/11$
10. $-(1/a)\sqrt{a^2 - 4ac}$; 11. $32/25$; 12. $a = 3/2$ (positivo).
13. $\Delta \geq 0$: $36 - 8c \geq 0 \Rightarrow c \leq 9/2$, así, $c \in \langle 0, \frac{9}{2}] \cap \mathbb{Z} = \{1, 2, 3, 4\}$, SUMA $= \{1 + 2 + 3 + 4\} = 10$. Ver la pág. 129.
14. $\mathbb{R}$ es el conjunto solución de: $(a + 3)x^2 - 2(a + 3)x + (a^2 + 1) > 0 \Leftrightarrow$ $[(a + 3) > 0 \wedge \Delta < 0] \vee [(a + 3) = 0 \wedge (a^2 + 1) > 0]$; $\Leftrightarrow$ $A = (\langle -3, -1\rangle \cup \langle 2, \infty\rangle) \cup \{-3\} = [-3, -1\rangle \cup \langle 2, \infty\rangle$.

3. ECUACIONES REDUCIBLES A LA FORMA CUADRÁTICA

Son aquellas ecuaciones que tienen la forma general:

$$aw^2 + bw + c = 0 \qquad (*)$$

o las que pueden transformarse a esta forma $(*)$, donde $w = f(x)$; es decir, donde w es una función de x.

Por ejemplo, la ecuación $x^4 + 2x^2 - 24 = 0 \qquad (\alpha)$

se transforma, haciendo $x^2 = w$, en: $w^2 + 2w - 24 = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow (w + 6)(w - 4) = 0 \Rightarrow w = -6 \vee w = 4$ es decir,
$x^2 = -6 \vee x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm i\sqrt{6} \vee x = \pm 2$.

De esta forma hemos hallado todas las raíces de la ecuación original (α): dos imaginarias complejas y dos reales, respectivamente.

3.1 EJERCICIO.- Resuelva: $8x^6 - 215x^3 - 27 = 0$.

SOLUCIÓN.- Haciendo $x^3 = w$ la ecuación se transforma en forma equivalente en la ecuación $8w^2 - 215w - 27 = 0 \Rightarrow (8w + 1)(w - 27) = 0$

$\Rightarrow w = -\frac{1}{8} \vee w = 27$

$\Rightarrow x = -\frac{1}{2} \vee x = 3$, pues $x = \sqrt[3]{w}$.

3.2 EJEMPLO .- Halle las raíces reales de la ecuación:

$$3x + 11\sqrt{x-2} - 10 = 0 \qquad (\alpha)$$

SOLUCIÓN.- Haciendo $w = \sqrt{x-2}$, resulta $w \geq 0$, de modo que (α) se transforma en: $3(w^2+2) + 11w - 10 = 0 \Rightarrow 3w^2 + 11w - 4 = 0$

$\Rightarrow \quad (3w-1)(w+4) = 0 \quad \Rightarrow \quad w = \frac{1}{3} \quad \vee \quad w = -4$

donde la 'solución ' $w = -4$ se descarta pues debe ser $w \geq 0$. Luego, $x = w^2 + 2 = (1/3)^2 + 2 = 19/9$.

3.3 EJERCICIO .- Halle las raíces reales de la ecuación:

$$8(x-3)^4 - 38(x-3)^2 + 9 = 0 \qquad (\beta)$$

SOLUCIÓN .- Hacemos $w = (x-3)^2$, entonces (β) se transforma en:

$8w^2 - 38w + 9 = 0 \quad \Rightarrow \quad (4w-1)(2w-9) = 0 \quad \Rightarrow$

$w = \frac{1}{4} = (x-3)^2 \quad \vee \quad w = \frac{9}{2} = (x-3)^2 \quad \Rightarrow$

$x = 3 \pm \frac{1}{2} \quad \vee \quad x = 3 \pm \frac{3}{\sqrt{2}}$. Por lo tanto,

C. S. $= \{ \frac{7}{2}, \frac{5}{2}, 3 + \frac{3\sqrt{2}}{2}, 3 - \frac{3\sqrt{2}}{2} \}$

3.4 DEFINICIÓN .- Se llaman **ECUACIONES BICUADRADAS** a aquellas que solamente contienen potencias pares de la variable, como por ejemplo,

a) $3x^4 + 2x^2 - 1 = 0$

b) $6x^8 - 5x^6 - 2x^4 + x^2 + 9 = 0$

3.5 EJERCICIO .- En la ecuación: $2x^2 - (m^2+1)x + (m^2+3) = 0$, ¿Qué valor debe darse a m para que las raíces difieran en 1 ?

SOLUCIÓN .- En la ecuación general $ax^2 + bx + c = 0$, la diferencia de las raíces es igual a:

$$\frac{1}{a}\sqrt{b^2 - 4ac}$$

Luego,

$$\sqrt{(m^2+1)^2 - 8(m^2+3)} = a = 2 \quad \Rightarrow \quad m^4 - 6m^2 - 27 = 0$$

$\Rightarrow \quad m \in \{ \pm 3 , \pm i\sqrt{3} \}$. Verificando:

a) para $m^2 = 9$: $x^2 - 5x + 6 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_1 = 2 , x_2 = 3$

b) para $m^2 = -3$: $2x^2 + 2x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_1 = -1 , x_2 = 0$.

4. ECUACIONES RECÍPROCAS

Dado un polinomio $P(x)$, a la ecuación $(*)$: $\underline{P(x) = 0}$ se le llama una ECUACIÓN RECÍPROCA si la ecuación dada se transforma en una ecuación idéntica al reemplazar x por su recíproco $\frac{1}{x}$.

En estas ecuaciones recíprocas, el polinomio $P(x)$ recibe el nombre de POLINOMIO RECÍPROCO.

Por ejemplo, la ecuación $2x^2 - 5x + 2 = 0$ ***es una Ecuación Recíproca,*** pues al reemplazar x por su recíproco $\frac{1}{x}$ se obtiene

$$2(\frac{1}{x})^2 - 5(\frac{1}{x}) + 2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{2 - 5x + 2x^2}{x^2} = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad 2x^2 - 5x + 2 = 0$$

que viene a ser la misma ecuación original.

4.1 NOTA .- De la definición dada se sigue que si una Ecuación Recíproca tiene como una raíz x_1 entonces también tiene como raíz al recíproco $\frac{1}{x_1}$.

Esto lo podemos comprobar en el ejemplo previo, pues

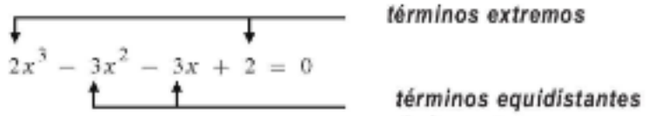
$$2x^2 - 5x + 2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x-2)(2x-1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad x = 2 \quad \text{y} \quad x = \frac{1}{2} .$$

4.2 CARACTERÍSTICAS DE LAS ECUACIONES RECÍPROCAS

Las Ecuaciones Recíprocas $P(x) = 0$ tienen sus coeficientes que satisfacen algunas características interesantes, resultando estas ecuaciones solamente de uno de los dos tipos siguientes:

I) Cuando los coeficientes de los términos extremos de $P(x)$ son idénticos (incluso en el signo), así como los coeficientes de los términos equidistantes de los extremos. Por ejemplo,



Resolveremos esta ecuación buscando de primera intención sus raíces racionales (MÉTODO DE RUFFINI) :

	2	−3	−3	2
−1		−2	5	−2
	2	−5	2	0
2		4	−2	
	2	−1	0	

$\Rightarrow \quad 2x^3 - 3x^2 - 3x + 2 = (x+1)(x-2)(2x-1) = 0$.

Luego, las raíces son: $x = -1$, $x = 2$, $x = 1/2$.

En este caso (I) ***si la ecuación es de grado PAR*** el término intermedio está fuera de la regla como en la ecuación $2x^2 - 5x + 2 = 0$.

II) También se tiene una Ecuación Recíproca $P(x) = 0$ cuando los coeficientes de los términos equidistantes de los extremos (así como éstos) de $P(x)$ son iguales en magnitud pero de signos opuestos. Por ejemplo,

términos extremos

$$3x^3 - 13x^2 + 13x - 3 = 0$$

términos equidistantes de los extremos.

Factorizando, por el Método de Ruffini,

$$(x-1)(x-3)(3x-1) = 0$$

hallamos el Conjunto Solución: C.S. $= \{1 , 3 , \frac{1}{3}\}$

En este caso (II) ***si la ecuación recíproca es de grado PAR***, el término intermedio está fuera de regla.

4.3 OBSERVACIONES .-

a) Si $P(x) = 0$ es una ecuación Recíproca de la clase (I) y es de GRADO IMPAR entonces tiene como una raiz al número -1 .

b) Si $P(x) = 0$ es una ecuación Recíproca de la clase (II) y es de GRADO IMPAR, entonces tiene por lo menos la raíz: 1 .

c) Si $P(x) = 0$ es una ecuación Recíproca de la clase (II) y es de GRADO PAR, entonces por lo menos tiene las raíces: 1 y -1 .

Por ejemplo, $x^4 + 2x^3 - 2x - 1 = 0$

$\Leftrightarrow \quad (x-1)(x+1)(x^2+2x+1) = 0$

$\Leftrightarrow \quad (x-1)(x+1)(x+1)^2 = 0$

luego, C.S. $= \{1 , -1$ (***de multiplicidad tres***) $\}$.

4.4 EJERCICIO .- Resuelva la ecuación recíproca:

$$6x^4 + 5x^3 - 38x^2 + 5x + 6 = 0$$

SOLUCIÓN .- Factorizando, por el método de Ruffini, obtenemos:

$$(x-2)(x-\tfrac{1}{2})(x+3)(6x+2) = 0$$

Luego, C.S. $= \{2 , 1/2 , -3 , -1/3\}$

4.5 NOTA .- Cuando se tiene una Ecuación Recíproca $P(x) = 0$, con $P(x)$ de GRADO PAR, entonces mediante la sustitución

$$z = x + \frac{1}{x}$$

se obtiene una ecuación de GRADO MITAD DE LA ORIGINAL ***en la variable*** z .

Por ejemplo, en la ecuación recíproca:

$$x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 3x + 1 = 0$$

si dividimos por x^2, obtenemos (reordenando) :

$$(x^2 + \frac{1}{x^2}) - 3(x + \frac{1}{x}) + 4 = 0$$

$\Leftrightarrow \quad (z^2 - 2) - 3z + 4 = 0$

$\Leftrightarrow \quad z^2 - 3z + 2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (z-1)(z-2) = 0$

$\Leftrightarrow \quad x + \frac{1}{x} = z = 1 \quad \vee \quad x + \frac{1}{x} = z = 2$

$\Leftrightarrow \quad x^2 - x + 1 = 0 \quad \vee \quad x^2 - 2x + 1 = 0$

$\Leftrightarrow \quad x = \frac{1}{2}[\,1 \pm \sqrt{-3}\,] \quad \vee \quad (x-1)^2 = 0$

Luego, C.S. $= \{ \frac{1}{2}(1 + i\sqrt{3}) , \frac{1}{2}(1 - i\sqrt{3}) , 1$ (***doble***) $\}$

En efecto, se puede verificar rápidamente que

$$x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 3x + 1 = (x-1(x-1)(x^2 - x + 1) = 0 \quad .$$

4.6 EJEMPLO .- Resolveremos: $x^4 - x^3 + \frac{5}{4}x^2 - x + 1 = 0$, para lo cual dividimos por x^2 : $x^2 + \frac{1}{x^2} - (x + \frac{1}{x}) + \frac{5}{4} = 0$, hacemos: $z = x + \frac{1}{x}$, así es que

$$(z^2-2)-z+\frac{5}{4}=0 \quad\Leftrightarrow\quad 4z^2-4z-3=(2z-3)(2z+1)=0$$

$$\Leftrightarrow\quad x+\frac{1}{x}=z=\frac{3}{2} \quad\vee\quad x+\frac{1}{x}=z=-\frac{1}{2} \quad\Leftrightarrow$$

$$2x^2-3x+2=0 \quad\vee\quad 2x^2-x+2=0 \quad\Leftrightarrow$$

$$x\in \text{C.S.}=\{\tfrac{1}{4}(3\pm i\sqrt{7}),\ \tfrac{1}{4}(1\pm i\sqrt{15})\}.$$

SERIE DE EJERCICIOS

1. Resuelva las siguientes ecuaciones en $\mathbb{R}$:
   a) $x^4-13x^2+36=0$ d) $36x^4-13x^2+1=0$
   b) $x^4-6x^2+8=0$ e) $81x^4-45x^2+4=0$
   c) $x^4-5x^2-36=0$ f) $4x^4+7x^2-2=0$
2. Pruebe que la suma de todas las raíces posibles de la ecuación bicuadrada $x^4+px^2+q=0$ es igual a 0, y que su producto es igual a q.
3. Pruebe que la suma de todas las raíces posibles de la ecuación bicuadrada $ax^4+bx^2+c=0$ es igual a cero, y su producto es $\frac{c}{a}$.
4. Sabiendo que x_1 y x_2 son las raíces de: $x^2+bx+c=0$, establezca una ecuación cuyas raíces sean x_1, x_2, $-x_1$, $-x_2$.
5. Resuelva las ecuaciones:
   a) $2x^2+(3-2\sqrt{2})x-3\sqrt{2}=0$
   b) $\sqrt{3}y^2-8\sqrt{2}y+4\sqrt{3}=0$
   c) $16z^2-8\sqrt{2}z+1=0$, d) $z^2+2\sqrt{2}z+\sqrt{3}=0$
6. Resuelva las siguientes ecuaciones en $\mathbb{R}$:
   a) $(x^2-16x)^2-2(x^2-16x)-63=0$
   b) $(x^2+3x-4)^2+(x^2+3x+2)^2-36=0$
   c) $(\frac{1}{x}+2)^2+\frac{1}{x}=10$, d) $(\frac{1-x}{1+x})^2+(\frac{1-x}{1+x})=20$,
   e) $(\frac{x}{1+x})^2+(\frac{1+x}{x})^2=\frac{17}{4}$
   f) $(x^2-4x+5)^2-(x-1)(x-3)=4$
7. Demuestre que: $a^2+b^2=0 \Leftrightarrow a=0 \wedge b=0$.

8. Resuelva las siguientes ecuaciones, en $\mathbb{R}$:
   a) $(x^2+x+1)(x^2+x+2)=12$
   b) $\frac{x^2+2x+7}{x^2+2x+3}=x^2+2x+4$
9. Resuelva las ecuaciones recíprocas siguientes:
   a) $2x^3+7x^2+7x+2=0$ c) $4x^4-17x^3+17x-4=0$
   b) $2x^4+5x^3-5x-2=0$ d) $4x^4-6x^3+6x-4=0$
   e) $x^5-4x^4+3x^3+3x^2-4x+1=0$
   f) $12x^5-8x^4-45x^3+45x^2+8x-12=0$

CLAVE DE RESPUESTAS

1. a) ± 3, ± 2 ; b) $\pm\sqrt{2}$, ± 2 ; c) ± 3 ;
   d) $\pm\frac{1}{2}$, $\pm\frac{1}{3}$; e) $\pm\frac{1}{3}$, $\pm\frac{2}{3}$; f) $\pm\frac{1}{2}$
4. $x^4+(2c-b^2)x^2+c^2=0$
5. a) $-3/2$, $\sqrt{2}$; b) $(4\sqrt{6}\pm 2\sqrt{15})/3$; c) $(\sqrt{2}\pm 1)/4$
   d) $\frac{1}{2}(\sqrt{6}-3\sqrt{2})$, $-\frac{1}{2}(\sqrt{6}+\sqrt{2})$
6. a) $8\pm\sqrt{73}$, $8\pm\sqrt{57}$; b) ± 1, -2, -4
   c) 1, $-1/6$; d) $-2/3$, $-5/3$;
   e) 1, -2, $-1/3$, $-2/3$; f) 1, 3.
8. a) 1, -2 ; b) -1.
9. a) -1, $-\frac{1}{2}$, -2 ; b) ± 1, $-\frac{1}{2}$, -2 ;
   c) ± 1, 4, $\frac{1}{4}$; d) ± 1, $\frac{1}{4}(3\pm i\sqrt{7})$;
   e) -1, 1 (raíz doble), $\frac{1}{2}(3\pm\sqrt{5})$; f) 1, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{2}$, -2, $-\frac{1}{2}$.

Ω Ω Ω Ω Ω

7

INECUACIONES CON RADICALES

1. ECUACIONES CON RADICALES

Cuando una ecuación o inecuación contiene una expresión $f(x)$ con un radical de Orden PAR como

$$\sqrt{f(x)} \quad , \quad \sqrt[4]{f(x)} \quad , \quad \sqrt[2n]{f(x)} \quad , \quad n \in \mathbf{Z}^+$$

las soluciones reales se encuentran mediante una serie de cálculos y operaciones, pero para que estas soluciones sean válidas debe resolverse previamente la condición que

$$f(x) \geq 0$$

cuyo Conjunto Solución ***constituirá el Universo U dentro del cual se resuelve luego la ecuación o inecuación original dada***. Fundamentalmente esto es necesario hacer cuando se trate de inecuaciones con radicales.

Recordemos en estos procedimientos que la expresión $\sqrt{A}$ significa la raíz positiva $+\sqrt{A}$, y si se desea la raíz negativa se escribirá ***explícitamente*** como $-\sqrt{A}$.

Según esto tenemos las siguientes propiedades iniciales

(1) $\sqrt{x} \geq 0$, para todo $x \geq 0$.

(2) $\sqrt{x} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0$.

1.1 EJEMPLO .- Resuelva en $\mathbf{R}$: $\sqrt{x^2 - 9} = 0$.

SOLUCIÓN .- Según la propiedad (2),

$$\sqrt{x^2 - 9} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - 9 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = \pm 3 .$$

1.2 TEOREMA .- Sean a y b números reales. Entonces

$$\sqrt{a} = b \quad \Leftrightarrow \quad [\ b \geq 0 \ \wedge \ a = b^2\ ]$$

Este teorema nos indica que para resolver el tipo de ecuación con un radical, del primer miembro, se traslada el problema a una forma equivalente en donde ya no aparece la expresión radical, como la que se encuentra dentro de los corchetes. Además, el Universo $a \geq 0$ está indicado implícitamente en la relación: $a = b^2$.

1.3 EJEMPLO .- Resuelva: $\sqrt{\dfrac{x+1}{x^2-1}} = 2 \qquad (*)$

SOLUCIÓN .-

Hallaremos las soluciones utilizando el Teorema [1.2] en donde $b = 2$ satisface la condición $b \geq 0$, y resolviendo

$$\frac{x+1}{x^2-1} = 4 \ (= b^2) \quad \Leftrightarrow \quad x + 1 = 4(x^2 - 1) \ \wedge \ x \neq \pm 1$$

$$\Leftrightarrow \quad 0 = 4x^2 - x - 5 = (4x - 5)(x + 1) \ \wedge \ x \neq \pm 1$$

$$\Leftrightarrow \quad x = 5/4 \qquad [\text{ pues la solución } x = -1 \text{ no se considera }] .$$

1.4 RECUERDE .- En lo posible, al tratar con ecuaciones que involucran radicales, todas las soluciones DEBEN SER COMPROBADAS EN LA ECUACIÓN ORIGINAL puesto que algunas soluciones pueden ser extrañas.

1.5 EJERCICIO .- Resuelva: $x + \sqrt{x} - 6 = 0$, en $\mathbb{R}$.

SOLUCIÓN .- En forma equivalente se tiene: $\sqrt{x} = (6 - x)$. Empleando el Teorema [1.2] identificamos:

$$\sqrt{x} = (6 - x) \quad \Leftrightarrow \quad [\ 6 - x \geq 0 \quad \wedge \quad x = (6 - x)^2\ ]$$

$$\Leftrightarrow \quad x \leq 6 \quad \wedge \quad x = 36 - 12x + x^2$$

$$\Leftrightarrow \quad x \leq 6 \quad \wedge \quad x^2 - 13x + 36 = (x - 4)(x - 9) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad x \leq 6 \quad \wedge \quad (\ x = 4 \quad \vee \quad x = 9\ ) \quad \Leftrightarrow \quad x = 4 ,$$

que es la única solución válida. (Comprobar estos valores en la ecuación) .

1.6 EJERCICIO .- Resuelva en $\mathbb{R}$, $x + 3\sqrt{x - 1} = 11$.

SOLUCIÓN .- Universo de la ecuación: $U = [1, \infty)$, ¿por qué? . Emplearemos otro método alternativo,

$$(x-1) + 3\sqrt{x-1} - 10 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (\sqrt{x-1} + 5)(\sqrt{x-1} - 2) = 0$$

[Note que el factor $\sqrt{x-1} + 5$ ***es estrictamente positivo, nunca se hace cero en*** $\mathbb{R}$]

$$\Leftrightarrow \quad \sqrt{x-1} = 2 \quad \Leftrightarrow \quad x - 1 = 2^2 = 4$$
$$\Leftrightarrow \quad x = 5 \quad \text{(única solución)} .$$ Compruébelo en la ecuación.

1.7 EJERCICIO .- Demuestre que:

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0 \quad \wedge \quad y = 0 .$$

SOLUCIÓN .-

$$(\Rightarrow) \quad 0 \le \sqrt{x} \le \sqrt{x} + \sqrt{y} = 0 \quad \Rightarrow \quad 0 \le \sqrt{x} \le 0$$
$$\Rightarrow \quad \sqrt{x} = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0$$
$$\Rightarrow \quad \sqrt{y} = \sqrt{x} + \sqrt{y} = 0 \quad \Rightarrow \quad \sqrt{y} = 0 \quad \Rightarrow \quad y = 0 .$$

$(\Leftarrow)$ Ejercicio.

1.8 EJERCICIO .- Resuelva en $\mathbb{R}$: $\sqrt{x-4} + 4\sqrt{x-7} = 0$.

SOLUCIÓN .- $\sqrt{x-4} + \sqrt{16(x-7)} = 0$, y debido al Ejercicio [1.7]

$$\Leftrightarrow \quad x - 4 = 0 \quad \wedge \quad 16(x-7) = 0$$
$$\Leftrightarrow \quad (x = 4 \ \wedge \ x = 7) \text{ , ABSURDO, pues } x \text{ no puede valer } 4 \text{ y } 7 \text{ si-}$$

multáneamente. (Compruebe en la ecuación original).

Por lo tanto, el CONJUNTO SOLUCIÓN es el conjunto Vacio C.S. $= \varnothing$.

1.9 EJERCICIO .- Resuelva en $\mathbb{R}$: $\sqrt{(2x-1)(3x+1)} = x + 1$.

SOLUCIÓN .- $\Leftrightarrow$ Utilizando el Teorema [1.2] : $\Leftrightarrow$

$$[\ (x+1) \ge 0 \quad \wedge \quad (2x-1)(3x+1) = (x+1)^2 \ ]$$
$$\Leftrightarrow \quad x \ge -1 \quad \wedge \quad 5x^2 - 3x - 2 = 0$$
$$\Leftrightarrow \quad x \ge -1 \quad \wedge \quad (5x+2)(x-1) = 0$$
$$\Leftrightarrow \quad x \in [-1, \infty) \quad \wedge \quad (\ x = -2/5 \quad \vee \quad x = 1 \ )$$

Por lo tanto, el Conjunto Solución es C.S. $= \{-2/5 , 1\}$.

Recuerde que es conveniente que compruebe ambas soluciones en la ecuación original.

1.10 ECUACIONES CON VARIOS RADICALES

Cuando en una sola ecuación existen k radicales, entonces se deben calcular los Universos relativos $U_1 , U_2 , \ldots , U_k$, para cada radical, los cuales al ser intersectados constituirán el UNIVERSO GENERAL U :

$$U = U_1 \cap U_2 \cap \ldots \cap U_k$$

dentro del cual recién se procede a resolver la relación dada. ***De esta manera se controla que no se introduzcan soluciones extrañas.***

1.11 EJEMPLO .- Resuelva en $\mathbb{R}$: $\sqrt{x^2 - 6x + 5} \cdot \sqrt{x - 9} = 0 \quad (*)$

SOLUCIÓN .-

PASO I : CÁLCULO DEL UNIVERSO GENERAL $U = U_1 \cap U_2$,

$U_1 =$ Universo relativo del radical $\sqrt{x^2 - 6x + 5}$:

$$x^2 - 6x + 5 \ge 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x-1)(x-5) \ge 0 \quad \Leftrightarrow$$
$$x \in \langle -\infty , 1] \cup [5 , \infty \rangle = U_1$$

$U_2 =$ Universo relativo del radical $\sqrt{x - 9}$:

$$x - 9 \ge 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \in [9 , \infty \rangle = U_2$$

Por lo tanto, el Universo (general) es: $U = U_1 \cap U_2 = [9 , \infty \rangle$

PASO II : SOLUCIÓN DE LA ECUACIÓN DENTRO DE $U = [9 , \infty \rangle$,

$$(*) \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{x^2 - 6x + 5} = 0 \quad \vee \quad \sqrt{x - 9} = 0$$
$$\Leftrightarrow \quad x^2 - 6x + 5 = 0 \quad \vee \quad x - 9 = 0$$
$$\Leftrightarrow \quad (x-1)(x-5) = 0 \quad \vee \quad x - 9 = 0$$
$$\Leftrightarrow \quad [\ x = 1 \quad \vee \quad x = 5 \ ] \quad \vee \quad x = 9$$

Por lo tanto, la única solución válida es $x = 9$, pues es la única que se encuentra en el UNIVERSO $U = [9 , \infty \rangle$.

1.12 EJERCICIO .- Resolver en $\mathbb{R}$: $\sqrt{x^2 - 6x + 5} \cdot \sqrt{x + 3} = 0$

SOLUCIÓN.- Se verifica fácilmente que el Universo General de la ecuación dada es

$$U = [-3 , 1] \cup [5 , \infty \rangle$$

Luego, resolviendo la ecuación dentro del Universo hallado:

$$\Leftrightarrow \quad \sqrt{x^2 - 6x + 5} = 0 \quad \vee \quad \sqrt{x + 3} = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad x^2 - 6x + 5 = 0 \quad \vee \quad x + 3 = 0$$
$$\Leftrightarrow \quad x = 1 \ \vee \ x = 5 \quad \vee \quad x = -3$$

Luego, $x \in \{ 1 , 5 , -3 \}$ = C.S. (las tres soluciones válidas).

1.13 EJERCICIO .- Resuelva en $\mathbb{R}$:

$$\sqrt{x^2 - 2x + 6} + \sqrt{x^2 - 6x + 10} = 4$$

SOLUCIÓN .- Como ambas expresiones cuadráticas son *estrictamente* ***positivas*** $\forall \ x \subset \mathbb{R}$, entonces el UNIVERSO GENERAL es: $\langle -\infty , \infty \rangle$.

Resolviendo la ecuación,

$$\sqrt{x^2 - 2x + 6} = 4 - \sqrt{x^2 - 6x + 10} \quad , \quad \text{y elevando al cuadrado:}$$
$$x^2 - 2x + 6 = 16 - 8\sqrt{x^2 - 6x + 10} + x^2 - 6x + 10$$
$$\sqrt{x^2 - 6x + 10} = \frac{5 - x}{2} \quad , \text{ (aquí utilizamos el TEOREMA [1.2]):}$$
$$\Leftrightarrow \quad \frac{5 - x}{2} \geq 0 \quad \wedge \quad x^2 - 6x + 10 = \left(\frac{5 - x}{2}\right)^2$$
$$\Leftrightarrow \quad x \leq 5 \quad \wedge \quad 3x^2 - 14x + 15 = 0 = (3x - 5)(x - 3)$$
$$\Leftrightarrow \quad x \leq 5 \quad \wedge \quad (\ x = 3 \ \vee \ x = 5/3 \ )$$

Por lo tanto, el Conjunto Solución es C.S. = $\{ 3 , 5/3 \}$.
Compruebe estos valores en la ecuación original . Este es un CONSEJO VALIOSO .

1.14 EJERCICIO .- Resuelva en $\mathbb{R}$: $\sqrt{x - 1} \cdot \sqrt{10x + 5} = x + 3$

SOLUCIÓN .- El Universo General de la ecuación es:

$$U = [1, \infty\rangle \cap [-1/2 , \infty\rangle = [1 , \infty\rangle \qquad (\alpha)$$

Resolviendo, dentro de U, y según el Teorema [1.2],

$$\Leftrightarrow \quad x + 3 \geq 0 \quad \wedge \quad (x - 1)(10x + 5) = (x + 3)^2$$
$$\Leftrightarrow \quad x \geq -3 \quad \wedge \quad 9x^2 - 11x - 14 = 0 = (9x + 7)(x - 2)$$
$$\Leftrightarrow \quad x \geq -3 \quad \wedge \quad [\ x = 2 \quad \vee \quad x = -7/9 \ ]$$
$$\Leftrightarrow \quad x = 2 \quad \vee \quad x = -7/9$$

De estos dos valores descartamos $x = -7/9$ por no pertenecer al Universo U determinado en (α). Por lo tanto, ***LA ÚNICA SOLUCIÓN*** es $\underline{x = 2}$.

1.15 EJERCICIO .- Resuelva en $\mathbb{R}$, la ecuación

$$\sqrt{x^2 - 21x + 90} - \sqrt{x^2 + 3x - 54} = x - 6$$

SOLUCIÓN .- $\sqrt{(x - 15)(x - 6)} - \sqrt{(x + 9)(x - 6)} = (x - 6)$

Verifique que el Universo General es
$U = \langle -\infty , -9] \cup \{ 6 \} \cup [15 , \infty \rangle$

Y resolviendo dentro de U,

$$\sqrt{(x - 15)(x - 6)} = (x - 6) + \sqrt{(x + 9)(x - 6)} \quad \Rightarrow$$

$$(x - 15)(x - 6) = (x - 6)^2 + 2(x - 6)\sqrt{(x + 9)(x - 6)} + (x + 9)(x - 6)$$

a) Si $x = 6$, entonces se cumple esta ecuación; *o*
b) Si $x \neq 6$, cancelamos el factor $(x - 6)$ y obtenemos

$$x - 15 = x - 6 + 2\sqrt{(x + 9)(x - 6)} + (x + 9) \quad \wedge \quad x \in U$$
$$\Leftrightarrow \quad 2\sqrt{(x + 9)(x - 6)} = -(x + 18) \quad \wedge \quad x \in U$$
$$\Leftrightarrow \quad -(x + 18) \geq 0 \quad \wedge \quad x \in U \quad \wedge \quad 4(x + 9)(x - 6) = (x + 18)^2$$
$$\Leftrightarrow \quad x \leq -18 \quad \wedge \quad (x - 18)(x + 10) = 0 \quad \wedge \quad x \in U$$
$$\Leftrightarrow \quad x \leq -18 \quad \wedge \quad [\ x = 18 \quad \vee \quad x = -10 \ ] \quad \wedge \quad x \in U$$
$$\Leftrightarrow \quad x \in \varnothing \quad \text{(VACÍO)}$$

Por lo tanto, de (a) y (b) obtenemos ***LA ÚNICA SOLUCIÓN VÁLIDA*** $\underline{x = 6}$.

1.16 EJERCICIO .- Resuelva en $\mathbb{R}$: $6x^2 + 10x + \sqrt{3x^2 + 5x + 1} = -1$.

SOLUCIÓN .- El Universo General debido al radical es:

$$U = \langle -\infty , -\frac{5}{6} - \frac{\sqrt{13}}{6} \ ] \cup [-\frac{5}{6} + \frac{\sqrt{13}}{6} , \infty \rangle$$
$$= \langle -\infty , -1.43 \ ] \cup [-0.23 , \infty \rangle$$

Ahora resolvemos la ecuación, transformándola previamente:

$$2(3x^2 + 5x + 1) + \sqrt{3x^2 + 5x + 1} - 1 = 0$$

y haciendo $w = \sqrt{3x^2 + 5x + 1} \qquad (\Rightarrow \quad w \geq 0)$,

$$\Leftrightarrow \quad 2w^2 + w - 1 = 0 = (2w - 1)(w + 1)$$
$$\Leftrightarrow \quad w = \frac{1}{2} = \sqrt{3x^2 + 5x + 1} , \quad [\ \vee \ w = -1 = \sqrt{3x^2 + 5x + 1} \ ]$$
$$\text{ABSURDO}$$

Por lo tanto, todo se reduce a resolver, dentro de U, la ecuación

$$\sqrt{3x^2+5x+1} = \frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad 12x^2+20x+3 = 0$$
$$\Leftrightarrow \quad (6x+1)(2x+3) = 0$$
$$\Leftrightarrow \quad x \in \{-1/6\ ,\ -3/2\} = \text{C.S.}$$

Note que ambas soluciones indicadas se encuentran dentro del Universo U .

SERIE DE EJERCICIOS

1. Sin resolverlas explique por qué no tienen raices las ecuaciones

   a) $\sqrt{x-1} + \sqrt{x-2} = 0$ b) $\sqrt{4-x} + \sqrt{x-4} = 5$

   c) $\sqrt{x^2+4} + \sqrt{x-1} = -2$ d) $\sqrt{x} + \sqrt{x-6} = 2$

   e) $\sqrt{x-3} - \sqrt{1-x} = \sqrt[3]{x^2+x+2}$

2. Determine el Dominio o Universo para las incógnitas de las ecuaciones

   a) $\sqrt{x-2} = 3$ b) $\sqrt{x+1} - \sqrt{x-4} = 5$

   c) $\sqrt{x+1} + \sqrt{4-x} = 4$ d) $\sqrt{2x-6} - \sqrt{1+x} = 2$

3. Resuelva:

   a) $\sqrt{x-2} = 3$ b) $\sqrt{x^2-4} = \sqrt{5}$

   c) $\sqrt{x+4} - \sqrt{x-4} = 0$ d) $\sqrt{5x+1} = \sqrt{2x+10}$

   e) $(25+\sqrt{x-4})^{1/5} = 2$ f) $(3x+8)^{1/3} = (x^2-2)^{1/3}$

   SUG : Un radical de orden IMPAR tiene el mismo signo que su expresión subradical (radicando) , y puede tomar valores positivos, negativos, o cero.

4. Resuelva :

   a) $\sqrt{2x+1} = 1-x$, b) $\sqrt[3]{14x-1} \cdot \sqrt[3]{x-1} = x+1$

   d) $\sqrt{4x+15} = 2x$, c) $\sqrt[4]{x^2-5} \cdot \sqrt[4]{6x^2+10} = 4$

   e) $\sqrt{5-x} = 2x$, f) $\sqrt{2x} - \sqrt{x+1} - 1 = 0$

5. Resuelva :

   a) $\sqrt{2x-\sqrt{x-4}} - \sqrt{x+4} = 0$

   b) $\sqrt{4x-3} = (3x-1)/(\sqrt{3x-5})$

   c) $\sqrt{x^2-11} = 2x-7$, d) $\sqrt[3]{x^3-5x-4} = x-1$

   e) $\sqrt{11-\sqrt[3]{x^2+7}} = 3$, f) $\sqrt[3]{24+\sqrt{x^2+5}} = 3$

   g) $\sqrt{x^2-2x-1} + 5 = 14/(\sqrt{x^2-2x-1})$

6. Resuelva :

   a) $x+2\sqrt{x}-8 = 0$ b) $\sqrt{\frac{x+10}{x-6}} + \sqrt{\frac{x-6}{x+10}} - \frac{34}{15} = 0$

   c) $\sqrt[3]{\frac{5x+4}{x-1}} + \sqrt[3]{\frac{x-1}{5x+4}} = \frac{5}{2}$

   d) $\frac{x+1}{x} - \sqrt{\frac{x+1}{x}} - 2 = 0$

   e) $\sqrt{x^2-2x+1} = x^2-3$

   f) $\sqrt{(x-2)^2} + \sqrt{(x+1)^2} = \sqrt{(x+2)^2}$

7. Resuelva : a) $\sqrt{4x^2+9x+5} - \sqrt{x^2-1} = \sqrt{2x^2+x-1}$

   b) $(x-2)^2 - 4(x-2) + \sqrt{x}(4-\sqrt{x}) = 0$

   SUG: (b) $\Leftrightarrow$ $(\sqrt{x}-2)^2 = ([x-2]-2)^2 = (\sqrt{x}-2)^2(\sqrt{x}+2)^2$

   c) $\sqrt{2x+3} + \sqrt{3x-2} - \sqrt{2x+1} = \sqrt{3x}$

8. Dada la ecuación: $\frac{1}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}} + \sqrt{x} + \sqrt{1+x} = 4$,

   el valor de x que la satisface es $x = \frac{c}{d}$, con c y d enteros primos entre sí. Halle el valor de $c^2 - 4d$.

   SUG: Pruebe que la ecuación dada es equivalente a: $\sqrt{x+1} = 2-\sqrt{x}$.

9. Resuelva: a) $\sqrt{2+\sqrt{x-5}} = \sqrt{13-x}$

   b) $3x + \sqrt{6x+10} = 35$ c) $\frac{\sqrt{4x+20}}{4+\sqrt{x}} = \frac{4-\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$

d) $\sqrt{2x+1} + 2\sqrt{x} = \dfrac{21}{\sqrt{2x+1}}$

e) $\dfrac{2}{x+\sqrt{2-x^2}} + \dfrac{2}{x-\sqrt{2-x^2}} = x$

CLAVE DE RESPUESTAS

2. a) $[2,\infty\rangle$ b) $[4,\infty\rangle$ c) $[-1,4]$ d) $[3,\infty\rangle$
3. a) 11 b) ± 3 c) $\varnothing$ d) 3 ; e) 53 , f) $\{-2,5\}$
4. a) 0 b) 0 , 2, 9 c) ± 3 d) 5/2 e) 1 f) 8
5. a) $\{4,5\}$ b) 7 c) 6 d) $\{3,-1/3\}$ e) ± 1
   f) ± 2 g) $1 \pm \sqrt{6}$ 6. a) 4 6. b) $\{-19,15\}$
6. c) $\{4,-11/13\}$; d) 1/3 ; e) $\{2,(-1-\sqrt{17})/2\}$;
   f) $\{3,1\}$; 7.a) $\{5,-1\}$, 7. b) 4 , 7. c) 3 .
8. $x = \dfrac{9}{16}$, c = 9 , d = 16 , $c^2 - 4d = 17$.
9. a) 9 , b) 9 , c) 4 , d) 4 , e) $\{0, \pm\sqrt{3}\}$

2. INECUACIONES CON RADICALES

2.1 LEMA .- Sean x , y , números reales ; entonces

$$0 \le \sqrt{x} \le \sqrt{y} \quad \Leftrightarrow \quad 0 \le x \le y$$

PRUEBA .-

$$0 \le x \le y \quad \Leftrightarrow \quad 0 \le (\sqrt{x})^2 \le (\sqrt{y})^2$$
$$\Leftrightarrow \quad 0 \le \sqrt{x} \le \sqrt{y} \ .$$

Este último resultado es debido al teorema que dice que: si $a \ge 0$, y $b \ge 0$, entonces : $a^2 \le b^2 \Leftrightarrow a \le b$.

2.2 LEMA.- Sean x , y , números reales; entonces

$$0 \le \sqrt{x} < \sqrt{y} \quad \Leftrightarrow \quad 0 \le x < y$$

2.3 EJERCICIO .- Resuelva : $\sqrt{x^2-3} \ge \sqrt{2x}$.

SOLUCIÓN .- Utilizando el LEMA [2.1] ,

$$0 \le \sqrt{2x} \le \sqrt{x^2-3} \quad \Leftrightarrow \quad 0 \le 2x \le x^2-3$$
$$\Leftrightarrow \quad [\ 0 \le 2x \ \wedge \ 2x \le x^2-3\ ]$$
$$\Leftrightarrow \quad [\ x \ge 0 \ \wedge \ 0 \le x^2-2x-3 = (x-3)(x+1)\ ]$$
$$\Leftrightarrow \quad x \in [0,\infty\rangle \cap (\langle -\infty,-1] \cup [3,\infty\rangle) = [3,\infty\rangle$$

$\therefore$ Conjunto Solución C.S. $= [3,\infty\rangle$.

2.4 EJERCICIO .- Resuelva : $\sqrt{x^2-4x+3} < \sqrt{x^2-7x+12}$ (*)

SOLUCIÓN .- Utilizando el LEMA [2.2] ,

$$(*) \Leftrightarrow \quad 0 \le x^2-4x+3 < x^2-7x+12$$
$$\Leftrightarrow \quad [\ x^2-4x+3 \ge 0 \ \wedge \ x^2-4x+3 < x^2-7x+12\ ]$$
$$\Leftrightarrow \quad (x-3)(x-1) \ge 0 \ \wedge \ 3x < 9$$
$$\Leftrightarrow \quad x \in (\langle -\infty,1] \cup [3,\infty\rangle) \cap \langle -\infty,3\rangle$$
$$\Leftrightarrow \quad x \in \langle -\infty,1] = \text{C.S.}$$

2.5 OBSERVACIONES .- En los LEMAS [2.1] y [2.2] están calculados implícitamente los Universos o Dominios de las incógnitas.

2.6 TEOREMA .- Si n es un entero positivo PAR , entonces

$$\sqrt[n]{x} \le \sqrt[n]{y} \quad \Leftrightarrow \quad 0 \le x \le y$$
$$\sqrt[n]{x} < \sqrt[n]{y} \quad \Leftrightarrow \quad 0 \le x < y$$

2.7 EJERCICIO .- Resuelva:

a) $\sqrt{x-5} \ge -2$ b) $\sqrt{x+1} \le 0$

c) $\sqrt{x+1} < 0$ d) $\sqrt[4]{x+6} < -7$

SOLUCIÓN .- Sabemos que si n es PAR , $\sqrt[n]{A}$ es ≥ 0 ***PARA TODO*** x en ***su Universo*** .

a) Como $\sqrt{x-5}$ es SIEMPRE ≥ 0 , y por lo tanto MAYOR que cualquier número negativo, entonces

$$\sqrt{x-5} \ge 0 > -2 \ , \quad \text{válido } \forall\ x \in \underline{\text{U (Universo)} = [5,\infty\rangle} \ ,$$

$$\Rightarrow \quad \sqrt{x-5} > -2 \ , \quad \forall\ x \in \text{U} = \text{C.S.} = \text{Conjunto Solución.}$$

Así, el conjunto Solución C.S. resulta ser TODO EL UNIVERSO C.S. $= U = [5, \infty\rangle$

b) Puesto que $\sqrt{x+1}$ no puede tomar valores negativos entonces

$$\sqrt{x+1} \leq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{x+1} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \underline{x = -1} \ .$$

c) $\sqrt{x+1} < 0$ ***no tiene soluciones reales***, luego C.S. $= \varnothing$.

d) Análogamente, la ecuación $\sqrt[4]{x+6} < -7$ ***no puede tener soluciones reales***. $\therefore$ C.S. $= \varnothing$.

2.8 EJERCICIO .- Resuelva: $\sqrt{x+1} + \sqrt{2-x} > -6$.

SOLUCIÓN .- El Universo es $U = [-1, \infty\rangle \cap \langle -\infty, 2] = [-1, 2]$

Como una suma de dos radicales pares es ≥ 0, entonces con mayor razón es > -6, ***PARA TODO*** x ***en su Universo común***.

$\therefore$ C.S. $= U = [-1, 2]$.

2.9 EJERCICIO .- Demuestre que si $a \geq 0$, $b \geq 0$, entonces $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$.

SOLUCIÓN .- Como $(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \geq 0$, entonces

$$2\sqrt{ab} \leq a + b \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$$

2.10 TEOREMA .- Si n es un entero positivo IMPAR , entonces

a)	$\sqrt[n]{x} \leq \sqrt[n]{y}$	$\Leftrightarrow$	$x \leq y$
b)	$\sqrt[n]{x} < \sqrt[n]{y}$	$\Leftrightarrow$	$x < y$
c)	$\sqrt[n]{x} \geq 0$	$\Leftrightarrow$	$x \geq 0$
d)	$\sqrt[n]{x} < 0$	$\Leftrightarrow$	$x < 0$

2.11 NOTA .- Las proposiciones (c) y (d) del TEOREMA [2.10] indican que si n es **IMPAR** , entonces $\sqrt[3]{x}$ ***TIENE EL MISMO SIGNO que*** x .

2.12 EJERCICIO .- Resuelva: $\dfrac{\sqrt[3]{x^2-1}\,(x^3 - 13x + 12)}{(x+4)^5 (x^3 + 8x^2 + 4x - 48)} \geq 0$

SOLUCIÓN .- Utilizaremos la NOTA [2.11]. Como $\sqrt[3]{x^2-1}$ tiene el mismo signo que $(x^2 - 1)$ y $(x+4)^5$ tiene el mismo signo que $(x+4)$, la inecuación dada resulta equivalente a la inecuación:

$$\frac{(x^2-1)(x^3 - 13x + 12)}{(x+4)(x^3 + 8x^2 + 4x - 48)} \geq 0 \qquad \Leftrightarrow$$

$$\frac{(x-1)(x+1)(x-1)(x+4)(x-3)}{(x+4)(x-2)(x+6)(x+4)} = \frac{(x-1)^2 (x+1)(x+4)(x-3)}{(x+4)^2 (x-2)(x+6)} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \quad [\ (x-1) = 0\ ] \ \vee \ [\ \frac{(x+1)(x+4)(x-3)}{(x-2)(x+6)} \geq 0 \ \wedge \ x \neq -4\ ]$$

Puntos Críticos : -6 , -4 , -1 , 2 , 3 $_{(+)}$. Luego ,

C.S. $= \{1\} \cup (\langle -6, -4] \cup [-1, 2\rangle \cup [3, \infty\rangle - \{-4\})$
$= \langle -6, -4\rangle \cup [-1, 2\rangle \cup [3, \infty\rangle$.

2.13 EJERCICIO .- Resuelva: $\dfrac{\sqrt[3]{4-x}}{\sqrt[4]{x^2-2} \cdot \sqrt[5]{x+6}} > 0$

SOLUCIÓN .- El radical par proporcionará el Universo U : $x^2 - 2 \geq 0$ pero $\neq 0$, para evitar que se anule el denominador

$$U = \langle -\infty, -\sqrt{2}\rangle \cup \langle \sqrt{2}, \infty\rangle \qquad (\alpha)$$

Así, el radical par resulta estrictamente positivo, y la inecuación se resuelve dentro del Universo U: $\dfrac{\sqrt[3]{4-x}}{\sqrt[5]{x+6}} > 0 \qquad (\ \wedge \ \ x \in U\ )$,

donde $\sqrt[3]{A}$ y $\sqrt[5]{B}$ tienen los mismos signos que A y B respectivamente,

$$\Leftrightarrow \quad \frac{4-x}{x+6} > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x-4}{x+6} < 0$$

$$\Leftrightarrow \quad x \in \langle -6, 4\rangle \qquad (\beta)$$

De (α) y (β) tenemos que el Conjunto Solución resulta la intersección

C.S. $= U \cap \langle -6, 4\rangle = \langle -6, -\sqrt{2}\rangle \cup \langle \sqrt{2}, 4\rangle$.

2.14 EJERCICIO .- Resuelva:

$$\frac{\sqrt[7]{x+9} \cdot (x+1)^4 (x+2) \sqrt[5]{x^2 - 7x + 12} \cdot \sqrt[4]{8-x}}{\sqrt[6]{x+7} \cdot (x-8)^3 (x^3 - 8)} \leq 0 \qquad (*)$$

SOLUCIÓN .- Los radicales pares proporcionarán el Universo

$$U:\ 8-x \geq 0 \ \wedge\ x+7 > 0 \quad \Rightarrow \quad U = \langle -7, 8] \qquad (\alpha)$$

Luego factorizamos, y como los radicales pares son positivos (o al menos cero, como por ejemplo $\sqrt[4]{8-x}$), entonces $(*)$ se reduce a :

$$\frac{\sqrt[7]{x+9}\cdot(x+1)^4\,(x+2)\cdot\sqrt[5]{(x-4)(x-3)}}{(x-8)^3\,(x-2)\,[(x+1)^2+3]} \leq 0 \quad \vee \quad [x=8]$$

Como los radicales impares tienen los mismos signos que sus cantidades subradicales entonces la inecuación se reduce a

$$\frac{(x+9)\cdot(x+1)^4\,(x+2)\cdot(x-4)(x-3)}{(x-8)^3\,(x-2)} \leq 0$$

donde $x=8$ ya no es válido.

$$\Leftrightarrow \quad \frac{(x+9)(x+2)(x-4)(x-3)}{(x-8)(x-2)} \leq 0 \quad \vee \quad [\,x=-1\,]$$

donde los puntos críticos son : $-9\ ,\ -2\ ,\ 2\ ,\ 3\ ,\ 4\ ,\ 8$ $_{(+)}$

$$\Leftrightarrow \quad x \in \{-1\} \cup [-9, -2] \cup \langle 2, 3] \cup [4, 8\rangle \qquad (\beta)$$

Intersectando (α) y (β) obtenemos el Conjunto Solución:

$$C.S. = U \cap (\beta) = \{-1\} \cup \langle -7, -2] \cup \langle 2, 3] \cup [4, 8\rangle\ .$$

2.15 EJERCICIO .- Resuelva:

$$\sqrt{\frac{x+2}{x-1}} > \sqrt{\frac{x+6}{x}}$$

SOLUCIÓN .- Utilizando el TEOREMA [2.6],

$$\sqrt{\frac{x+6}{x}} < \sqrt{\frac{x+2}{x-1}} \quad \Leftrightarrow \quad 0 \leq \frac{x+6}{x} < \frac{x+2}{x-1}$$

$$\Leftrightarrow \quad \left[\ \frac{x+6}{x} \geq 0 \quad \wedge \quad \frac{x+6}{x} < \frac{x+2}{x-1}\ \right]$$

$$\Leftrightarrow \quad \left[\ \frac{x+6}{x} \geq 0 \quad \wedge \quad \frac{x+6}{x} - \frac{x+2}{x-1} < 0\ \right]$$

$$\Leftrightarrow \quad \left[\ \frac{x+6}{x} \geq 0 \quad \wedge \quad \frac{3(x-2)}{x(x-1)} < 0\ \right]$$

Ptos. Crit. : $-6\ ,\ 0$ $_{(+)}$ Ptos. Crit. : $0\ ,\ 1\ ,\ 2$ $_{(+)}$

$$\Leftrightarrow \quad x \in \langle -\infty, -6] \cup \langle 0, \infty\rangle \ \wedge\ x \in \langle -\infty, 0\rangle \cup \langle 1, 2\rangle$$

$$\Leftrightarrow \quad x \in C.S. = (\langle -\infty, -6] \cup \langle 0, \infty\rangle) \cap (\langle -\infty, 0\rangle \cup \langle 1, 2\rangle)$$

$$\Leftrightarrow \quad C.S. = \langle -\infty, -6] \cup \langle 1, 2\rangle\ .$$

2.16 TEOREMA .- Sean a y b números reales, entonces

$$\sqrt{a} < b \quad \Leftrightarrow \quad a \geq 0 \ \wedge\ [\ b > 0 \ \wedge\ a < b^2\ ]$$

$$\sqrt{a} \leq b \quad \Leftrightarrow \quad a \geq 0 \ \wedge\ [\ b \geq 0 \ \wedge\ a \leq b^2\ ]$$

2.17 EJERCICIO .- Resuelva: $\sqrt{4x(x+1)} < 4-2x$

SOLUCIÓN .- Identificando con el TEOREMA [2.16] tenemos

$$a = 4x(x+1) \quad , \quad b = 4-2x$$

luego resolvemos las siguientes inecuaciones:

$$a \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad 4x(x+1) \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \in \langle -\infty, -1] \cup [0, \infty\rangle$$

$$b > 0 \quad \Leftrightarrow \quad 4-2x > 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \in \langle -\infty, 2]$$

$$a < b^2 \quad \Leftrightarrow \quad 4x(x+1) < (4-2x)^2$$

$$\Leftrightarrow \quad 4x^2+4x < 16-16x+4x^2$$

$$\Leftrightarrow \quad x < 4/5 \quad \Leftrightarrow \quad x \in \langle -\infty, 4/5\rangle$$

Por lo tanto, del TEOREMA [2.16] obtenemos:

$$\sqrt{4x(x+1)} < 4-2x \quad \Leftrightarrow \quad a \geq 0 \ \wedge\ b > 0 \ \wedge\ a < b^2$$

$$\Leftrightarrow \quad x \in (\langle -\infty, -1] \cup [0, \infty\rangle) \cap \langle -\infty, 2\rangle \cap \langle -\infty, 4/5\rangle =$$

$$= \langle -\infty, -1] \cup [0, 4/5\rangle = C.S.$$

2.18 TEOREMA .- Sean a y b números reales, entonces

$$\sqrt{a} > b \quad \Leftrightarrow \quad a \geq 0 \ \wedge\ [\ b < 0 \ \vee\ (\ b \geq 0 \ \wedge\ a > b^2\ )\ ]$$

$$\sqrt{a} \geq b \quad \Leftrightarrow \quad a \geq 0 \ \wedge\ [\ b < 0 \ \vee\ (\ b \geq 0 \ \wedge\ a \geq b^2\ )\ ]$$

2.19 EJERCICIO .- Resuelva: $\sqrt{6x+1} \geq 2x-3$

SOLUCIÓN .- Identificamos con el TEOREMA [2.18] ,

$$a = 6x + 1 \quad , \quad b = 2x - 3$$

Luego resolvemos las siguientes inecuaciones:

$a \geq 0$: $\quad 6x + 1 \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \in [-1/6, \infty\rangle$

$b < 0$: $\quad 2x - 3 < 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \in \langle -\infty, 3/2\rangle$

$b \geq 0$: $\quad 2x - 3 \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \in [3/2, \infty\rangle$

$a \geq b^2$: $\quad 6x + 1 \geq (2x-3)^2 \quad [= 4x^2 - 12x + 9\ ] \quad \Leftrightarrow$

$0 \geq 4x^2 - 18x + 8 = 2(x-4)(2x-1) \quad \Leftrightarrow$

$x \in [1/2, 4] =$ C.S.

Por lo tanto, $\sqrt{6x+1} \geq 2x - 3 \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{a} \geq b \quad \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \quad a \geq 0 \quad \wedge \quad [\ b < 0 \quad \vee \quad (\ b \geq 0 \quad \wedge \quad a \geq b^2\ )\ ]$

$\Leftrightarrow \quad x \in [-1/6, \infty\rangle \cap \{\langle -\infty, \frac{3}{2}\rangle \cup ([\frac{3}{2}, \infty\rangle \cap [\frac{1}{2}, 4])\}$

$\Leftrightarrow \quad x \in [-1/6, \infty\rangle \cap \{\langle -\infty, 4]\} = [-\frac{1}{6}, 4] =$ C.S.

2.20 EJERCICIO .- Resuelva: $\sqrt[3]{x^3 - 3x^2 + 5x - 6} > x - 2$, $\quad (*)$

SOLUCIÓN .- Por ser un radical de orden IMPAR , se resuelve según el TEOREMA [2.10] (b), considerando $x - 2 = \sqrt[3]{(x-2)^3}$.

Luego, $(*)$ es equivalente a:

$x^3 - 3x^2 + 5x - 6 > (x-2)^3 \quad \Leftrightarrow \quad 3x^2 - 7x + 2 > 0$

$(3x-1)(x-2) > 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \in \langle -\infty, \frac{1}{3}\rangle \cup \langle 2, \infty\rangle =$ C.S.

2.21 EJERCICIO .- Resuelva: $\sqrt{x+1} + \sqrt{x+2} < 3$

SOLUCIÓN .- Equivalentemente ,

$$\sqrt{x+1} < 3 - \sqrt{x+2} \qquad (*)$$

Identificando con el TEOREMA [2.16],

$$a = x + 1 \quad , \quad b = 3 - \sqrt{x+2} \quad , \quad \text{donde}$$

$a \geq 0$: $\quad x \geq -1 \quad \Leftrightarrow \quad x \in [-1, \infty\rangle$,

$b > 0$: $\quad \sqrt{x+2} < 3 \quad \Leftrightarrow$ y por el TEOREMA [2.16] :

$\Leftrightarrow \quad x + 2 \geq 0 \quad \wedge \quad x + 2 < 9$

$\Leftrightarrow \quad x \in [-2, \infty\rangle \cap \langle -\infty, 7\rangle = [-2, 7\rangle$

$a < b^2$: $\quad x + 1 < (3 - \sqrt{x+2})^2 = 9 - 6\sqrt{x+2} + x + 2$

$\Leftrightarrow \quad 6\sqrt{x+2} < 10 \quad \Leftrightarrow \quad x \geq -2 \quad \wedge \quad x - 2 < \frac{100}{36} = \frac{25}{9}$

$\Leftrightarrow \quad x \in [-2, \infty) \cap \langle -\infty, \frac{7}{9}\rangle = [-2, \frac{7}{9}\rangle$,

Por lo tanto, por el TEOREMA [2.16] tenemos que:

$\sqrt{x+1} < 3 - \sqrt{x+2} \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{a} < b \quad \Leftrightarrow$

$[\ a \geq 0 \quad \wedge \quad b > 0 \quad \wedge \quad a < b^2\ ] \quad \Leftrightarrow$

$x \in [-1, \infty\rangle \cap [-2, 7\rangle \cap [-2, \frac{7}{9}\rangle = [-1, \frac{7}{9}\rangle =$ C.S.

2.22 EJERCICIO .- Resuelva: $\dfrac{1 - \sqrt{1 - 4x^2}}{x} < 3 \qquad (*)$

SOLUCIÓN .- Universo : $x \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] = U$

Luego, resolviendo en U , $\quad (*) \quad \Leftrightarrow \quad \dfrac{\sqrt{1-4x^2} - (1-3x)}{x} > 0$

$\Leftrightarrow \quad [\ (a) \quad \vee \quad (b)\ ]$, donde

(a) : $\sqrt{1-4x^2} > (1-3x) \quad \wedge \quad x > 0$, y donde
$\quad\ (a1)$

(a1) $x \in U \ \wedge\ [\ (1-3x < 0) \ \vee$

$\vee\ \{\ (1-3x \geq 0) \ \wedge\ 1 - 4x^2 > (1-3x)^2\ \}\ ]$
$\qquad\qquad\qquad\quad (a1')$

y donde (a1') : $1 - 4x^2 > (1-3x)^2 \quad \Leftrightarrow \quad x(13x - 6) < 0$

$\Leftrightarrow \quad x \in \langle 0, \frac{6}{13}\rangle$

Luego,

(a1): $\quad x \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] \quad \wedge \quad [\ x \in \langle \frac{1}{3}, \infty\rangle \ \vee$

$\vee\ \{\ x \in \langle -\infty, \frac{1}{3}]\ \wedge\ x \in \langle 0, \frac{6}{13}\rangle\ \}\ ]$

$\Leftrightarrow \quad x \in \langle \frac{1}{3}, \frac{1}{2}] \cup \{0, \frac{1}{3}] = \langle 0, \frac{1}{2}]$

Así, (a) : $x \in \langle 0\,,\ \frac{1}{2}] \ \cap\ \langle 0\,,\infty\rangle = \langle 0\,,\ \frac{1}{2}]$;

(b) : $\sqrt{1-4x^2} \ < \ (1-3x) \quad \wedge \quad x < 0 \quad (\Rightarrow \ -3x > 0)$

$\Leftrightarrow \quad x \in U \quad \wedge \quad x(13x-6) > 0 \quad \wedge \quad x < 0$

$\Leftrightarrow \quad x \in [-\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}] \cap \langle -\infty\,,\ \frac{6}{13}\rangle \cap \langle -\infty\,,0\rangle \quad \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \quad x \in [-\frac{1}{2},\ 0\rangle \quad : \ (b)$

Por lo tanto, de [(a) $\vee$ (b)] , obtenemos el Conjunto Solución

C.S. $= \langle 0\,,\ \frac{1}{2}] \ \cup\ [-\frac{1}{2},\ 0\rangle = [-\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}] - \{0\}$

2.23 EJERCICIO .- Resuelva: $x - \sqrt{169 - x^2} \ < \ 17 \qquad (*)$

SOLUCIÓN .- El Universo es : $U = [-13\,,\ 13\,]$. Resolviendo en U ,

$(*) \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{169 - x^2} \ > \ x - 17$

Observemos que el segundo miembro $(x - 17)$ es ***negativo, para todo*** $x \in U$.
Por lo tanto, la inecuación ***SE CUMPLE PARA TODO*** $x \in U$. Luego,

C.S. $= U = [-13\,,\ 13\,]$

2.24 EJERCICIO .- Resuelva: $\sqrt{169 - x^2} \ < \ x - 17 \qquad (*)$

SOLUCIÓN .- El Universo es: $U = [-13\,,\ 13\,]$. Resolviendo en U ,

$(*) \quad \Leftrightarrow \quad [\ x \in U \ \wedge \ (x - 17 > 0) \ \wedge \ \underbrace{169 - x^2 < (x-17)^2}_{(x-12)(x-5) \ > \ 0}\ ]$

$\Leftrightarrow \quad x \in [-13\,,\ 13\,] \cap \langle 17\,,\infty\rangle \cap \big(\langle -\infty\,,\ 5\rangle \cup \langle 12\,,\infty\rangle\big) =$

$= \varnothing = \text{C.S.}$ No hay soluciones reales.

2.25 EJERCICIO .- Resuelva: $\sqrt{x+7} + \sqrt{x-5} \ \geq \ \sqrt{2x+18}$

SOLUCIÓN .- Universo: $U = [-7,\infty\rangle \cap [\ 5\,,\infty\rangle \cap [-9\,,\infty\rangle \ = \ [5\,,\infty\rangle$

Elevando al cuadrado en U, obtenemos:

$\sqrt{x+7} + \sqrt{x-5} \ \geq \ 8 \quad \wedge \quad x \in U$, y otra vez al cuadrado:

$(x+7)(x-5) \ \geq \ 64 \quad \wedge \quad x \in U \quad \Leftrightarrow$

$0 \ \leq \ x^2 + 2x - 99 \ = \ (x+11)(x-9) \quad \wedge \quad x \in U = [\ 5\,,\infty\rangle \quad \Leftrightarrow$
$x \in (\langle -\infty\,,-11] \ \cup \ [\ 9\,,\infty\rangle) \cap [\ 5\,,\infty\rangle \ = \ \underline{[\ 9\,,\infty\rangle \ = \ \text{C.S.}}$

2.26 EJERCICIO .- Resuelva: $\sqrt{2+\sqrt{x-5}} \ < \ \sqrt{13-x}$.

SOLUCIÓN .- Universo: $U = [\ 5\,,13\,]$. Elevando al cuadrado en U el sentido de la desigualdad no cambia por ser ambos miembros ***no negativos***

$\sqrt{x-5} \ < \ 11 - x \quad \Leftrightarrow$

$x \in U \ \wedge \ (11 - x > 0) \ \wedge \ [\ (x-5) < (11-x)^2 = 121 - 22x + x^2\ ]$

$x \in U \ \wedge \ x < 11 \ \wedge \ 0 < x^2 - 23x + 126 = (x-14)(x-9)$

$\Leftrightarrow \quad x \in [\ 5\,,13\,] \ \cap \ \langle -\infty\,,11\rangle \ \cap \ \big(\langle -\infty\,,9\rangle \ \cup \ \langle 14\,,\infty\rangle\big) = [\ 5\,,9\rangle$

$\therefore \quad \text{C.S.} = [\ 5\,,9\rangle$

2.27 EJERCICIO .- Resuelva: $\sqrt{1+\sqrt{x^4-x^2}} \ > \ x - 1 \qquad (*)$

SOLUCIÓN .- Universo: $x^4 - x^2 = x^2(x^2-1) \ \geq \ 0$

$\Leftrightarrow \quad \underline{x \in \langle -\infty\,,-1] \ \cup \ \{0\} \ \cup \ [\ 1\,,\infty\rangle = U}$

Luego,

$(*) \quad \Leftrightarrow \quad x \in U \ \wedge \ [\ (x - 1 < 0) \quad \vee$

$\vee \ \{\ (x-1 \geq 0) \ \wedge \ 1 + \sqrt{x^4 - x^2} \ > \ (x-1)^2\ \}\ ] \quad (\alpha)$

(a)

Resolviendo (a) :

(a) $\Leftrightarrow \quad \sqrt{x^4 - x^2} \ > \ x^2 - 2x \quad , \quad [\ x^2 - 2x = x(x-2)\ ]$

$\Leftrightarrow \quad x \in U \ \wedge \ [\ x(x-2) < 0 \quad \vee$

$\vee \ \{\ x(x-2) \geq 0 \ \wedge \ \underbrace{x^4 - x^2 > x^4 - 4x^3 + 4x^2}_{x^2(4x-5) \ > \ 0}\ \}\ ]$

$\Leftrightarrow \quad x \in U \ \wedge \ [\ x \in \langle 0\,,\ 2\rangle \ \vee$

$\vee \ \{\ x \in \langle -\infty\,,0] \ \cup \ [\ 2\,,\infty\rangle \ \wedge \ x > \frac{5}{4} \ \wedge \ x \neq 0\ \}\ ]$

$\Leftrightarrow \quad x \in U \ \wedge \ [\ x \in \langle 0\,,\ 2\rangle \ \vee \ \{\ x \in [\ 2\,,\infty\rangle\ \}\ ]$

$\Leftrightarrow \quad x \in [\ 1\,,\infty\rangle \ :$ Solución de (a)

Por lo tanto, regresando a (α) :

$(*) \quad \Leftrightarrow \quad x \in U \ \wedge \ [\ x < 1 \ \vee \ \{\ x \geq 1 \ \wedge \ x \in [\ 1\,,\infty\rangle\ \}\ ]$

$$\Leftrightarrow \quad x \in U = \langle -\infty, -1] \cup \{0\} \cup [1, \infty \rangle = \text{C.S.}$$

2.28 EJERCICIO .- Resuelva:

$$\sqrt{4x^2 + 9x + 5} - \sqrt{x^2 - 1} \leq \sqrt{2x^2 + x - 1}$$

SOLUCIÓN .- Como

$$4x^2 + 9x + 5 = (x+1)(4x+5) \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \in \langle -\infty, -\tfrac{5}{4}] \cup [-1, \infty \rangle$$

$$x^2 - 1 \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \in \langle -\infty, -1] \cup [1, \infty \rangle$$

$$2x^2 + x - 1 = (2x-1)(x+1) \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \in \langle -\infty, -1] \cup [\tfrac{1}{2}, \infty \rangle$$

Intersectando estos tres Universos Parciales obtenemos el Universo General:

$$U = \langle -\infty, -\tfrac{5}{4}] \cup \{-1\} \cup [1, \infty \rangle$$

Resolviendo en U, reagrupando previamente la inecuación dada:

$$\sqrt{4x^2 + 9x + 5} \leq \sqrt{2x^2 + x - 1} + \sqrt{x^2 - 1}$$

Como todos los términos radicales son no negativos, elevamos al cuadrado en U, y resulta:

$$\sqrt{2x^2 + x - 1}\,\sqrt{x^2 - 1} \geq \tfrac{1}{2}(x^2 + 8x + 7) = \tfrac{1}{2}(x+7)(x+1) \quad \Leftrightarrow$$

$$x \in U \ \wedge \ \Big[(x+7)(x+1) < 0 \ \vee \ \Big\{ (x-7)(x+1) \geq 0 \ \wedge \ \wedge \ \underbrace{(2x^2 + x - 1)(x^2 - 1) \geq \tfrac{1}{4}(x^2 + 8x + 7)^2}_{(x+1)^2(x-5)(7x+9) \geq 0} \Big\} \Big]$$

$$\Leftrightarrow \quad x \in U \ \wedge \ \Big[x \in \langle -7, -1 \rangle \ \vee \ \Big\{ x \in \langle -\infty, -7] \cup [-1, \infty \rangle \ \wedge \ \wedge \ x \in \langle -\infty, -\tfrac{9}{7}] \cup \{-1\} \cup [5, \infty \rangle \Big\} \Big]$$

$$\Leftrightarrow \quad x \in U \ \wedge \ \Big[x \in \langle -7, -1 \rangle \cup \langle -\infty, -7] \cup \{-1\} \cup [5, \infty \rangle \Big]$$

$$\therefore \quad \text{C.S.} = \langle -\infty, -\tfrac{5}{4}] \cup \{-1\} \cup [5, \infty \rangle \ .$$

SERIE DE EJERCICIOS

1. Resuelva las inecuaciones:

   a) $\sqrt{2x+3} > x$ b) $\sqrt{x^2 - 6x} \leq 4$

   c) $\sqrt{x-1} \leq 0$ d) $\dfrac{1}{\sqrt{x}-1} > \sqrt{x} + 1$

   e) $\dfrac{1}{\sqrt{x}+1} > \sqrt{x} - 1$ f) $\sqrt{x^2 - 3x + 2} > 2 - x$

   g) $\sqrt{x^2 - 55x + 250} \leq x - 14$, h) $\sqrt{24 - 2x - x^2} < x$

2. Resuelva:

$$\frac{\sqrt{27-x}\ \sqrt[3]{x^2 - 14x - 15}\ (x-2)^6\ \sqrt[7]{x+8}\ (x-3)^5}{\sqrt[4]{x+9}\ (x^2 + 7x - 8)(x-27)^3\ (x^3 - 27)}$$

   a) ≤ 0 , b) ≥ 0 , c) < 0 , d) > 0

3. Resuelva:

$$\frac{\sqrt[4]{625 - x^2}\ \sqrt[3]{x^2 - 4}\ (x+4)^8\ (x^2-1)^2}{x^3 - 2x^2 - x + 2}$$

   a) ≤ 0 , b) ≥ 0 , c) < 0 , d) > 0

4. Resuelva:

   a) $\sqrt{\dfrac{32 - 2x}{x+2}} \geq \sqrt{x}$ b) $\sqrt{\dfrac{2x-8}{x-1}} + \sqrt{\dfrac{5-x}{x+3}} \geq 0$

   c) $\sqrt{\dfrac{2x-8}{x-1}} + \sqrt{\dfrac{5-x}{x+3}} > 0$, f) $\sqrt{x} + \sqrt{x-2} > 0$

   d) $\sqrt{x^2 - 6x + 5} + \sqrt{x^2 - 7x + 10} > 0$

   e) $\sqrt{x^2 - 6x + 5} + \sqrt{x^2 - 7x + 10} \leq 0$

5. Justifique por qué es que los Conjuntos Solución de cada una de las siguientes inecuaciones corresponden precisamente a sus respectivos universos U .

   a) $\sqrt{\dfrac{\sqrt{x^2 - 3x - 4}}{\sqrt{21} - \sqrt{x^2 - 4}}} \geq 0$

   b) $\sqrt[4]{\dfrac{\sqrt{x^2 - 3x - 4}}{\sqrt{21} - \sqrt{x^2 - 4}}} \geq x - 5$

c) $\sqrt{\dfrac{x^2-3x-4}{5-\sqrt{16-x^2}}} \geq x^2-2x-29$

es decir, que para todo $x \in U$, los segundos miembros de estas inecuaciones resultan ser negativos.

6. Resuelva:

a) $\sqrt{\dfrac{x^2-3x-4}{4-\sqrt{x^2-9}}} > x-5$, b) $\sqrt{\dfrac{\sqrt{x+4}+2}{2-\sqrt{x+4}}} \leq x-4$

7. Sean $A = \{ x \in \mathbb{R} / \dfrac{x(8-x)^2}{x^3+x^2} \geq 0 \}$

$B = \{ x \in \mathbb{R} / \sqrt{x^2-16x+68} > -2 \}$,

halle el conjunto $B - (A \cap B)^c$.

CLAVE DE RESPUESTAS

1. a) $[-3/2, 3\rangle$ b) $[-2, 0] \cup [6, 8]$ c) $\{1\}$
d) $\langle 1, 2\rangle$ e) $[0, 2)$ f) $\langle 2, \infty\rangle$ g) $[50, \infty\rangle$
h) $\langle 3, 4]$; 2. a) $[-1, 1\rangle \cup \{2\} \cup [15, 27)$
2. b) $(\langle -9, -1] \cup \langle 1, 15]) - \{3, -8\}$
c) $\langle -1, 1\rangle \cup \langle 15, 27\rangle \cup \langle -9, -8\rangle$
d) $(\langle -9, -1\rangle \cup \langle 1, 15\rangle) - \{2, 3, -8\}$
3. a) $[-25, -2] \cup \langle -1, 1\rangle \cup \{25\}$
b) $([-2, -1\rangle \cup \langle 1, 25] \cup \{-4\} \cup \{-25\}) - \{2\}$
c) $(\langle -25, -2\rangle \cup \langle -1, 1\rangle) - \{-4\}$
d) $(\langle -2, -1\rangle \cup \langle 1, 25\rangle) - \{2\}$
4. a) $[0, 4]$, b) $\langle -3, 1\rangle \cup [4, 5]$
c) $\langle -3, 1\rangle \cup [4, 5]$ d) $\langle -\infty, 1] \cup \langle 5, \infty\rangle$
e) $\{5\}$ f) $[2, \infty\rangle$
5. a) $\langle -5, -2] \cup [4, 5\rangle$ b) $\langle -5, -2] \cup [4, 5\rangle$
c) $[-4, -1] \cup \{4\}$; 6. a) $\langle -5, -3] \cup [4, 5\rangle$ b) $\varnothing$
7. $A = \langle -\infty, -1\rangle \cup \langle 0, \infty\rangle$, $B = \mathbb{R}$,
$B - (A \cap B)^c = \langle -\infty, -1\rangle \cup \langle 0, \infty\rangle$.

Ω Ω Ω Ω Ω

8

VALOR ABSOLUTO y MÁXIMO ENTERO

1. VALOR ABSOLUTO

1.1 DEFINICIÓN .- Se llama VALOR ABSOLUTO de un número real x al número no negativo denotado por $|x|$ y definido por:

$$|x| = \begin{cases} x & , \text{ si } x > 0 \quad (\alpha) \\ 0 & , \text{ si } x = 0 \quad (\beta) \\ -x & , \text{ si } x < 0 \quad (\gamma) \end{cases}$$

1.2 EJEMPLOS .- De la definición del VALOR ABSOLUTO, tenemos que

$$\begin{aligned} |x| &= 3 && , \text{ pues } 3 > 0 , \text{ en } (\alpha) \\ |-5| &= -(-5) \\ &= 5 && , \text{ pues } -5 < 0 , \text{ en } (\gamma) \\ |0| &= 0 && , \text{ de } (\beta) \\ |\sqrt{2} - 2| &= -(\sqrt{2} - 2) \\ &= 2 - \sqrt{2} && , \text{ pues } 2 > \sqrt{2} \Rightarrow \sqrt{2} - 2 < 0 , \text{ en } (\gamma) . \end{aligned}$$

1.3 OBSERVACIONES .-

1.- En el caso de que x sea negativo $(x < 0)$, su valor absoluto $|x|$ resulta ***positivo*** (> 0) pues: $x < 0 \Rightarrow -x > 0$, y por lo tanto:

$$|x| = -x \Rightarrow |x| > 0 .$$

2.- Con mayor razón, si x es mayor o es igual a cero $(x \geq 0)$, entonces $|x|$ es positivo o bien cero, respectivamente, pues en tales casos:

$|x| = x$ si $x > 0$, por (α)

$|0| = 0$, por (β)

Así, hemos probado que un valor absoluto ***nunca es negativo***.

1.4 TEOREMA .-

(1)	Para todo $x \in \mathbb{R}$:	$\|x\| \geq 0$
(2)	$\|x\| = 0$	$\Leftrightarrow \quad x = 0$

1.5 DEFINICIÓN .-

Si $x \in \mathbb{R}$, entonces $|x|$ es el número real no-negativo definido por:

$$|x| = \begin{cases} x & , \text{ si } x \geq 0 \\ -x & , \text{ si } x < 0 \end{cases}$$

1.6 EJERCICIO .- Resolveremos las siguientes ecuaciones:

(1) $|2x - 1| = 0$

(2) $|2x^2 + 5x - 12| \cdot (x + 1) = 0$

(3) $|x^2 - 2x + 2| \cdot (x^2 - x - 6) = 0$

SOLUCIÓN .- Del TEOREMA 1.4 – (2):

(1) $|2x - 1| = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2x - 1 = 0$

$\Leftrightarrow \quad x = 1/2$

(2) Como $2x^2 + 5x - 12 = (2x - 3)(x + 4)$, entonces

$|(2x - 3)(x + 4)| \cdot (x + 1) = 0$

$\Leftrightarrow \quad |(2x - 3)(x + 4)| = 0 \quad \sigma \quad x + 1 = 0$

$\Leftrightarrow \quad (2x - 3)(x + 4) = 0 \quad \sigma \quad x + 1 = 0$

$\Leftrightarrow \quad [2x - 3 = 0 \quad \sigma \quad x + 4 = 0] \quad \sigma \quad x + 1 = 0$

$\Leftrightarrow \quad x = 3/2 \quad \sigma \quad x = -4 \quad \sigma \quad x = -1$

Por lo tanto, el Conjunto Solución es: C.S. $= \{3/2, -4, -1\}$.

(3) Notamos que $x^2 - 2x + 2 = (x - 1)^2 + 1$, expresión que es estrictamente ***positiva*** (> 0) ***para cualquier*** x ***real***, y por lo tanto,

$$|x^2 - 2x + 2| \cdot (x^2 - x - 6) = |(x - 1)^2 + 1| \cdot (x - 3)(x + 2) = 0$$

$\Leftrightarrow \quad |(x - 1)^2 + 1| = 0 \quad \sigma \quad x - 3 = 0 \quad \sigma \quad x + 2 = 0$

$\Leftrightarrow \quad (x - 1)^2 + 1 = 0 \quad \sigma \quad x = 3 \quad \sigma \quad x = -2$

$\Leftrightarrow \quad$ FALSO (F) $\quad \sigma \quad x = 3 \quad \sigma \quad x = -2$

$\Leftrightarrow \quad x = 3 \quad \sigma \quad x = -2 \quad$ [Dos soluciones]

pues la ecuación $(x - 1)^2 + 1 = 0$ no tiene soluciones reales ya que la expresión $(x - 1)^2 + 1$ es siempre > 0 ***para todo*** x ***real***.

1.7 TEOREMA .- Para todo $x, y \in \mathbb{R}$:

a)	$\|-x\|$	$= \|x\|$
b)	$\|xy\|$	$= \|x\|\|y\|$

PRUEBA DE (a) .- Consideremos los tres casos posibles para x :

- Si $x > 0$, entonces $(-x) < 0$, y por lo tanto:

$$\left.\begin{array}{l} |-x| = |(-x)| = -(-x) = x \\ |x| = x \quad [\text{ pues } x > 0\ ] \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad |-x| = |x|$$

- Si $x = 0$, entonces $-x = 0$, y por lo tanto $|-x| = |x| = 0$
- Si $x < 0$, entonces $(-x) > 0$, y por lo tanto:

$|-x| = |(-x)| = (-x) = -x \quad [\text{ pues } (-x) > 0\ ]$

$|x| = -x \quad [\text{ pues } x < 0\ ]$

$\Rightarrow \quad |-x| = |x|$.

PRUEBA DE (b): $|xy| = |x||y|$. Consideremos los cuatro casos posibles utilizando la DEFINICIÓN 1.5 ,

b_1) Si $x \geq 0$ y $y \geq 0$ entonces $(xy) \geq 0$, y por lo tanto,

$|xy| = |(xy)| = (xy) = (x)(y) = |x||y|$, en este caso.

b_2) Si $x \geq 0$ y $y < 0$ entonces $(xy) \leq 0$, y por lo tanto,

$|xy| = |(xy)| = -(xy) = (x)(-y) = |x||y| \quad$ [Pues $y < 0$].

b_3) Si $x < 0$ y $y \geq 0$ entonces $(xy) \leq 0$, y por lo tanto,

$|xy| = |(xy)| = -(xy) = (-x)(y) = |x||y| \quad$ [pues $x < 0$].

b_4) Si $x < 0$ y $y < 0$, la prueba se deja como Ejercicio al lector.

1.8 EJEMPLOS .- a) $|-5| = |5| = 5$

b) $|\sqrt{2} - 2| = |2 - \sqrt{2}| = 2 - \sqrt{2} \quad$ [pues $2 > \sqrt{2}$].

1.9 NOTA .- Ya sabemos que para $u \in \mathbb{R}$:

$$|u| = \begin{cases} u & , \quad \text{si} \quad u \geq 0 \\ -u & , \quad \text{si} \quad u < 0 \end{cases}$$

y si en esta fórmula hacemos $u = (x - a)$, tenemos que

$$|x - a| = \begin{cases} x - a & , \quad \text{si} \quad x - a \geq 0 \\ -(x - a) & , \quad \text{si} \quad x - a < 0 \end{cases}$$

de donde obtenemos el siguiente resultado:

$$|x - a| = \begin{cases} x - a & , \quad \text{si} \quad x \geq a \\ -(x - a) & , \quad \text{si} \quad x < a \end{cases}$$

Además, de 1.7 (a) : $|x - a| = |a - x|$.

1.10 INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA DEL VALOR ABSOLUTO

En la recta real $\mathbb{R}$, el valor absoluto $|x|$ de un número real x se puede considerar como igual a la DISTANCIA ***desde el punto donde está ubicado*** x ***hasta el ORIGEN*** ' O '. Esta ubicación de x puede estar a la derecha (x positivo) o a la izquierda (x negativo) del cero (origen), o coincidir con éste.

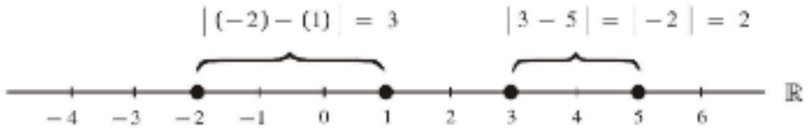
Es así que por ejemplo, la distancia del punto: $x = -5$ hasta el origen es igual a 5 unidades: $|x| = |-5| = 5$

Análogamente, la DISTANCIA entre dos puntos (números) a y b de la recta real, será por definición igual al valor absoluto $|a - b|$. Así, la distancia entre los puntos $a = 3$ y $b = 5$ es de 2 unidades, pues

$$|a - b| = |3 - 5| = |-2| = 2$$

Asimismo, la DISTANCIA entre $a = -2$ y $b = 1$ es igual a:

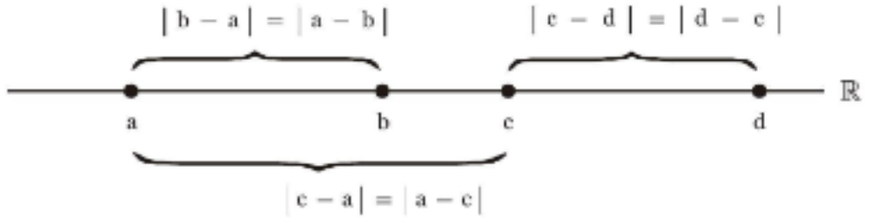
$$|a - b| = |(-2) - (1)| = |-3| = 3 \quad \text{unidades.}$$



La distancia entre $a = -2$ y $b = -7$ es igual a:

$$|(-2) - (-7)| = |5| = 5 \quad \text{unidades.}$$

En general, tenemos la siguiente ilustración gráfica para ***distancias entre pares de puntos*** (números) ***de la recta*** , se encuentren uno ó ambos a la derecha y/o a la izquierda del cero.



Como caso particular, tenemos que la distancia entre $a = -3$ y $b = 0$ es igual al ***valor absoluto*** $|(-3) - 0| = |(-3)| = 3$ unidades.

1.11 TEOREMA .- Para todo número real x :

a) $|x|^2 = x^2$ b) $\left|x^2\right| = x^2$

PRUEBA .- a) (1) Si $x \geq 0$: $|x| = x$, por lo tanto

$$|x|^2 = |x||x| = (x)(x) = x^2$$

(2) Si $x < 0$: $|x| = -x$, y por lo tanto

$$|x|^2 = (-x)^2 = x^2$$

b) Como $x^2 \geq 0 \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$, entonces: $\left|x^2\right| = x^2$

1.12 NOTA .- Recordemos que la expresión $\sqrt{A}$ indica explícitamente la ***RAÍZ CUADRADA POSITIVA*** $+\sqrt{A}$, y que cuando se desee considerar la raíz cuadrada negativa se escribirá $-\sqrt{A}$.

1.13 TEOREMA .- Para todo $x \in \mathbb{R}$: $\sqrt{x^2} = |x|$

PRUEBA .- Por definición de RAÍZ CUADRADA :

[Si $a \geq 0$ y $b \geq 0$: $\sqrt{a} = b \Leftrightarrow a = b^2$]

haciendo $x^2 = a$, $|x| = b$, tenemos que

$$\sqrt{x^2} = |x| \quad \Leftrightarrow \quad x^2 = |x|^2$$

y como la igualdad derecha de esta equivalencia es una proposición verdadera ***para todo*** $x \in \mathbb{R}$, por el TEOREMA 1.11 (a) , entonces la igualdad izquierda también es verdadera ***para todo*** $x \in \mathbb{R}$.

1.14 NOTA .- Si se cumpliese que $\sqrt{x^2} = x$ (sin el valor absoluto) se cometerían muchos errores, como por ejemplo, que

$\sqrt{4} = \sqrt{(-2)^2} = (-2) = -2$ lo cual es ABSURDO, pues con la notación $\sqrt{4}$ se está indicando explícitamente la raíz positiva $+\sqrt{4}$, tal como ya se había explicado anteriormente.

1.15 EJERCICIO .- Demuestre que se cumplen las dos relaciones siguientes

$$|x| \geq x \quad \text{y} \quad |x| \geq -x \ , \quad \textbf{\textit{para todo número real}} \ x \ .$$

SOLUCIÓN .- Consideraremos los dos casos posibles: $x \geq 0$ y $x < 0$, recordando que la expresión $a \geq b$ es válida si se cumple al menos una de las relaciones: $a > b$ ó $a = b$.

a) Demostraremos solamente la relación: $|x| \geq -x$

a1) Si $x \geq 0$: $|x| = x \geq 0$, $-x \leq 0$

$$\Rightarrow \quad -x \leq 0 \leq |x| \quad \Rightarrow \quad |x| \geq -x$$

a2) Si $x < 0$: $|x| = -x \quad \Rightarrow \quad |x| \geq -x$

1.16 TEOREMA (LA DESIGUALDAD TRIANGULAR)

Para todo $x , y \in \mathbb{R}$, $\quad |x + y| \leq |x| + |y|$

PRUEBA .- Del TEOREMA 1.11 :

$$|x + y|^2 = |(x + y)|^2 = (x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2 \leq$$
$$\leq x^2 + 2|xy| + y^2 \qquad \text{(del Ejercicio 1. 15)}$$
$$= |x|^2 + 2|x||y| + |y|^2 = (|x| + |y|)^2$$

Por lo tanto, $\quad |x + y|^2 \leq (|x| + |y|)^2$

$$\Rightarrow \quad |x + y| \leq |x| + |y|$$

debido a un Teorema de los Números Reales [Si $a \geq 0$ y $b \geq 0$: $a^2 \leq b^2 \Leftrightarrow a \leq b$] , con lo cual concluye la prueba.

1.17 EJERCICIO .- Sea $z \geq 0$. Demuestre que si se cumplen las dos desigualdades: [$a \leq z$ y $-a \leq z$] ***entonces*** $|a| \leq z$.

SOLUCIÓN .- Considerando los dos casos: $a \geq 0$ y $a < 0$:

(1) Si $a \geq 0$: $|a| = a$, y como $a \leq z$ entonces $|a| \leq z$.

(2) Si $a < 0$: $|a| = -a$, y como $-a \leq z$ entonces $|a| \leq z$.

1.18 COROLARIO .- Para todo par de números reales x y y :

$$|x - y| \geq \big||x| - |y|\big|$$

PRUEBA .- Estableceremos dos desigualdades previamente:

$$|x| = |y + (x - y)| \leq |y| + |x - y| \qquad \text{[Desigualdad Triangular]}$$
$$\Rightarrow \quad |x| - |y| \leq |x - y| \qquad (1)$$

$$|y| = |x + (y - x)| \leq |x| + |y - x| = |x| + |x - y|$$
$$\Rightarrow \quad |y| - |x| \leq |x - y|$$
$$-(|x| - |y|) \leq |x - y| \qquad (2)$$

De (1) , (2) y [1.17] , concluimos que $\big||x| - |y|\big| \leq |x - y|$.

APLICACIONES .-

1.19 EJERCICIO .- Si $a , b , c \in \mathbb{R}$, demuestre que:

$$|a| - |b| - |c| \leq |a - b - c|$$

SOLUCIÓN .- Utilizando alternadamente el Corolario 1.18 y el Ejercicio 1.15 , dos veces:

$$|a - b - c| = |(a - b) - c| \geq \big||a - b| - |c|\big| \geq |a - b| - |c| \geq$$
$$\geq \big||a| - |b|\big| - |c| \geq |a| - |b| - |c|$$

1.20 EJERCICIO .- Demuestre que, si x y $y \in \mathbb{R}$:

$$|x| + |y| = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0 \ \text{y} \ y = 0 \ .$$

($\Leftarrow$) Si $x = 0$ y $y = 0$: $|x| + |y| = |0| + |0| = 0 + 0 = 0$

($\Rightarrow$) Si $|x| + |y| = 0$ entonces $|x| = -|y|$ (•)

y como $|x| \geq 0$ y $-|y| \leq 0$ entonces $0 \leq |x| = -|y| \leq 0$

$\Rightarrow \quad 0 \le |x| \le 0 \quad \Rightarrow \quad |x| = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0 \quad \Rightarrow \quad y = 0$
(por $(*)$). Por lo tanto, $x = 0$ y $y = 0$.

1.21 EJERCICIO .- Para todo $x \neq 0$, pruebe que: $\left| x + \frac{1}{x} \right| \ge 2$.

SOLUCIÓN .- Considerando los dos casos posibles: $x > 0$ y $x < 0$,

a) Si $x > 0$, entonces $1/x > 0$ y $x + (1/x) > 0$ $(*)$
y de

$$(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}})^2 \ge 0 \quad \Leftrightarrow \quad x - 2 + \frac{1}{x} \ge 0$$

$$\Rightarrow \quad (x + \frac{1}{x}) \ge 2 \quad \Rightarrow \quad \left| x + \frac{1}{x} \right| \ge 2 \qquad (\text{por } (*))$$

b) Si $x < 0$, entonces $-x > 0$, $1/x < 0$ y $x + (1/x) < 0$ $(\#)$
y de

$$(\sqrt{-x} - \frac{1}{\sqrt{-x}})^2 \ge 0 \quad \Leftrightarrow \quad (-x) - 2 + \frac{1}{(-x)} \ge 0$$

$$\Rightarrow \quad -(x + \frac{1}{x}) \ge 2 \quad \Rightarrow \quad \left| x + \frac{1}{x} \right| \ge 2 \qquad (\text{por } (\#))$$

1.22 EJERCICIO .- Demuestre que

si $|x| < r$ ***para todo*** $r > 0$, entonces $x = 0$

SOLUCIÓN .- Por reducción al absurdo: supongamos que $x \neq 0$, entonces $|x| > 0$, y por lo tanto $\frac{1}{2}|x| > 0$ también. Como el dato asegura que "***para todo***" $r > 0$ ***se cumple que*** $|x| < r$, entonces en particular se cumplirá para $r = \frac{1}{2}|x| > 0$; es decir,

$$0 < |x| < r = \frac{1}{2}|x| \quad \Rightarrow \quad |x| < \frac{1}{2}|x| \quad \Rightarrow \quad 2 < 1$$

lo cual es un absurdo. Luego, nuestra suposición original no es válida, y por lo tanto, debe cumplirse que $x = 0$.

1.23 EJERCICIO .- Demuestre que si $a, b, c, d, x, y \in \mathbb{R}$ entonces:

i) $x^2 + y^2 \ge 2|xy|$ ii) $a^4 + b^4 \ge 2a^2b^2$

iii) $a^4 + b^4 + c^4 + d^4 \ge 4|abcd|$.

iv) Si al menos uno de: $x \neq 0$ o $y \neq 0$: $0 \le \frac{|xy|}{x^2 + y^2} \le \frac{1}{2}$.

SOLUCIÓN .- i) De la relación $(|x| - |y|)^2 \ge 0$, para todo $x, y \in \mathbb{R}$, al desarrollar se tiene que $x^2 + y^2 \ge 2|xy|$ ... $(*)$

ii) Haciendo $x = a^2$, $y = b^2$ en $(*)$: $a^4 + b^4 \ge 2|a^2b^2| = 2a^2b^2$

iii) Análogamente, tenemos que: $c^4 + d^4 \ge 2c^2d^2$; luego,

$$a^4 + b^4 + c^4 + d^4 \ge 2[(ab)^2 + (cd)^2]$$
$$\ge 2[\,2|(ab)(cd)|\,] = 4|abcd|$$

(haciendo $x = ab$, $y = cd$ en $(*)$.)

iv) Ejercicio. Utilice [i].

1.24 EJERCICIO .- Demuestre que para todo $x, y \in \mathbb{R}$:

a) $|x + y| = |x| + |y| \quad \Leftrightarrow \quad xy \ge 0$

b) $x^2 + y^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad |x + y| \le \sqrt{2}$

c) $|x - y| = |x| + |y| \quad \Leftrightarrow \quad xy \le 0$

d) $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \ge \frac{8}{(|a| + |b|)^2}$, para $a, b \in \mathbb{R} - \{0\}$

e) $a^2 + b^2 \ge \frac{1}{2}(|a| + |b|)^2$, para todo $a, b \in \mathbb{R}$

f) Si a, b, c, d son números reales positivos,

$$(a + \frac{1}{a})^2 + (b + \frac{1}{b})^2 \ge \frac{1}{2}[\,\frac{(a + b)^2 + 4}{(a + b)}\,]^2$$

SOLUCIÓN.-

a) Elevando al cuadrado ambos miembros y cancelando términos iguales se obtiene:

$$|x + y| = |x| + |y| \quad \Leftrightarrow \quad xy = |xy| \quad \Leftrightarrow \quad xy \ge 0$$

b) De $(|x| - |y|)^2 \ge 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 + y^2 \ge 2|xy|$ $(*)$
y del dato resulta que: $1 \ge 2|xy| \ge 2xy$; además,

$$|x + y|^2 = (x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2 =$$
$$= (x^2 + y^2) + 2xy = 1 + 2xy \le 1 + 1 = 2$$

Luego, $|x + y|^2 \le 2$. Por lo tanto, $|x - y| \le \sqrt{2}$.

c) Ejercicio.

d) Pase el denominador del segundo miembro al numerador del primer miembro, desarrolle el cuadrado y utilice $(*)$ de la solución de (b), dando común denominador al otro factor previamente. Con este proceso se demuestra (d).

e) Ejercicio.

f) Ejercicio. [Desarrolle los cuadrados del primer miembro, y utilice (e) y (d)].

1.25 EJERCICIO .- Si $a, b, c \in \mathbb{R} - \{0\}$, demuestre que

$$\left|\frac{bc}{a}\right| + \left|\frac{ac}{b}\right| + \left|\frac{ab}{c}\right| \geq |a+b+c| \qquad (\alpha)$$

SOLUCIÓN .- Usaremos el Ejercicio 1.21 : $\left|x + \frac{1}{x}\right| \geq 2 \quad , \quad \forall\, x \neq 0$

El miembro izquierdo de (α) al cual denotaremos S se convierte sucesivamente en

$$|a|\left(\left|\frac{c}{b}\right| + \left|\frac{b}{c}\right|\right) + \left|\frac{bc}{a}\right| \geq 2|a| + \left|\frac{bc}{a}\right| \qquad (1)$$

$$|b|\left(\left|\frac{c}{a}\right| + \left|\frac{a}{c}\right|\right) + \left|\frac{ac}{b}\right| \geq 2|b| + \left|\frac{ac}{b}\right| \qquad (2)$$

$$|c|\left(\left|\frac{b}{a}\right| + \left|\frac{a}{b}\right|\right) + \left|\frac{ab}{c}\right| \geq 2|c| + \left|\frac{ab}{c}\right| \qquad (3)$$

Sumando $(1) + (2) + (3)$:

$$3S \geq 2(|a| + |b| + |c|) + S \geq 2|a+b+c| + S \quad \Rightarrow$$
$$2S \geq 2|a+b+c| \quad \Rightarrow \quad S \geq |a+b+c| \,.$$

1.26 EJERCICIO .- Si $a, b, c \in \mathbb{R} - \{0\}$, demuestre que

$$\frac{9}{|a|+|b|+|c|} \leq \frac{1}{|a|} + \frac{1}{|b|} + \frac{1}{|c|} \,.$$

SOLUCIÓN .- Utilizando nuevamente el Ejercicio 1.21 ; y de la relación

$$(|x| + |y|)\left(\frac{1}{|x|} + \frac{1}{|y|}\right) = 1 + \left|\frac{x}{y}\right| + \left|\frac{y}{x}\right| + 1 \geq 2 + 2 = 4 \,,$$

$$(|a|+|b|+|c|)\left(\frac{1}{|a|} + \frac{1}{|b|} + \frac{1}{|c|}\right) =$$

$$= (|a|+|b|)\left(\frac{1}{|a|} + \frac{1}{|b|}\right) + \left(\frac{|c|}{|a|} + \frac{|a|}{|c|}\right) + \left(\frac{|c|}{|b|} + \frac{|b|}{|c|}\right) + 1 \geq$$

$$\geq 4 + 2 + 2 + 1 = 9$$

Dividiendo entre $(|a| + |b| + |c|)$ concluye la demostración.

SERIE DE EJERCICIOS

1. Demuestre:

   a) $\left|\frac{1}{a}\right| = \frac{1}{|a|}$; b) $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$

   c) $\big||a| - |b|\big| \leq |a \pm b|$; d) $|a-b| = |b-a|$

   e) $|a-b| < tb \quad \Rightarrow \quad |a| < (1-t)|b| \quad , \quad 0 < t < 1$;

   f) $|a-c| \leq |a-b| + |b-c| + |c|$;

   g) $\big||a| - |b|\big| \leq \sqrt{|a^2 - b^2|}$; h) $|a-b| \leq |a| + |b|$;

   SUG (g) : Utilice (c) con cada signo, multiplicarlos y tome raiz.

RPTA (a) $1 = |1| = \left|\frac{a}{a}\right| = \left|a \cdot \frac{1}{a}\right| = |a|\left|\frac{1}{a}\right|$; luego, divida los extremos entre $|a|$.

2. Demuestre que para todo $a, b \in \mathbb{R}$:

   a) $|a| + |b| \geq 2\sqrt{|a|}\sqrt{|b|}$

   b) $(a \pm \frac{b}{2})^2 \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad a^2 \pm ab + b^2 \geq 0$

3. Dado $a, b, c \in \mathbb{R}$, demuestre que

   $$(|a| + |b| + |c|)(a^2 + b^2 + c^2) \geq 9|abc|$$

   SUG.- i) Si alguno de ellos es cero, la relación se cumple.
   ii) Si ninguno de ellos es cero, entonces $abc \neq 0$. Utilice:

   $a^2 + c^2 \geq 2|ac|$, $a^2 + b^2 \geq 2|ab|$, $b^2 + c^2 \geq 2|bc| \Rightarrow$

   $(a^2 + b^2 + c^2) \geq |ab| + |bc| + |ac|$. Luego, divida ambos miembros por $|abc|$, y use el resultado del Ejercicio 1.26 (resuelto) .

4. Demuestre que, si $b \geq 0$ entonces $|x| + b \geq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$.
5. Demuestre que, si $b > 0$ entonces $|x| + b > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

2. ECUACIONES CON VALOR ABSOLUTO

2.1 TEOREMA I

1) $|x| = b \quad \Leftrightarrow \quad b \geq 0 \quad y \quad x = \pm b$

2) $|x| = b \quad \Leftrightarrow \quad b \geq 0 \quad y \quad [\, x = b \;,\; x = -b \,]$

2.2 NOTA .- Este teorema establece que el ***UNIVERSO*** dentro del cual se ha de resolver la ecuación: $|x| = b$ está determinado por la condición: $b \geq 0$, la cual debe ser resuelta previamente.

El conectivo lógico "y" que aparece en el Teorema indica ***intersección.***
Una vez encontrado el UNIVERSO de la ecuación se pasa a resolver las ecuaciones $x = b$ asi como $x = -b$, y se comprueba si las respectivas soluciones pertenecen o no a dicho Universo U, o si satisfacen la ecuación original.

PRUEBA DEL TEOREMA I .-

$(\Rightarrow)$ Como $|x| \geq 0$, de $b = |x|$ se sigue que: $b \geq 0$; además,

$$b = |x| = \begin{cases} x & , \text{ si } x \geq 0 \\ -x & , \text{ si } x < 0 \end{cases} ,$$

$$\Rightarrow \quad [\, b = x \quad , \quad b = -x \,]$$
$$\Rightarrow \quad [\, x = b \quad , \quad x = -b \,]$$

$(\Leftarrow)$ Sabiendo que $b \geq 0$, consideramos cada igualdad por separado:

- Si $x = b$, y como $b \geq 0$, entonces $x \geq 0$,
  luego, $|x| = x = b \quad \Rightarrow \quad |x| = b$.
- Si $x = -b$, y como $b \geq 0$, entonces $x \leq 0$,
  luego, $|x| = -x = b \quad \Rightarrow \quad |x| = b$ también.

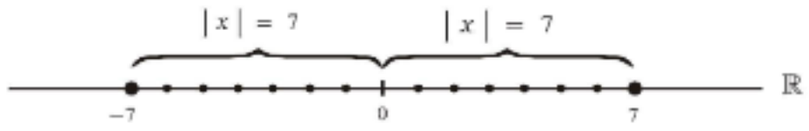
2.3 EJEMPLO .- Resuelva la ecuación: $|x| = 7$.

SOLUCIÓN .- Como $b = 7$ satisface la condición $b \geq 0$ ***para todo*** x ***real***, entonces el ***UNIVERSO*** U es todo $\mathbb{R}$, es decir : $U = \langle -\infty, \infty \rangle$ dentro del cual resolvemos la ecuación:

$$|x| = 7 \quad \Leftrightarrow \quad [\, x = 7 \quad , \quad x = -7 \,]$$

y como ambos valores caen en el ***UNIVERSO*** $U = \langle -\infty, \infty \rangle$ entonces el CONJUNTO SOLUCIÓN está constituido por dos elementos:

Conjunto Solución C.S. $= \{ 7, -7 \}$



2.4 EJEMPLO .- La ecuación: $|x| = -4$ no tiene ninguna solución, pues un valor absoluto ***nunca es negativo***. C.S. $= \varnothing$.

2.5 EJEMPLO .- Resuelva la ecuación: $|3x - 2| = 5$.

SOLUCIÓN .- Aquí, $b = 5$ es ≥ 0 . Así, Universo $U = \langle -\infty, \infty \rangle$.
Luego, $|3x - 2| = 5 \quad \Leftrightarrow \quad [\, 3x - 2 = 5 \quad , \quad 3x - 2 = -5 \,]$
$\Leftrightarrow \quad [\, x = 7/3 \quad , \quad x = -1 \,]$

y como ambos valores de x se encuentran dentro del Universo C.S. $= \{ 7/3 , -1 \}$

2.6 EJEMPLO .- Resuelva: $|x - 4| = 3x$.

SOLUCIÓN .- Aquí, $b = 3x$, de modo que el UNIVERSO U está determinado por la inecuación: $b \geq 0$, es decir: $3x \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \geq 0$, por lo tanto, $x \in U = [\, 0, \infty \rangle$. A continuación resolveremos la ecuación tal como lo indica el TEOREMA 2.1 (I) :

$$|x - 4| = 3x \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} (3x \geq 0) \quad \wedge \\ \wedge \quad [\, (x - 4 = 3x) \quad , \quad (x - 4 = -3x) \,] \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} (x \geq 0) \quad \wedge \\ \wedge \quad [\, (2x = -4) \quad , \quad (4x = 4) \,] \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad (x \geq 0) \quad \wedge \quad [\, x = -2 \quad , \quad x = 1 \,]$$

$$\Leftrightarrow \quad x \in [\, 0, \infty \rangle \cap \{ -2, 1 \} = \{ 1 \}$$

$\therefore$ C.S. $= \{ 1 \}$

Aquí vemos que el UNIVERSO es $U = [\, 0, \infty \rangle$ y que el único valor de x que es solución de la ecuación dada es $x = 1$, pues $x = -2$ no pertenece al Universo U.

2.7 EJERCICIO .- Resuelva la ecuación: $|23 - 4x| = x - 2$.

SOLUCIÓN .- $b = x - 2$. Así, $|23 - 4x| = x - 2 \quad \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \quad [\, x - 2 \geq 0 \,]$ y $[\, 23 - 4x = x - 2 \quad \text{o} \quad 23 - 4x = -(x - 2) \,]$
$\Leftrightarrow \quad [\, x \geq 2 \,]$ y $[\, x = 5 \quad , \quad x = 7 \,]$
$\Leftrightarrow \quad x \in [\, 2, \infty \rangle \cap \{ 5, 7 \} = \{ 5, 7 \}$

Por lo tanto, el CONJUNTO SOLUCIÓN es: C.S. $= \{ 5, 7 \}$.

Note que aquí, el Universo es $U = [\, 2, \infty \rangle$, al cual pertenecen los dos valores hallados para x .

2.8 EJERCICIO .- Resuelva la ecuación: $|3x + 2| = x - 6$

SOLUCIÓN .- Aquí, $b = x - 6$. Así, $|3x + 2| = x - 6 \quad \Leftrightarrow$
$[\, x - 6 \geq 0 \,]$ y $[\, 3x + 2 = x - 6 \quad , \quad 3x + 2 = -(x - 6) \,]$
$\Leftrightarrow \quad [\, x \geq 6 \,]$ y $[\, 2x = -8 \quad , \quad 4x = 4 \,]$
$\Leftrightarrow \quad [\, x \geq 6 \,]$ y $[\, x = -4 \quad , \quad x = 1 \,]$
$\Leftrightarrow \quad x \in [\, 6, \infty \rangle \cap \{ -4, 1 \} = \varnothing$ (conjunto vacío)

$\therefore$ C.S. $= \varnothing$. No existe ningún número real que satisfaga esta ecuación, pues los únicos probables no caen dentro del UNIVERSO $U = [\, 6, \infty \rangle$.
Verifique este hecho reemplazando estos valores probables en la ecuación original.

2.9 EJERCICIO .- Resuelva la ecuación: $-2x = |2x - 3| - 5$

SOLUCIÓN .- La ecuación dada es equivalente a: $|2x-3| = 5-2x$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} [\,5-2x \geq 0\,] \quad y \\ y \quad [\,2x-3 = 5-2x \quad , \quad 2x-3 = -(5-2x)\,] \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \qquad [\,x \leq 5/2\,] \;\; y \;\; [\,x = 2 \quad , \quad -3 = -5\,]$$

FALSO (F)

(Recuerde que: $p \vee F \quad \Leftrightarrow \quad p$)

$$\Leftrightarrow \qquad [\,x \leq 5/2\,] \;\; y \;\; [\,x = 2\,]$$

$$\Leftrightarrow \quad x \in \langle -\infty\,,\, 5/2\,] \cap \{2\} = \{2\} \quad \Leftrightarrow \quad x = 2\,.$$

Así, el Conjunto Solución consiste de un solo elemento: C.S. $= \{2\}$.

2.10 EJERCICIO .- Resuelva la ecuación: $\left|\dfrac{x}{x-1}\right| = \dfrac{4}{x}$

SOLUCIÓN .- El UNIVERSO U está determinado por la solución de:

$$\frac{4}{x} \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x > 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \in \langle 0\,,\,\infty\rangle = U$$

Toda solución que hallemos a continuación, lo intersectaremos al final con el Universo U, lo cual equivale a elegir aquel (o aquellos) valor(es) que se encuentre(n) dentro de U; así, sobre $U = \langle 0\,,\,\infty\rangle$:

$$\left|\frac{x}{x-1}\right| = \frac{4}{x} \quad \Leftrightarrow \quad [\;\underbrace{\frac{x}{x-1} = \frac{4}{x}}_{(1)} \quad , \quad \underbrace{\frac{x}{x-1} = -\frac{4}{x}}_{(2)}\;]$$

Resolviendo (1) y (2) por separado y luego reuniendo las soluciones :

$$\frac{x}{x-1} = \frac{4}{x} \quad \Leftrightarrow \quad x^2 = 4(x-1) \quad \text{con} \quad x \neq 0\,,\; x \neq 1$$

$$\Leftrightarrow \quad x^2 - 4x + 4 = 0 \quad , \quad "$$

$$\Leftrightarrow \quad (x-2)^2 = 0 \quad , \quad "$$

$$\Leftrightarrow \quad x = 2$$

$$\frac{x}{x-1} = -\frac{4}{x} \quad \Leftrightarrow \quad x^2 = -4(x-1) \quad , \quad x \neq 0\,,\; x \neq 1$$

$$\Leftrightarrow \quad x^2 + 4x = 4 \quad , \quad "$$

$$\Leftrightarrow \quad (x+2)^2 = 8 \quad , \quad "$$

$$\Leftrightarrow \quad x = -2 \pm \sqrt{8} = -2 \pm 2\sqrt{2}$$

y el Conjunto Solución estará dado por:

$$x \in \text{C.S.} = U \cap \{\,2\,,\; -2+2\sqrt{2}\,,\; -2-2\sqrt{2}\,\}$$

$$= \langle 0\,,\,\infty\rangle \cap \{\,2\,,\, -2+2\sqrt{2}\,,\, -2-2\sqrt{2}\,\}$$

$$= \{\,2\,,\, 2\sqrt{2}-2\,\}$$

2.11 EJERCICIO .- Resuelva : $|x-6| - |x-3| = |x-1| \qquad (*)$

SOLUCIÓN .- Hallando los **Puntos Críticos** (donde se anula cada valor absoluto): $x = 6\,,\; x = 3\,,\; x = 1$, particionamos luego toda la recta real en la forma siguiente, con el fin de eliminar las barras de los valores absolutos:

$$\langle -\infty\,,\,\infty\rangle = \underbrace{\langle -\infty\,,\,1\rangle}_{(1)} \cup \underbrace{[\,1\,,\,3\rangle}_{(2)} \cup \underbrace{[\,3\,,\,6\rangle}_{(3)} \cup \underbrace{[\,6\,,\,\infty\rangle}_{(4)}$$

Ahora resolveremos sobre cada uno de los intervalos (1), (2), (3) y (4), llamados ***UNIVERSOS PARCIALES***, y tal como está indicado, al final reuniremos las soluciones parciales para establecer al Conjunto Solución de la ecuación:

(1) Si $x \in \langle -\infty\,,1\rangle$: $x < 1 < 3 < 6 \quad \Rightarrow \quad x-1 < 0\,,$

$x-3 < 0\,, \quad x-6 < 0\,,$ entonces

$$(*) \quad \Leftrightarrow \quad -(x-6) - [\,-(x-3)\,] = -(x-1) \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad -x+6+x-3 = -x+1 \quad \Leftrightarrow \quad x = -2$$

válido pues $x = -2 \in \langle \infty\,,\,1\rangle$. (válido)

(2) Si $x \in [\,1\,,3\rangle$: $1 \leq x < 3 < 6 \quad \Rightarrow \quad x-1 \geq 0\,,$

$x-3 < 0\,, \quad x-6 < 0$, entonces

$$(*) \quad \Leftrightarrow \quad -(x-6) - [\,-(x-3)\,] = x-1$$

$$\Leftrightarrow \quad -x+6+x-3 = x-1$$

$$\Leftrightarrow \quad x = 4 \qquad \text{(descartado)}$$

se descarta pues no pertenece a $[\,1\,,\,3\rangle$.

(3) Si $x \in [\,3\,,6\rangle$: $1 < 3 \leq x < 6 \quad \Rightarrow \quad x-1 > 0\,,$

$x-3 \geq 0\,, \quad x-6 < 0\,,$ entonces

$$(*) \quad \Leftrightarrow \quad -(x-6) - (x-3) = x-1$$

$$\Leftrightarrow \quad 10 = 3x$$

$$\Leftrightarrow \quad x = 10/3 = 3.33\ldots \quad \text{(válido)}$$

este valor sí se considera pues pertenece a $[\,3\,,\,6\rangle$.

(4) Si $x \in [\,6\,,\infty\rangle$: $1 < 3 < 6 \leq x \quad ,$ entonces

$$(*) \quad \Leftrightarrow \quad (x-6) - (x-3) = x-1$$

$$\Leftrightarrow \quad x = -2 \qquad \text{(descartado)}$$

este valor se descarta pues no pertenece a $[\,6\,,\infty\rangle$.

Y reuniendo todas estas soluciones parciales: C.S. $= \{-2\,,\,10/3\}$.

2.12 EJERCICIO .- Resuelva : $(x-4)^2 - 2|x-4| - 15 = 0$

SOLUCIÓN .- Observando con algún cuidado vemos que la ecuación es equivalente a:

$$|x-4|^2 - 2|x-4| - 15 = 0 \qquad \text{¡ la cual podemos factorizar !}$$

$$(|x-4|+3)(|x-4|-5) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad [\;\underbrace{|x-4|+3 = 0}_{\uparrow} \quad , \quad |x-4|-5 = 0\;]$$

falso ¿por qué?

$\Leftrightarrow \quad |x-4| = 5 \quad \Leftrightarrow \quad [\ x-4=5 \ , \ x-4=-5\ ]$

$\Leftrightarrow \quad x = 9 \ , \ x = -1$

$\therefore$ C.S. $= \{ 9, -1 \}$.

2.13 TEOREMA II .- Dados $a, b \in \mathbb{R}$:

1) $|a| = |b| \quad \Leftrightarrow \quad a = \pm b$

2) $|a| = |b| \quad \Leftrightarrow \quad [\ a = b \ , \ a = -b\ ]$

PRUEBA .- Se sigue de: $|a| = |b| \quad \Leftrightarrow \quad |a|^2 = |b|^2 \quad \Leftrightarrow \quad a^2 = b^2$.

2.14 APLICACIÓN .- Resuelva la ecuación: $|6x-3| = |x+17|$

SOLUCIÓN .- Del TEOREMA II (2.13) :

$|6x-3| = |x+17| \quad \Leftrightarrow \quad [\ 6x-3 = x+17 \ , \ 6x-3 = -(x+17)\ ]$

$\Leftrightarrow \quad [\ x = 4 \ , \ x = -2\ ]$

$\therefore$ CONJUNTO SOLUCIÓN C.S. $= \{ 4, -2 \}$.

2.15 APLICACIÓN .- Resuelva: $\left| 10 - 3x + x^2 \right| = \left| x^2 + x - 6 \right| \quad (*)$

SOLUCIÓN .- Del TEOREMA II (2.13) :

$(*) \Leftrightarrow [\ 10-3x+x^2 = x^2+x-6 \ , \ 10-3x+x^2 = -(x^2+x-6)\ ]$

$\Leftrightarrow [\ x = 4 \ , \ 2[\ (x-\frac{1}{2})^2 + \frac{7}{4}\ ] = 0\ ] \quad \Leftrightarrow \quad x = 4$.

CONJUNTO SOLUCIÓN C.S. $= \{4\}$, pues la segunda ecuación (cuadrática) no tiene soluciones reales ($\varnothing$) .

3. INECUACIONES CON VALOR ABSOLUTO

3.1 TEOREMA III .- Sean $x, a \in \mathbb{R}$, entonces

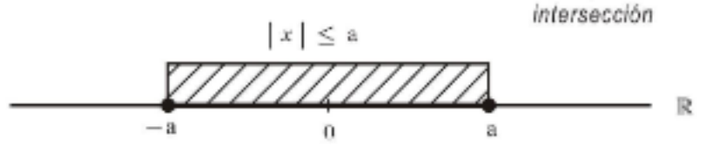
(1) $|x| \leq a \quad \Leftrightarrow \quad [\ (a \geq 0) \ \text{y} \ (-a \leq x \leq a)\ ]$

(2) $|x| \geq a \quad \Leftrightarrow \quad [\ (x \geq a) \ \sigma \ (x \leq -a)\ ]$

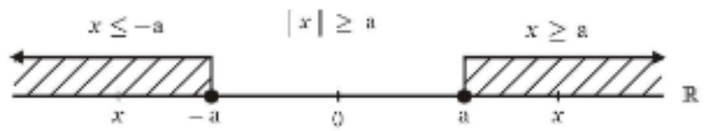
NOTA .- Recuerde que: $-a \leq x \leq a \quad \Leftrightarrow \quad [\ (-a \leq x) \ \text{y} \ (x \leq a)\ ]$

↑ *intersección*

(1)



(2)



PRUEBA DEL TEOREMA III .-

(1) ($\Rightarrow$) Como $a \geq |x|$ y $|x| \geq 0$ entonces $a \geq 0$, y

$|x|^2 \leq a^2 \ , \quad \Rightarrow \quad x^2 \leq a^2 \quad \Rightarrow \quad -a \leq x \leq a$.

($\Leftarrow$) Datos: $a \geq 0 \ , \quad x \leq a \quad \text{y} \quad -a \leq x$, entonces

$x \leq a \ \text{y} \ -x \leq a \quad \Rightarrow \quad |x| \leq a$ .. debido al Ejercicio 1.17.

(2) ($\Rightarrow$) $\forall\, x \in \mathbb{R}$: $x \geq 0 \quad \sigma \quad x < 0$, de donde

- Si $x \geq 0$: $|x| = x$; y como se cumple: $|x| \geq a$ entonces $x \geq a$.

σ - Si $x < 0$: $|x| = -x$; como se cumple: $|x| \geq a$ entonces $-x \geq a \quad \Rightarrow \quad x \leq -a$.

($\Leftarrow$) Ejercicio para el estudiante.

3.2 EJEMPLO .- Resuelva la inecuación: $|x| \leq 5$.

SOLUCIÓN .- Aquí, $a = 5 \geq 0$, entonces por el TEOREMA III (1),

$|x| \leq 5 \quad \Leftrightarrow \quad [\ (5 \geq 0) \quad \text{y} \quad (-5 \leq x \leq 5)\ ]$

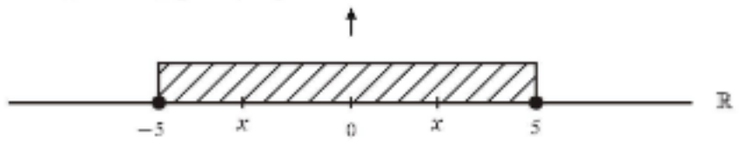
↑

verdadero (V)

$\Leftrightarrow \quad [\ (-5 \leq x \leq 5)\ ]$ (pues $V \wedge p \ \Leftrightarrow \ p$)

$\Leftrightarrow \quad x \in [-5, 5] =$ C.S.

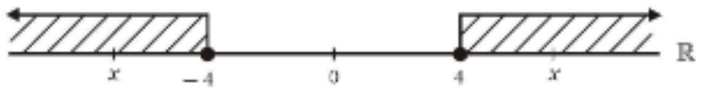
↑



3.3 EJEMPLO .- Resuelva la inecuación: $|x| \geq 4$.

SOLUCIÓN .- Por el TEOREMA III (2): identificamos $a = 4$,

$$\begin{aligned} |x| \geq 4 &\Leftrightarrow [\ x \geq 4 \ \vee \ x \leq -4\ ] \\ &\Leftrightarrow x \in [4, \infty\rangle \ \vee \ x \in \langle -\infty, -4] \\ &\Leftrightarrow x \in [4, \infty\rangle \cup \langle -\infty, -4] \\ &\Leftrightarrow x \in \langle -\infty, -4] \cup [4, \infty\rangle = \text{C.S.} \end{aligned}$$



3.4 COROLARIO .- Sean x y $a \in \mathbb{R}$, entonces

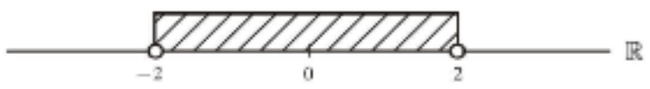
(1) $|x| < a \Leftrightarrow [\ (a > 0) \ \wedge \ (-a < x < a)\ ]$

(2) $|x| > a \Leftrightarrow [\ (x > a) \ \vee \ (x < -a)\ ]$

3.5 EJEMPLO .- Resuelva la inecuación: $|x| < 2$.

SOLUCIÓN .- Identificando $a = 2$; y por el COROLARIO 3.4 :

$$\begin{aligned} |x| < 2 &\Leftrightarrow [(2 > 0) \ \text{y} \ (-2 < x < 2)] \\ &\Leftrightarrow [\ \text{V} \ \text{y} \ x \in \langle -2, 2\rangle\ ] \quad \{\ \text{V} = \text{Verdadero}\ \} \\ &\Leftrightarrow x \in \langle -2, 2\rangle = \text{C.S.} \end{aligned}$$



3.6 EJERCICIO .- Resuelva la inecuación: $\left|9 - x^2\right| \geq 7$.

SOLUCIÓN .- Por el TEOREMA III (2):

$$\begin{aligned} \left|9 - x^2\right| \geq 7 &\Leftrightarrow [\ (9 - x^2) \geq 7 \ \vee \ (9 - x^2) \leq -7\ ] \\ &\Leftrightarrow [\ x^2 \leq 2 \ \vee \ x^2 \geq 16\ ] \\ &\Leftrightarrow -\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2} \ \vee \ x \geq 4 \ \vee \ x \leq -4 \\ &\Leftrightarrow x \in [-\sqrt{2}, \sqrt{2}] \cup [4, \infty\rangle \cup \langle -\infty, -4] = \text{C.S.} \end{aligned}$$

3.7 TEOREMA .- Dados a y $b \in \mathbb{R}$:

(1) $|a| \geq |b| \Leftrightarrow (a + b)(a - b) \geq 0$

(2) $|a| \leq |b| \Leftrightarrow (a + b)(a - b) \leq 0$

PRUEBA .- (1) Se sigue de: $|a| \geq |b| \Leftrightarrow a^2 \geq b^2 \Leftrightarrow a^2 - b^2 \geq 0$

3.8 COROLARIO .- Dados a y $b \in \mathbb{R}$:

(1) $|a| > |b| \Leftrightarrow (a + b)(a - b) > 0$

(2) $|a| < |b| \Leftrightarrow (a + b)(a - b) < 0$

3.9 EJERCICIO .- Resuelva la inecuación: $|x - 5| > |2x + 3|$

SOLUCIÓN .- Según el COROLARIO 3.8 (1):

$$\begin{aligned} |x - 5| > |2x + 3| &\Leftrightarrow [(x - 5) + (2x + 3)][(x - 5) - (2x + 3)] > 0 \\ &\Leftrightarrow [\ 3x - 2\ ][\ -x - 8\ ] > 0 \\ &\Leftrightarrow (3x - 2)(x + 8) < 0 \qquad (*) \\ &\Leftrightarrow x \in \langle -8, 2/3\rangle \end{aligned}$$

pues los 'puntos críticos' de $(*)$ son: -8 y $2/3$.

3.10 EJERCICIO .- Resuelva: $\left|x^2 - 3x - 6\right| \leq |6 + x|$ $\qquad (*)$

SOLUCIÓN .-

$$\begin{aligned} (*) &\Leftrightarrow [(x^2 - 3x - 6) + (6 + x)][(x^2 - 3x - 6) - (6 + x)] \leq 0 \\ &\Leftrightarrow (x^2 - 2x)(x^2 - 4x - 12) \leq 0 \\ &\Leftrightarrow x(x - 2)(x - 6)(x + 2) \leq 0 \end{aligned}$$

[Puntos críticos: $\underset{+}{-2}, \ \underset{-}{0}, \ \underset{+}{2}, \ \underset{-}{6}\ \underset{(+)}{\ }$]

$$\Leftrightarrow x \in [-2, 0] \cup [2, 6] = \text{C.S.}$$

4. PROBLEMAS DE APLICACIÓN

4.1 EJERCICIO .- Resuelva la inecuación: $\dfrac{1}{|2x - 3|} < 1$

SOLUCIÓN .- La inecuación es equivalente a:

$$\begin{aligned} &|2x - 3| > 1 \quad , \quad x \neq 3/2 \qquad \text{¿por qué?} \\ \Leftrightarrow\ &[\ 2x - 3 > 1 \ \vee \ 2x - 3 < -1\ ] \ , \ x \neq 3/2 \\ \Leftrightarrow\ &[\ x > 2 \ \vee \ x < 1\ ] \ , \ x \neq 3/2 \\ \Leftrightarrow\ &x \in \langle 2, \infty\rangle \cup \langle -\infty, 1\rangle \ , \ x \neq 3/2 \\ \Leftrightarrow\ &x \in \langle -\infty, 1\rangle \cup \langle 2, \infty\rangle = \text{C.S.} \qquad \{\ \text{Note que } 3/2 \text{ no está}\ \} \end{aligned}$$

4.2 EJERCICIO .- Si $A = \{ x \in \mathbb{R} / \left| 9 - x^2 \right| \geq 7 \}$ y

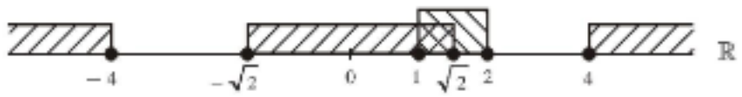
$B = \{ x \in \mathbb{R} / \frac{1}{|2x-3|} < 1 \}$, halle $A - B$.

SOLUCIÓN .- De los EJERCICIOS 3.6 y 4.1 :

$A = \langle -\infty, -4] \cup [-\sqrt{2}, \sqrt{2}] \cup [4, \infty \rangle$

$B = \langle -\infty, 1 \rangle \cup \langle 2, \infty \rangle$, $\complement B = [1, 2]$

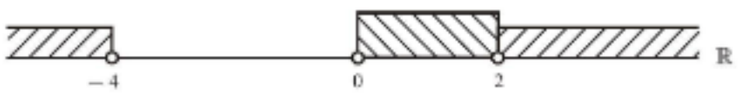
Por lo tanto, $A - B = A \cap \complement B = [1, \sqrt{2}]$



4.3 EJERCICIO .- Resuelva: $\left| x^2 - 4 \right| > -2x + 4$ (*)

SOLUCIÓN .-

$$(*) \Leftrightarrow [(x^2 - 4) > (-2x + 4) \vee (x^2 - 4) < -(-2x + 4)]$$
$$\Leftrightarrow [x^2 + 2x - 8 > 0 \vee x^2 - 2x < 0]$$
$$\Leftrightarrow (x + 4)(x - 2) > 0 \vee x(x - 2) < 0$$
$$\Leftrightarrow x \in \langle -\infty, -4 \rangle \cup \langle 2, \infty \rangle \vee x \in \langle 0, 2 \rangle$$
$$\Leftrightarrow x \in \langle -\infty, -4 \rangle \cup \langle 0, 2 \rangle \cup \langle 2, \infty \rangle = \text{C.S.}$$



4.4 EJERCICIO .- Resuelva (*) : $\left| |x - 1| + x \right| > \sqrt{-x}$

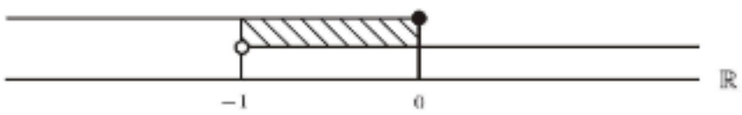
SOLUCIÓN .- Universo $U : -x \geq 0 \Rightarrow x \leq 0 \Rightarrow U = \langle -\infty, 0]$

entonces elevando ambos miembros al cuadrado tenemos:

$(*) \Leftrightarrow (|x - 1| + x)^2 > (-x)$ y $x \in U = \langle -\infty, 0]$

[como $x \leq 0$ entonces $x - 1 \leq -1 < 0$]

$$\Leftrightarrow (-(x - 1) + x)^2 > -x \quad \text{y} \quad x \in U = \langle -\infty, 0]$$
$$\Leftrightarrow x > -1 \quad \text{y} \quad x \in U = \langle -\infty, 0]$$
$$\Leftrightarrow x \in \langle -1, \infty \rangle \cap U = \langle -1, 0] = \text{C.S.}$$



4.5 EJERCICIO .- Resuelva: $|x - 4| - |x - 2| \leq |x - 1|$ (*)

SOLUCIÓN .- Considerando los puntos en donde se anula cada valor absoluto, particionamos la recta real en la forma siguiente:

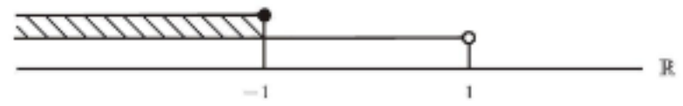
$$\langle -\infty, \infty \rangle = \underset{(1)}{\langle -\infty, 1 \rangle} \cup \underset{(2)}{[1, 2 \rangle} \cup \underset{(3)}{[2, 4 \rangle} \cup \underset{(4)}{[4, \infty \rangle}$$

A continuación resolvemos sobre cada universo parcial (1), (2), (3) y (4) y reunimos al final las soluciones halladas:

(1) Si $x \in U_1 = \langle -\infty, 1 \rangle : x < 1 < 2 < 4$, entonces

$(*) \Leftrightarrow -(x - 4) - [-(x - 2)] \leq -(x - 1) \Leftrightarrow x \leq -1$

Solución (1) : $\langle -\infty, -1] \cap U_1 = \langle -\infty, -1] \cap \langle -\infty, 1 \rangle = \langle -\infty, -1]$



(2) Si $x \in U_2 = [1, 2 \rangle : \quad 1 \leq x < 2 < 4$, entonces

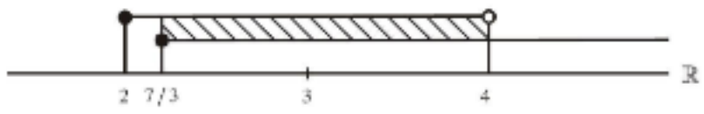
$(*) \Leftrightarrow -(x - 4) - [-(x - 2)] \leq x - 1 \Leftrightarrow x \geq 3$

Solución (2) : $[3, \infty \rangle \cap U_2 = [3, \infty \rangle \cap [1, 2 \rangle = \varnothing$

(3) Si $x \in U_3 = [2, 4 \rangle : \quad 1 < 2 \leq x < 4$, entonces

$(*) \Leftrightarrow -(x - 4) - (x - 2) \leq x - 1 \Leftrightarrow x \geq 7/3$

Solución (3) : $[7/3, \infty \rangle \cap U_3 = [7/3, 4 \rangle$



(4) Si $x \in U_4 = [4, \infty \rangle$. Solución (4) $= [4, \infty \rangle$ (verificar).

EL CONJUNTO SOLUCIÓN de (*) es la reunión de las cuatro soluciones parciales:

C.S. $= \langle -\infty, -1] \cup [7/3, 4 \rangle \cup [4, \infty \rangle = \langle -\infty, -1] \cup [7/3, \infty \rangle$.

4.6 EJERCICIO .- Exprese en términos de intervalos el conjunto

$$A = \{ \frac{x - 3}{|x - 3| + 1} / x \in \mathbb{R} \}$$

SOLUCIÓN .- $A = \{ y \in \mathbb{R} / y = \frac{x - 3}{|x - 3| + 1}, x \in \langle -\infty, \infty \rangle \}$

a) Si $x \in U_1 = \langle -\infty, 3 \rangle : x < 3 \Rightarrow |x - 3| = -(x - 3)$ (*)

$$y = \frac{x-3}{|x-3|+1} = \frac{x-3}{4-x} \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{4y+3}{y+1}$$

y de $(*)$: $x < 3 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{4y+3}{y+1} < 3 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{4y+3}{y+x} - 3 < 0$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{y}{y+1} < 0 \quad \Leftrightarrow \quad y \in \langle -1, 0 \rangle$$

Solución (a) : $y \in A_1 = \langle -1, 0 \rangle$.

b) Si $x \in U_2 = [3, \infty\rangle$: $x \geq 3 \quad \Leftrightarrow \quad y \in [0, 1\rangle$, siguiendo el proceso similar a la parte (a). Luego, $y \in A_2 = [0, 1\rangle$.
Reuniendo (a) con (b) : $A = A_1 \cup A_2 = \langle -1, 0\rangle \cup [0, 1\rangle = \langle -1, 1\rangle$.

4.7 EJERCICIO .- Resuelva la inecuación: $\left|\frac{5}{2x-1}\right| \geq \left|\frac{1}{x-2}\right|$.

SOLUCIÓN .- La inecuación es equivalente a :

$$|5(x-2)| \geq |2x-1| \quad , \text{ pero con } \quad x \neq \frac{1}{2} \quad , \quad x \neq 2 \qquad (*)$$

Por el TEOREMA 3.7 (1) :

$$|5x-10| \geq |2x-1|$$

$$\Leftrightarrow \quad [(5x-10)+(2x-1)][(5x-10)-(2x-1)] \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \quad [7x-11][3x-9] \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x-\tfrac{11}{7})(x-3) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \quad x \in \langle -\infty, \tfrac{11}{7}] \cup [3, \infty\rangle$$

Por lo tanto, de $(*)$: C.S. $= (\langle -\infty, \frac{11}{7}] \cup [3, \infty\rangle) - \{\frac{1}{2}, 2\}$

$$\Rightarrow \quad \text{C.S.} = \langle -\infty, 1/2\rangle \cup \langle 1/2, 11/7] \cup [3, \infty\rangle$$

Verifique este resultado para algunos valores particulares de x, reemplazando en la inecuación original; por ejemplo, para $x = 0$:

$$\left|\frac{5}{2(0)-1}\right| \geq \left|\frac{1}{0-2}\right| \quad \Rightarrow \quad 5 \geq \frac{1}{2} \quad \text{(verdadero)}$$

4.8 EJERCICIO .- Resuelva: $\left|\frac{x+1}{x-2}\right| < \frac{x-2}{x+3} \qquad (*)$

SOLUCIÓN .- Por 3.4 (1) :

$$(*) \quad \Leftrightarrow \quad [\frac{x-2}{x+3} > 0] \text{ y } [-\frac{x-2}{x+3} < \frac{x+1}{x-2} < \frac{x-2}{x+3}]$$

a) Hallando el Universo U : $\frac{x-2}{x+3} > 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \in \langle -\infty, -3\rangle \cup \langle 2, \infty\rangle = U$

b) Resolviendo $-\frac{x-2}{x+3} < \frac{x+1}{x-2} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x+1}{x-2} + \frac{x-2}{x+3} > 0$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{2x^2+7}{(x-2)(x+3)} > 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x-2)(x+3) > 0 \quad \text{¿por qué?}$$

$$\Leftrightarrow \quad x \in \langle -\infty, -3\rangle \cup \langle 2, \infty\rangle \, .$$

c) Resolviendo $\frac{x+1}{x-2} < \frac{x-2}{x+3} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x+1}{x-2} - \frac{x-2}{x+3} < 0$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{x-(1/8)}{(x-2)(x+3)} < 0 \text{ , puntos críticos: } \underset{(-)}{\quad} -3, \underset{(+)}{\quad} \frac{1}{8}, \underset{(-)}{\quad} 2 \underset{(+)}{\quad}$$

$$\Leftrightarrow \quad x \in \langle -\infty, -3\rangle \cup \langle \tfrac{1}{8}, 2\rangle$$

Intersectando (a), (b) y (c) obtenemos C.S: $= \langle -\infty, -3\rangle$.

4.9 EJERCICIO .- Resuelva la inecuación: $\frac{x}{|x|-5} > 0$

SOLUCIÓN .- Como $|x| = 0$ para $x = 0$, consideremos dos casos:

(1) Para $x \in U_1 = \langle -\infty, 0\rangle$: $x < 0$, $|x| = -x$, entonces

$$\frac{x}{|x|-5} > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x}{-x-5} > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x}{x+5} < 0$$

$\Leftrightarrow \quad x \in \langle -5, 0\rangle$, que al intersectar con $U_1 = \langle -\infty, 0\rangle$ resulta:

Solución (1) $= U_1 \cap \langle -5, 0\rangle = \langle -5, 0\rangle$.

(2) Para $x \in U_2 = [0, \infty\rangle$: $x \geq 0$, $|x| = x$, entonces

$$\frac{x}{|x|-5} > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x}{x-5} > 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \in \langle -\infty, 0\rangle \cup \langle 5, \infty\rangle$$

que al intersectar con $U_2 = [0, \infty\rangle$ resulta la

Solución (2) $= U_2 \cap (\langle -\infty, 0\rangle \cup \langle 5, \infty\rangle) = \langle 5, \infty\rangle$

EL CONJUNTO SOLUCIÓN de la inecuación original se obtiene reuniendo (1) y (2) :
C.S: $= \langle -5, 0\rangle \cup \langle 5, \infty\rangle$

4.10 EJERCICIO .- Resuelva la inecuación: $\frac{|6x-x^2|-4}{4-|x|} > -1$

SOLUCIÓN .-

$$\frac{|6x-x^2|-4}{4-|x|} + 1 > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{|x^2-6x|-|x|}{|x|-4} < 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$[\ |x^2-6x|-|x|>0 \quad y \quad |x|-4<0\ ] \quad \vee$$

$$\vee \quad [\ |x^2-6x|-|x|<0 \quad y \quad |x|-4>0\ ] \quad \Leftrightarrow$$

$$[\ |x^2-6x| > |x| \quad y \quad |x|<4\ ] \quad \vee$$

$$\vee \quad [\ |x^2-6x| < |x| \quad y \quad |x|>4\ ] \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad [\ x\in\langle-\infty,0\rangle\cup\langle 0,5\rangle\cup\langle 7,\infty\rangle \quad y \quad x\in\langle -4,4\rangle\ ] \quad \vee$$

$$\vee \quad [\ x\in\langle 5,7\rangle \quad y \quad x\in\langle-\infty,-4\rangle\cup\langle 4,\infty\rangle\ ]$$

$$\Leftrightarrow \quad x\in(\langle-\infty,0\rangle\cup\langle 0,5\rangle\cup\langle 7,\infty\rangle)\cap\langle -4,4\rangle \quad \vee$$

$$\vee \quad x\in\langle 5,7\rangle\cap(\langle-\infty,-4\rangle\cup\langle 4,\infty\rangle)$$

$$\Leftrightarrow \quad x\in[\langle -4,0\rangle\cup\langle 0,4\rangle] \quad \vee \quad x\in\langle 5,7\rangle$$

$$\Leftrightarrow \quad x\in\langle -4,0\rangle\cup\langle 0,4\rangle\cup\langle 5,7\rangle = \text{C.S.}$$

4.11 EJERCICIO .- Resuelva: $\sqrt{|x+2|-3}+\sqrt{5-|4-x|}>0 \quad (*)$

SOLUCIÓN .- De la fórmula

$$\sqrt{a}+\sqrt{b}>0 \quad \Leftrightarrow \quad [\ a\geq 0 \quad y \quad b>0\ ] \quad \vee \quad [\ a>0 \quad y \quad b\geq 0\ ]$$

tenemos que la inecuación $(*)$ es equivalente a:

$$[\ |x+2|\geq 3 \ y \ 5>|x-4|\ ] \quad \vee \quad [\ |x+2|>3 \ y \ 5\geq|x-4|\ ]$$

$$\Leftrightarrow \quad [\ (x+2\geq 3 \quad \vee \quad x+2\leq -3) \quad y \quad (-5<x-4<5)\ ] \quad \vee$$

$$\vee \ [\ (x+2>3 \quad \vee \quad x+2<-3) \quad y \quad (-5\leq x-4\leq 5)\ ]$$

$$\Leftrightarrow \quad [\ (x\geq 1 \quad \vee \quad x\leq -5) \quad y \quad (-1<x<9)\ ] \quad \vee$$

$$\vee \ [\ (x>1 \quad \vee \quad x<-5) \quad y \quad (-1\leq x\leq 9)\ ]$$

$$\Leftrightarrow \quad x\in(\langle-\infty,-5]\cup[1,\infty\rangle)\cap\langle -1,9\rangle \quad \vee$$

$$\vee \quad x\in(\langle-\infty,-5\rangle\cup\langle 1,\infty\rangle)\cap[-1,9]$$

$$\Leftrightarrow \quad x\in[1,9\rangle\cup\langle 1,9]=[1,9] = \text{C.S.}$$

4.12 EJERCICIO .- Resuelva la inecuación: $\left|\frac{2x-5}{x+1}\right|>1 \quad (*)$

SOLUCIÓN .- $\equiv |2x-5|>|x+1| \quad y \quad x\neq -1$, cuya solución (verificar) es: $x\in\langle-\infty,-1\rangle\cup\langle -1,4/3\rangle\cup\langle 6,\infty\rangle = \text{C.S.}$

4.13 EJERCICIO .- Dados dos números de signos opuestos a y b :

$$a<x<b \quad \Rightarrow \quad 0\leq|x|<\text{máx}\{|a|,|b|\}$$

Donde máx $\{|a|,|b|\}$ = mayor (o igual si $a=-b$) entre $|a|$ y $|b|$.

4.14 EJERCICIO .- Resuelva: $1\leq|2x-3|\leq 3x-6$.

SOLUCIÓN .- Resolver esta cadena de desigualdades es equivalente a resolver

$$1\leq|2x-3| \quad y \quad |2x-3|\leq 3x-6$$

e intersectar ambas soluciones al final, tal como procedemos a continuación:

a) $1\leq|2x-3| \quad \Leftrightarrow \quad [\ 2x-3\geq 1 \quad \vee \quad 2x-3\leq -1\ ]$

$$\Leftrightarrow \quad [\ x\geq 2 \quad \vee \quad x\leq 1\ ]$$

$$\Leftrightarrow \quad x\in\langle-\infty,1]\cup[2,\infty\rangle$$

b) $|2x-3|\leq 3x-6$

$$\Leftrightarrow \quad [\ (3x-6)\geq 0 \quad y \quad -(3x-6)\leq 2x-3\leq 3x-6\ ]$$

$$\Leftrightarrow \quad (x\geq 2) \quad y \quad (x\geq 9/5 \quad y \quad x\geq 3)$$

$$\Leftrightarrow \quad x\in[2,\infty\rangle\cap([9/5,\infty\rangle\cap[3,\infty\rangle)=[3,\infty\rangle$$

Por lo tanto, el CONJUNTO SOLUCIÓN está dado por:

$$\text{C.S.} = (a)\cap(b)=(\langle-\infty,1]\cup[2,\infty\rangle)\cap[3,\infty\rangle=[3,\infty\rangle$$

4.15 EJERCICIO .- Resuelva: $\dfrac{2-|2-x|-x}{|x^2-x|-2}\geq 0$

SOLUCIÓN .-

La inecuación es equivalente a: $\dfrac{x-2+|x-2|}{|x||x-1|-2}\leq 0 \quad (*)$

Para poder trabajar esta expresión particionaremos la recta real a través de los puntos x donde se anula cada valor absoluto: $x=0,1$ y 2. Es decir,

$$\langle-\infty,\infty\rangle=\underset{(a)}{\langle-\infty,0\rangle}\cup\underset{(b)}{[0,1\rangle}\cup\underset{(c)}{[1,2\rangle}\cup\underset{(d)}{[2,\infty\rangle}$$

a) Si $x\in U_a=\langle-\infty,0\rangle$: $x<0<1<2 \quad \Rightarrow \quad |x|=-x$,

$|x-1|=-(x-1)$, $|x-2|=-(x-2)$, entonces

$$(*) \Leftrightarrow \frac{x-2-(x-2)}{(-x)[-(x-1)]-2}\leq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{0}{x^2-x-2}\leq 0 = (x+1)(x-2)$$

$\Leftrightarrow \quad 0\leq 0$ *VERDADERO*, $\forall x\in U_a$, $x\neq -1$, $x\neq 2$

Solución (a) $= U_a-\{-1,2\}=\langle-\infty,-1\rangle\cup\langle -1,0\rangle$.

b) Si $x\in U_b=[0,1\rangle$: $0\leq x<1<2 \quad \Rightarrow \quad |x|=x$,

$|x-1|=-(x-1)$, $|x-2|=-(x-2)$; entonces

$(*) \Leftrightarrow \dfrac{x-2-(x-2)}{-x^2+x-2} \le 0 \Leftrightarrow \dfrac{x-2-(x-2)}{x^2-x+2} \ge 0$

$\Leftrightarrow \dfrac{0}{(x-\frac{1}{2})^2+\frac{7}{4}} \ge 0 \Leftrightarrow 0 \ge 0$ *VERDADERO* ,

para todo $x \in U_b = [0, 1\rangle$ = Solución (b)

c) Si $x \in U_c = [1, 2\rangle$: $0 < 1 \le x < 2 \Rightarrow |x| = x$,

$|x-1| = (x-1)$, $|x-2| = -(x-2)$; entonces

$(*) \Leftrightarrow \dfrac{x-2-(x-2)}{x^2-x-2} \le 0 \Leftrightarrow \dfrac{0}{(x+1)(x-2)} \le 0$

$\Leftrightarrow 0 \le 0$ ***VERDADERO*** $\vee\, x \in U_c$, $x \ne -1$, $x \ne 2$

Solución (c) $= U_c - \{-1, 2\} = [1, 2\rangle - \{-1, 2\} = [1, 2\rangle$

d) Si $x \in U_d = [2, \infty\rangle$: $|x| = x$, $|x-1| = x-1$, $|x-2| = x-2$

$(*) \Leftrightarrow \dfrac{x-2+(x-2)}{x^2-x-2} \le 0 \Leftrightarrow \dfrac{2(x-2)}{(x+1)(x-2)} \le 0$

$\Leftrightarrow [\dfrac{2}{x+1} \le 0 \ , \ x \ne 2] \Leftrightarrow [x+1 < 0 \ \text{ y } \ x \ne 2]$

$\Leftrightarrow [x < -1 \ \text{ y } \ x \ne 2] \Leftrightarrow x \in \langle -\infty, -1\rangle - \{2\}$

$\Leftrightarrow x \in \langle -\infty, -1\rangle$

Solución (d) $= U_d \cap \langle -\infty, -1\rangle = [2, \infty\rangle \cap \langle -\infty, -1\rangle = \varnothing$

Reuniendo las cuatro soluciones parciales (a), (b) , (c) y (d):

C.S. $= \langle -\infty, -1\rangle \cup \langle -1, 0\rangle \cup [0, 1\rangle \cup [1, 2\rangle \cup \varnothing$

$= \langle -\infty, -1\rangle \cup \langle -1, 2\rangle$.

4.16 EJERCICIO .- Resuelva la inecuación: $\dfrac{|x|^3 - 4x^2 + 20}{|x|+1} \ge 4$.

SOLUCIÓN .- Restando 4 a ambos miembros, tenemos equivalentemente:

$\dfrac{|x|^3 + 4|x|^2 - 4|x| + 16}{|x|+1} \ge 0$; aquí hacemos $z = |x|$ (≥ 0) ,

Factorizamos $z^3 - 4z^2 - 4z + 16 = (z-2)(z+2)(z-4)$ por Ruffini, de modo que obtenemos:

$\dfrac{(|x|-2)(|x|+2)(|x|-4)}{|x|+1} \ge 0 \Leftrightarrow (|x|-2)(|x|-4) \ge 0$

$\Leftrightarrow |x| \in \langle -\infty, 2] \cup [4, \infty\rangle$

$\Leftrightarrow |x| \le 2 \ \vee \ |x| \ge 4$

$\Leftrightarrow x \in [-2, 2] \ \vee \ x \in \langle -\infty, -4] \cup [4, \infty\rangle$

$\Leftrightarrow x \in [-2, 2] \cup \langle -\infty, -4] \cup [4, \infty\rangle$ = C.S.

4.17 EJERCICIO .- Resuelva: $\sqrt{|2x-1| + x - 5} > x - 1$ $(*)$

SOLUCIÓN .- EL UNIVERSO U , generado por la expresión subradical está dado por:

$|2x-1| + x - 5 \ge 0 \Leftrightarrow |2x-1| \ge 5 - 2x$

$\Leftrightarrow [\, 2x - 1 \ge 5 - x \ \vee \ 2x - 1 \le -(5-x)\,]$

$\Leftrightarrow [\, x \ge 2 \ \vee \ x \le -4\,] \Leftrightarrow x \in \langle -\infty, -4] \cup [2, \infty\rangle = U$

Luego, pasamos a resolver la inecuación: $(*) \Leftrightarrow$

$[x \in U]$ y $[x - 1 < 0 \ \vee \ (x - 1 \ge 0$ y $\underbrace{|2x-1| + x - 5 > (x-1)^2}_{(\alpha)})]$

Resolviendo la inecuación cuadrática (α):

$|2x-1| > x^2 - 3x + 6 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow [\, 2x - 1 > x^2 - 3x + 6 \ \vee \ 2x - 1 < -(x^2 - 3x + 6)\,]$

$\Leftrightarrow [\, \underbrace{x^2 - 5x + 7 < 0}_{(\varnothing)} \ \vee \ \underbrace{x^2 - x + 5 < 0}_{(\varnothing)}\,]$

$\Leftrightarrow x \in \varnothing \cup \varnothing = \varnothing =$ Solución de (α)

Por lo tanto: $(*) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow [x \in U]$ y $[\, x < 1 \ \vee \ (x \ge 1$ y $x \in \varnothing)\,]$

$\Leftrightarrow x \in (\langle -\infty, -4] \cup [2, \infty\rangle) \cap [\langle -\infty, 1\rangle \cup ([1, \infty\rangle \cap \varnothing)]$

$\Leftrightarrow x \in (\langle -\infty, -4] \cup [2, \infty\rangle) \cap [\langle -\infty, 1\rangle \cup \varnothing\,]$

$\Leftrightarrow x \in \langle -\infty, -4] =$ C.S. CONJUNTO SOLUCIÓN

4.18 EJERCICIO .- Resuelva la inecuación: $\sqrt{8x^2 - 4|x| + 5} < 3x$ $(*)$

SOLUCIÓN .- En ambos casos de $|x| = \pm x$, el ***DISCRIMINANTE*** de la expresión subradical es negativo $(= -144)$, ello indica que dicha expresión no tiene raíces reales, y por tanto es siempre positiva ***para todo*** x ***real*** . Así, el UNIVERSO generado por el radical es $U = \mathbb{R} = \langle -\infty, \infty\rangle$; luego,

$(*) \Leftrightarrow [x \in U]$ y $[3x > 0$ y $(8x^2 - 4|x| + 5 < 9x^2)\,]$

$\Leftrightarrow [x \in U]$ y $[x > 0$ y $\underbrace{(8x^2 - 4x + 5 < 9x^2)}_{(\alpha)}\,]$

¿por qué?

Resolviendo (α) :

$(\alpha) \Leftrightarrow x^2 + 4x - 5 > 0 \Leftrightarrow (x+5)(x-1) > 0$

$\Leftrightarrow x \in \langle -\infty, -5 \rangle \cup \langle 1, \infty \rangle$ = Solución de (α)

Por lo tanto, regresando a la inecuación original:

$(*) \Leftrightarrow [\, x \in \langle -\infty, \infty \rangle \,]$ y $[\, x \in \langle 0, \infty \rangle$ y $x \in \langle -\infty, -5 \rangle \cup \langle 1, \infty \rangle \,]$

$\Leftrightarrow x \in \langle -\infty, \infty \rangle \cap [\, \langle 0, \infty \rangle \cap (\langle -\infty, -5 \rangle \cup \langle 1, \infty \rangle) \,]$

$\Leftrightarrow x \in \langle 1, \infty \rangle$ = C.S. CONJUNTO SOLUCIÓN.

4.19 EJERCICIO .- Verifique que el Conjunto Solución de la inecuación:

$$\sqrt{8x^2 - 4|x| + 5} > 3x \quad , \quad \text{es} \quad \text{C.S.} = \langle -\infty, 1 \rangle \, .$$

NOTA .- En estos tres últimos EJERCICIOS hemos utilizado TEOREMAS concernientes a la resolución de inecuaciones con radicales, que se encuentran claramente clasificadas y explicadas en el capítulo 7 : ECUACIONES e INECUACIONES CON RADICALES.

4.20 EJERCICIO .- Exprese en términos de intervalos el conjunto

$$A = \{\, y \in \mathbb{R} \,/\, y = |x^2 - 8| \;,\; x \in \langle -4, 5 \rangle \,\}$$

SOLUCIÓN .-

Si $x \in \langle -4, 5 \rangle$ entonces $-4 < x < 5 \Rightarrow 0 \leq x^2 < 25 \Rightarrow$

$-8 \leq x^2 - 8 < 17 \Leftrightarrow 0 \leq |x^2 - 8| < 17 \Leftrightarrow 0 \leq y < 17,$

para todo $y = |x^2 - 8| \in A$. Por lo tanto, $A = [0, 17\rangle$.

4.21 EJERCICIO .- Resuelva la inecuación: $\dfrac{|\sqrt{x} - 8| - \sqrt{x}}{|x^2 - 4|} \geq 0$

SOLUCIÓN .- EL UNIVERSO es $U = [0, \infty\rangle$, debido a la $\sqrt{x}$. Como:

$\sqrt{x} = 8 \Leftrightarrow x = 64$, y $|x^2 - 4| \geq 0$

entonces la inecuación es equivalente, dentro de U, a :

$$|\sqrt{x} - 8| - \sqrt{x} \geq 0 \quad (*) \text{ , con } x \in U \;,\; x \neq \pm 2 \, .$$

a) Si $x \in [0, 64\rangle - \{2\}$: $\sqrt{x} \in [0, 8\rangle - \{2\} \Rightarrow \sqrt{x} - 8 < 0$,

$(*) \Leftrightarrow (8 - \sqrt{x}) - \sqrt{x} \geq 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} \leq 4 \Leftrightarrow 0 \leq x \leq 16$

Solución (a) : $x \in ([0, 2\rangle \cup \langle 2, 64\rangle) \cap [0, 16] = [0, 2\rangle \cup \langle 2, 16]$

b) Si $x \in [64, \infty\rangle$: $\sqrt{x} \in [8, \infty\rangle \Leftrightarrow \sqrt{x} - 8 \geq 0$; luego,

$(*) \Leftrightarrow (\sqrt{x} - 8) - \sqrt{x} \geq 0 \Leftrightarrow -8 \geq 0$ FALSO $(\varnothing)$

Solución (b) $= \varnothing$ CONJUNTO VACÍO

Por lo tanto, el CONJUNTO SOLUCIÓN de la inecuación original es la reunión de las Soluciones (a) y (b) :

C.S. $= ([0, 2\rangle \cup \langle 2, 16]) \cup \varnothing = [0, 2\rangle \cup \langle 2, 16]$

4.22 EJERCICIO .- Halle el menor número M tal que:

$$\left|\frac{x+5}{x-2}\right| \leq M \quad , \quad \text{si} \quad x \in [\tfrac{1}{2}, \tfrac{3}{2}]$$

SOLUCIÓN .- Si $x \in [\frac{1}{2}, \frac{3}{2}]$ entonces $-\frac{3}{2} \leq x - 2 \leq -\frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow -2 \leq \dfrac{1}{x-2} \leq -\dfrac{2}{3} \Leftrightarrow -14 \leq \dfrac{7}{x-2} \leq -\dfrac{14}{3}$

$\Leftrightarrow -13 \leq 1 + (\dfrac{7}{x-2}) \leq 1 - \dfrac{14}{3} = -\dfrac{11}{3}$

$\Rightarrow \left|1 + (\dfrac{7}{x-2})\right| \leq \text{máx}\left\{ |-13| \,,\, \left|-\dfrac{11}{3}\right| \right\} = 13 \qquad (*)$

Y como $\dfrac{x+5}{x-2} = 1 + (\dfrac{7}{x-2})$, entonces por $(*)$:

$$\left|\frac{x+5}{x-2}\right| \leq 13 \quad , \quad \text{si} \quad x \in [\tfrac{1}{2}, \tfrac{3}{2}] \, .$$

Obviamente, el valor absoluto será también: ≤ 14, ≤ 14.1 , ≤ 14.2, etc. cuando $x \in [\,1/2\,,\,3/2\,]$; de modo que ***el menor de todos estos números mayores ó iguales que*** 13 ***es precisamente*** $M = 13$.

4.23 EJERCICIO .- Resuelva: $|x^2 + 2x + 3| + |x^2 - 1| < 6 \qquad (*)$

SOLUCIÓN .-

$(*) \Leftrightarrow |(x+1)^2 + 2| + |x^2 - 1| = (x+1)^2 + 2 + |x^2 - 1| < 6$

$\Leftrightarrow |x^2 - 1| < 4 - (x+1)^2 = 3 - 2x - x^2$

$\Leftrightarrow [\, 3 - 2x - x^2 > 0 \,]$ y $[\, -(3 - 2x - x^2) < x^2 - 1 < 3 - 2x - x^2 \,]$

(a) (b) (c)

Resolviendo por separado las desigualdades parciales:

(a) $\Leftrightarrow 4 - (x+1)^2 > 0 \Leftrightarrow -2 < x + 1 < 2$

$\Leftrightarrow -3 < x < 1 \Leftrightarrow x \in \langle -3, 1 \rangle$

(b) $\Leftrightarrow 2x < 2 \Leftrightarrow x \in \langle -\infty, 1 \rangle$

(c) $\Leftrightarrow 2x^2 + 2x - 4 < 0 \Leftrightarrow x^2 + x - 2 < 0$

$\Leftrightarrow (x+2)(x-1) < 0 \Leftrightarrow x \in \langle -2, 1 \rangle$

Regresando a $(*)$:

$$(*) \Leftrightarrow x \in \langle -3, 1\rangle \text{ y } [\, (x \in \langle -\infty, 1\rangle) \text{ y } x \in \langle -2, 1\rangle \,]$$
$$\Leftrightarrow x \in \langle -3, 1\rangle \text{ y } x \in \langle -2, 1\rangle$$
$$\Leftrightarrow x \in \langle -3, 1\rangle \cap \langle -2, 1\rangle = \langle -2, 1\rangle = \text{C.S.}$$

4.24 EJERCICIO .- Resuelva: $\sqrt{|x|-3} < \sqrt{|x|+1} - \sqrt{6-|x|}$, $(*)$

SOLUCIÓN .-

UNIVERSO $U = U_1 \cap U_2 \cap U_3$ generado por los radicales, donde

U_1 : $|x|-3 \geq 0 \Leftrightarrow x \in \langle -\infty, -3] \cup [3, \infty\rangle$

U_2 : $|x|+1 \geq 0 \Leftrightarrow x \in \langle -\infty, \infty\rangle$

U_3 : $6-|x| \geq 0 \Leftrightarrow |x| \leq 6 \Leftrightarrow x \in [-6, 6]$

$\Rightarrow U = U_1 \cap U_2 \cap U_3 = [-6, -3] \cup [3, 6]$

Ahora operamos en la desigualdad $(*)$:

$$\forall\, x \in U, \quad \sqrt{|x|-3} + \sqrt{6-|x|} < \sqrt{|x|+1} \quad \text{(y elev. al cuad.)}$$
$$\Leftrightarrow 3 + 2\sqrt{(|x|-3)(6-|x|)} < |x|+1 \quad , \quad x \in U$$
$$\Leftrightarrow \sqrt{(|x|-3)(6-|x|)} < \tfrac{1}{2}(|x|-2) \quad , \quad x \in U$$
$$\Leftrightarrow \tfrac{1}{2}(|x|-2) > 0 \text{ y } [\,4(|x|-3)(6-|x|) < (|x|-2)^2\,], \quad x \in U$$
$$\Leftrightarrow x \in \langle -\infty, -2\rangle \cup \langle 2, \infty\rangle \text{ y } [\, 5x^2 - 40|x| + 76 > 0 \,] \text{ y } x \in U \quad (**)$$
$$(\alpha)$$

Resolviendo (α) :

$$(\alpha) \Leftrightarrow 5[\,|x| - (4 + \tfrac{2}{\sqrt{5}})\,][\,|x| - (4 - \tfrac{2}{\sqrt{5}})\,] > 0$$
$$\Leftrightarrow |x| \in \langle -\infty, 4 - \tfrac{2}{\sqrt{5}}\rangle \cup \langle 4 + \tfrac{2}{\sqrt{5}}, \infty\rangle$$
$$\Leftrightarrow |x| < 4 - \tfrac{2}{\sqrt{5}} \quad \vee \quad |x| > 4 + \tfrac{2}{\sqrt{5}}$$
$$\Leftrightarrow x \in \langle \tfrac{2}{\sqrt{5}} - 4, 4 - \tfrac{2}{\sqrt{5}}\rangle \cup \langle -\infty, -4 - \tfrac{2}{\sqrt{5}}\rangle \cup \langle 4 + \tfrac{2}{\sqrt{5}}, \infty\rangle$$

Por lo tanto, regresamos a $(**)$:

$$(**) \Leftrightarrow x \in (\langle -\infty, -2\rangle \cup \langle 2, \infty\rangle) \cap [\text{Solución } (\alpha)] \cap U \Leftrightarrow$$

$$x \in \text{C.S.} = [-6, -4 - \tfrac{2}{\sqrt{5}}\rangle \cup \langle -4 + \tfrac{2}{\sqrt{5}}, 3] \cup [3, 4 - \tfrac{2}{\sqrt{5}}\rangle \cup \langle 4 + \tfrac{2}{\sqrt{5}}, 6]$$

4.25 EJERCICIO .- Resuelva: $\dfrac{|4x - x^2| - 5}{|x| - 1} \geq 0$ $(*)$

SOLUCIÓN .-

$$(*) \Leftrightarrow \frac{|x^2 - 4x| - 5}{|x| - 1} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{|x||x-4| - 5}{|x| - 1} \geq 0$$

Particionamos la recta real en base a los 'puntos críticos' $x = 0$ y $x = 4$ en tres Universos Parciales,

$$\langle -\infty, \infty\rangle = \underset{(1)}{\langle -\infty, 0\rangle} \cup \underset{(2)}{[0, 4\rangle} \cup \underset{(3)}{[4, \infty\rangle} \qquad (\alpha)$$

y resolvemos $(*)$ sobre cada uno de estos Universos Parciales:

(1) Si $x \in U_1 = \langle -\infty, 0\rangle$: $x < 0 < 4$,

$$(*) \Leftrightarrow \frac{(-x)[-(x-4)] - 5}{-x - 1} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{x^2 - 4x - 5}{x + 1} \leq 0$$
$$\Leftrightarrow \frac{(x-5)(x+1)}{x+1} \leq 0 \Leftrightarrow x - 5 \leq 0 \text{ y } x \neq -1$$

Solución (1): $(\langle -\infty, 5\rangle - \{-1\}) \cap U_1 = \langle -\infty, -1\rangle \cup \langle -1, 0\rangle$.

(2) Si $x \in U_2 = [0, 4\rangle$: $\dfrac{x[-(x-4)] - 5}{x - 1} \geq 0 \Leftrightarrow x \in \langle -\infty, 1\rangle$

Solución (2): $\langle -\infty, 1\rangle \cap U_2 = [0, 1\rangle$.

(3) Si $x \in U_3 = [4, \infty\rangle$: $\dfrac{(x-5)(x+1)}{x-1} \geq 0$ (verificar)

Solución (3): $([-1, 1\rangle \cup [5, \infty\rangle) \cap U_3 = [5, \infty\rangle$.

Luego, el CONJUNTO SOLUCIÓN total es la reunión de las tres soluciones parciales (1) , (2) y (3):

$$\text{C.S.} = (\langle -\infty, -1\rangle \cup \langle -1, 0\rangle) \cup [0, 1\rangle \cup [5, \infty\rangle$$

SERIE DE EJERCICIOS

1. Resuelva las siguientes ecuaciones:

a) $\left|x^2 - 4\sqrt{2}\,x + 8\right| = 32$ b) $\left|x^2 - 3x - 7\right| = 3$

c) $|3x - 1| = |5x - 15|$ d) $|x + 5| = 2x - 4$

e) $|6x + 3| = |18 + x|$ f) $|2x + 9| = x - 1$

g) $|x + 6| = 2x + 6$ h) $\left|\,|x^2 - 1| - x\right| = x$

i) $|2-x| = -|x|^2 + 4$ j) $|(x+8)/(x+4)| = 3$

2. Si $A = \{x \in \mathbb{R} / |3x-1| = 2x+5\}$, $B = \{x \in \mathbb{R} / |x+2| + 6 = 3x\}$, halle la suma de los elementos de: $A \cup B$.

3. Si $A = \{x \in \mathbb{R} / |x-3| > -5\}$, $B = \{x \in \mathbb{R} / |x+9| = x+9\}$, halle: $A - B$.

4. Demuestre que si a, b y c son números reales:
$$|a+b+c| \leq |a| + |b| + |c|$$

5. Demuestre que si a y b tienen signos diferentes, entonces
$$a < z < b \Rightarrow 0 \leq |z| < \text{máx}\{|a|, |b|\}$$
$$a < z < b \Rightarrow 0 \leq z^2 < \text{máx}\{a^2, b^2\}$$

6. Halle los Conjuntos Solución de las siguientes ecuaciones:

a) $|3x+1| + x = 7$ b) $|3x-5| + x - 7 = 0$

c) $|x^2+2| = 2x+1$ d) $|x+4| = x+4$

7. Halle los Conjuntos Solución de las siguientes inecuaciones:

a) $|x-2| \leq 2x$ b) $|2x+1| \geq 2+x$

c) $|x+6| < 2x-1$ d) $|4x+3| > x+2$

e) $|x-3| > -1$ f) $|x+1| \leq 0$

g) $|x^2+2x-4| > 4$ h) $|x^2+5x| - 2x > 10$

8. Halle el conjunto A de valores reales que puede tomar a para que se cumpla que: $ax^2 + 10x + a^2 > 4a - 5x^2 - 2ax$, ***PARA TODO*** x ***REAL***.

9. Demuestre que:

a) $|x| < 3 \Rightarrow \frac{1}{x-7} \in \langle -\frac{1}{4}, -\frac{1}{10} \rangle$

b) $|x-3| < 1 \Rightarrow \frac{1}{8} < \frac{1}{x+4} < \frac{1}{6}$

c) $|x-1| < 2 \Rightarrow 0 \leq |2x-3| < 5$

d) $|x-5| < 1 \Rightarrow \frac{1}{3} < \frac{1}{x-3} < 1$

e) $x \in [-5, 4\rangle \Rightarrow |3x-5| \leq 20$

f) $|x-3| < 1 \Rightarrow 6 < x+4 < 8$

g) $|x-3| \leq 1 \Rightarrow \frac{1}{8} \leq \frac{1}{x+4} \leq \frac{1}{6}$

h) $0 < |x-1| < 5 \Rightarrow |x-1| < 5$, pero no la recíproca.

i) $|x+4| < 2 \Rightarrow \left|\frac{1}{4x+6} - \frac{1}{9}\right| < \frac{11}{18}$

j) $0 < |x+4| < 2 \Rightarrow \left|\frac{1}{4x+6} - \frac{1}{9}\right| < \frac{11}{18}$

k) $0 < |\sqrt{x} - 3| < 1 \Rightarrow |\sqrt{x} - 3| < 1$

l) $0 < |x-1| < 4 \Rightarrow \left|\frac{1}{2+\sqrt{x+4}} - \frac{2}{7}\right| < \frac{3}{35}$

10. Si $A = \{x \in \mathbb{R} / |x-4| \leq 4\}$, $B = \{x \in \mathbb{R} / 1 < |x-3| \leq 12\}$ halle: $A \cap B$.

11. Sea $A = \{x \in \mathbb{N} / 2 < |x-6| < 12\}$. Halle: $\mathbb{N} - A$.

12. Si $A = \{x \in \mathbb{R} / |2x+3| \leq 3\}$, $B = \{x \in \mathbb{R} / 2 - |x-2| \leq 0\}$ halle: $B - A$.

13. Demuestre que, si $b > 0$, entonces
$$a^2 < b \Leftrightarrow |a| < \sqrt{b}$$
$$a^2 > b \Leftrightarrow |a| > \sqrt{b}$$

14. Demuestre que, si $b \geq 0$, entonces
$$a^2 \leq b \Leftrightarrow |a| \leq \sqrt{b}$$
$$a^2 \geq b \Leftrightarrow |a| \geq \sqrt{b}$$

15. Si $\{x \in \mathbb{R} / ax + b > x^2\} = \{x \in \mathbb{R} / \left|x - \frac{a}{2}\right| < \frac{\sqrt{A+4b}}{2}\}$ halle la constante: A. SUG: Complete cuadrados en: $ax + b > x^2$.

16. Sean $x, y \in \mathbb{R}$. Si $x^2 + y^2 = 1$, demuestre que: $|x+y| \leq \sqrt{2}$.

17. Halle los Conjuntos Solución de las inecuaciones siguientes:

a) $|x^2 - x| > -2$ b) $|x^2 - 4| \geq -2x + 4$

c) $\left|x + \frac{1}{x}\right| \geq 2$ d) $\left|x + \frac{8}{x}\right| \leq 6$

e) $\left|x^4-10\right| \le \left|x^2\right|^2 + 8x^2$, f) $(x+3)^2 - 5|x+3| + 6 < 0$

g) $\sqrt{\left|3-\left|x^2-6\right|\right|}\,(x^2-4x+3) < 0$

h) $|x+6| > |x+9| + |x-2|$, i) $|4x+2| \ge |x-1| + 3|x+1|$

j) $2 < \left|x^2-x-1\right| < \left|x^2+x\right|$, k) $-1 < \left|x^2-x-1\right| < \left|x^2+x\right|$

l) $\left|x^2-1\right| < 2$ m) $\left|x^2-4\right| < -2x+4$

18. Halle el ***menor de los números*** M ***tales que***: $\left|\frac{x-9}{x-6}\right| \le M$, si $x \in [2, 5]$

19. Resuelva las siguientes inecuaciones (hallando sus Conjuntos Solución):

a) $\left|3x^3-2x^2-7x-2\right| > \left|x^3+6x^2-9x-14\right|$

b) $\left|10-3x+x^2\right| \le \left|x^2+x-6\right|$

c) $|x-6| - |x-3| \le |x-1|$

d) $(|x-1|+|x-2|)(|1-x|-|x-2|) \le x^2-6$

e) $\left|2x^2+x-1\right| < \left|2x^2-x-1\right|$

20. Resuelva las siguientes inecuaciones:

a) $\left|\frac{2x-5}{4-x}\right| \ge 1$ b) $\left|\frac{3-3x}{x-1}\right| > 2$

SUG (a) $\Leftrightarrow$ [$|2x-5| \ge |x-4|$, $x \ne 4$].

c) $|x-3|^2 \ge 4$, d) $\big||x+1|-|x|\big| + |2x-3| > 2x+4$

e) $\left|\frac{x+3}{6-2x}\right| \ge \frac{1}{2}$ f) $\left|\frac{x^2-6x+7}{x-1}\right| < \frac{2}{x-1}$

g) $\big||x|-|x-3|\big| \le 1-2x$ h) $2x \le |2x-7| \le 3x+10$

i) $\left|\frac{x^2+3x+11}{x-2}\right| \le 3$ j) $\left|\frac{x+1}{x+3}\right|^2 - 2\left|\frac{x+1}{x+3}\right| > 0$

21. Halle los Conjuntos Solución de las siguientes inecuaciones:

a) $\frac{x^2-4}{|x-10|} \le \frac{x}{2}+5$ b) $\frac{x^2-4}{|x+3|} \le \frac{3x}{2}$

c) $\frac{x-7}{|x-1|} \ge \frac{2x+2}{x+3}$ d) $\left|\frac{x-2}{x+4}\right| \le \frac{x+3}{x-6}$

e) $\left|\frac{3|x|-x}{x+1}\right| < \frac{1}{x+1}$ f) $\frac{|x-4|}{4-|x|} > -1$

22. Resuelva las siguientes inecuaciones:

a) $|x+8| \le |x-6|$ b) $3|x| > |12-3x|$

c) $|3x+4| > x$ d) $|3x-9| < x+1$

e) $\left|\frac{3}{4x+1}\right| \le \left|\frac{1}{x+1}\right|$ f) $\left|\frac{x-1}{x}\right| > 1$

g) $\left|\frac{6x-4}{3+x}\right| \ge \frac{1}{2}$ h) $\left|\frac{3x^2-1}{x-2}\right| > -6$

SUG: (e) $|3(x+1)| \le |4x+1|$, $x \ne -1$, $x \ne -1/4$.

23. Exprese en términos de intervalos el conjunto

$$A = \{\, 2 + \left|\frac{x-2}{x+4}\right| \;/\; x \in (-3, 3] \,\}$$

24. Resuelva las siguientes inecuaciones:

a) $\frac{|x-x^2|\cdot(\sqrt{x}-1)}{\sqrt{x}-6x} \ge 0$, e) $\sqrt{x^2+|x|} > \sqrt{2}\,x$

b) $\frac{|x^2-2x-48|\,(|x^2-2x|-|x-12|)}{|x-2|-6} \le 0$; f) $|x| > x$

c) $\frac{-2|x|^2+|x^2-x|+1}{x^2-5x+6} \le 0$; d) $\frac{x^2-3x+|x-1|+4}{|x-1|+x^2+10x+27} \le 0$

SUG. (d) $x^2+10x+27 = (x+5)^2+2$

$x^2-3x+4 = (x-\frac{3}{2})^2+\frac{7}{4}$

25. Dados los conjuntos: $A = \{\, x \in \mathbb{R} \;/\; \left|\frac{1}{x+1}\right| < \left|\frac{x}{x^2+2x+1}\right| \,\}$,

$B = \{ x \in \mathbb{R} / \dfrac{x}{x^2+1} > \dfrac{2}{x} \}$, halle $A \cap B$.

26. Halle los Conjuntos Solución de las siguientes inecuaciones:

a) $\dfrac{|x-3|^3 + 2(x-3)^2 - 5|x-3| - 6}{(x-2)^2 - 2|x-2| - 24} \leq 0$

b) $\sqrt{|x-1|-1} + \sqrt{4-|x-1|} \leq \sqrt{2|x-1|+5}$

c) $(\sqrt{|x-1|-3} - \sqrt{5-|x-4|})(\sqrt{|x-1|-3} + \sqrt{5-|x-4|})$
$\leq |x| - 6$.

d) $\big||x+4| + (x+5)\big| > \sqrt{-x-5}$

e) $\left|\dfrac{x}{1-|x|}\right| > \dfrac{1}{x}$ f) $\left|\dfrac{x^2-5x-14}{x-1}\right| > 0$

CLAVE DE RESPUESTAS

1. a) $\{ 6\sqrt{2}, -2\sqrt{2} \}$, b) $\{ -1, -2, 4, 5 \}$, c) $\{ 2, 7 \}$
d) $x = 9$ solamente. e) $\{ -3, 3 \}$, f) $\varnothing$, g) $x = 0$ solam.
h) $\{ \sqrt{2}+1, \sqrt{2}-1, 1 \}$, i) $\{ 2, -1 \}$, j) $\{ -2, -5 \}$

2. $46/5$, 3. $A = \langle -\infty, \infty \rangle$, $B = [-9, \infty \rangle$, $A - B = \langle -\infty, -9 \rangle$

6. a) $\{3/2, -4\}$, b) $\{-1, 3\}$, c) $\{1\}$, d) $[-4, \infty \rangle$

7. a) $[2/3, \infty \rangle$, b) $\mathbb{R} - \langle -1, 1 \rangle$, c) $\langle 7, \infty \rangle$, d) $\langle -\infty, -1 \rangle \cup \langle -\frac{1}{3}, \infty \rangle$
e) $\langle -\infty, \infty \rangle$, f) $\{-1\}$, g) $\langle -\infty, -4 \rangle \cup \langle -2, 0 \rangle \cup \langle 2, \infty \rangle$.
f) $\langle -\infty, -5 \rangle \cup \langle -5, -2 \rangle \cup \langle 2, \infty \rangle$.

8. $\forall\, x \in \mathbb{R}$: $(a+5)x^2 + 2(a+5)x + a(a-4) > 0 \Leftrightarrow$
$[(a+5=0)$ y $a(a-4)>0]$ ó $[(a+5>0)$ y DISCRIMINANTE $\Delta < 0] \Leftrightarrow$
$[(a=-5)$ y $45>0]$ ó $[(a>-5)$ y $a \in \langle -\infty, \dfrac{5-3\sqrt{5}}{2} \rangle \cup \langle \dfrac{5+3\sqrt{5}}{2}, \infty \rangle]$
$\Leftrightarrow \quad a \in A = \{-5\} \cup \langle -5, (5-3\sqrt{5})/2 \rangle \cup \langle (5+3\sqrt{5})/2, \infty \rangle$

10. $[0, 2\rangle \cup \langle 4, 8]$, 11. $N - A = \{ x \in N / 4 \leq x \leq 8 \vee x \geq 18 \}$

12. $\langle -\infty, -3 \rangle \cup [4, \infty \rangle$, 15. $A = a^2$.

16. De $(x-y)^2 \geq 0 \Rightarrow 2xy \leq 1$; luego, pruebe que: $|x+y|^2 \leq 2$

17. a) $\langle -\infty, \infty \rangle$, b) $\langle -\infty, -4] \cup [0, \infty \rangle$, c) $\langle -\infty, 0 \rangle \cup \langle 0, \infty \rangle$,
d) $[-4, -2] \cup [2, 4]$, e) $\langle -\infty, -1] \cup [1, \infty \rangle$, f) $2 < |x+3| < 3$
$\Leftrightarrow \quad x \in \langle -6, -5 \rangle \cup \langle -1, 0 \rangle =$ C.S. , g) $\langle 1, 3 \rangle - \{\sqrt{3}\}$, h) $\varnothing$
i) $\langle -\infty, -1] \cup [1, \infty \rangle$, j) $\langle (1+\sqrt{13})/2, \infty \rangle$,
k) $\langle -\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{2} \rangle \cup \langle \frac{1}{\sqrt{2}}, \infty \rangle$, l) $\langle -\sqrt{3}, \sqrt{3} \rangle$, m) $\langle -4, 0 \rangle$.

18. $M = 4$; 19.(a) $\langle -\infty, -2 \rangle \cup \langle 3, \infty \rangle$, 19.(b) $[4, \infty \rangle$;

19. c) $\langle -\infty, -2] \cup [10/3, \infty \rangle$, d) $\langle -\infty, -1] \cup [3, \infty \rangle$;
e) $\langle -\infty, -1/\sqrt{2} \rangle \cup \langle 0, 1/\sqrt{2} \rangle$. 20.(a) $\langle -\infty, 1] \cup [3, 4\} \cup \langle 4, \infty \rangle$

20. (b) $\langle -\infty, 1 \rangle \cup \langle 1, \infty \rangle$, c) $\langle -\infty, 1] \cup [5, \infty \rangle$, d) $\langle -\infty, 0 \rangle$,
e) $[0, 3\rangle \cup \langle 3, \infty \rangle$, g) $\langle -\infty, -1]$, h) $[-3/5, 7/4]$,
f) $\langle 1, 3\rangle \cup \langle 3, 5 \rangle$, i) $[-5, -1]$, j) $\langle -5, -3\rangle \cup \langle -3, -7/3\rangle$

21. a) $[-6, 6]$, b) $[-1, \infty \rangle$, c) $\langle -3, (2-\sqrt{73})/3]$,
d) $\langle 6, \infty \rangle$, e) $\langle -1/4, 1/2 \rangle$, f) $\langle -4, 4 \rangle$

22. a) $\langle -\infty, -1]$, b) $\langle 2, \infty \rangle$, c) $\langle -\infty, \infty \rangle$, d) $\langle 2, 5 \rangle$,
e) $\langle -\infty, -1\rangle \cup \langle -1, -4/7] \cup [2, \infty \rangle$, f) $\langle -\infty, 0\rangle \cup \langle 0, 1/2\rangle$
g) $\langle -\infty, -3\rangle \cup \langle -3, 5/13] \cup [1, \infty \rangle$, h) $\langle -\infty, 2\rangle \cup \langle 2, \infty \rangle$

23. $A = [2, 7\rangle$. 24.(a) $\langle 1/36, 1]$, b) $\{-6\} \cup \langle -4, -3] \cup [4, 8\rangle$,

24. c) $\langle -\infty, (-1-\sqrt{5})/2] \cup [1, 2\} \cup \langle 3, \infty \rangle$, d) $\varnothing$,
e) $\langle -\infty, 0\} \cup \langle 0, 1\rangle$, f) $\langle -\infty, 0\rangle$.

25. $A = \langle -\infty, -1\rangle \cup \langle -1, -1/2\rangle$, $B = \langle -\infty, 0\rangle$, $A \cap B = A$.

26. a) $\langle -4, 1] \cup [5, 8\rangle$, b) $[-3, 0] \cup [2, 5]$, c) $[4, 7]$,
d) $\langle -6, -5]$, e) $\langle -\infty, -1\rangle \cup \langle -1, 0\rangle \cup \langle (\sqrt{5}-1)/2, 1\rangle \cup \langle 1, \infty \rangle$
f) $\langle -\infty, \infty \rangle - \{-2, 1, 7\} = \langle -\infty, -2\rangle \cup \langle -2, 1\rangle \cup \langle 1, 7\rangle \cup \langle 7, \infty \rangle$

SERIE ADICIONAL DE EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Resuelva:

a) $\left|x^2+2x+3\right| + \left|x^2-1\right| < 6$, b) $\dfrac{x^2+3-|15+2x-x^2|}{|x^2-9|-8} < 0$

c) $\dfrac{2-|2-x|-x}{|x-x^2|-2} < 0$, d) $\sqrt{2x^2-8x+8} \leq (2-x)/\sqrt{x+3}$

e) $\big|\,|2x+3|-3\,\big| < 2$, f) $\sqrt{[\,x/|x-2|\,]} < 1$

2. Si $A = \{x \in \mathbb{R} \,/\, \frac{5}{|2x-1|} \geq \frac{1}{|x-2|}\}$, halle A^c.

3. Resuelva: $\Big|\,2|x^2-7x+12| + x^2+4\,\Big| < \Big|\,3|x^2-9x+18| + x^2+4\,\Big|$

4. Resuelva: $3\Big(\Big|x+\frac{1}{2}\Big|-\frac{1}{6}\Big)^2+2\Big|\Big|x+\frac{1}{2}\Big|-\frac{1}{6}\Big|-1 \geq 0$ (*)

5. Resuelva: $\dfrac{|4-x|+|2x+3|}{|x-1|-1} \leq 2$

6. Resuelva: $\dfrac{x\,\big|\,|x|-1\,\big|-12}{|x+2|+1} - \dfrac{\big|\,|1-x|-3\,\big|}{|x-1|+4} \geq 0$

7. Halle $A \,\Delta\, B$, donde $A = \{x \in \mathbb{R} \,/\, \Big|\frac{4}{3}x-8\Big| < \Big|\frac{1}{3}x-6\Big| + |x-2|\}$ y $B = \{x \in \mathbb{Z} \,/\, |x(x+1)| < |x+4|\}$.

8. Si $|x| < 1$, halle el menor valor de M que satisface
$$(1-x)^2 + (1+x)^2 < M \ .$$

CLAVE DE RESPUESTAS

1. a) $\langle -2, 1\rangle$ b) $\langle -\infty, -9\rangle \cup \langle -1, 1\rangle \cup \langle 3, \sqrt{17}\,\rangle \cup \langle -\sqrt{17}, -2\rangle$
c) $\langle 2, \infty\rangle$ d) $\langle -3, -5/2\,] \cup \{2\}$ e) $\langle -1, 1\rangle \cup \langle -4, -2\rangle$
f) $[0, 1)$; **2.** $\{1/2\} \cup \langle 11/7, 3\rangle$ **3.** $(\langle -\infty, 26/5\rangle \cup \langle 10, \infty\rangle) - \{3\}$

4. Haciendo $w = \Big|\Big|x+\frac{1}{2}\Big|-\frac{1}{6}\Big|$, la inecuación (*) se transforma en:

$3w^2+2w-1 \geq 0 \Leftrightarrow (3w-1)(w+1) \geq 0 \Leftrightarrow 3w-1 \geq 0$

(pues $w \geq 0 \Rightarrow w+1 > 0$) $\Leftrightarrow w \geq 1/3 \Leftrightarrow$

$\Big|\Big|x+\frac{1}{2}\Big|-\frac{1}{6}\Big| \geq \frac{1}{3} \Leftrightarrow x \in (-\infty, -1] \cup [0, \infty) =$ C.S.

5. $\langle 0, 1\rangle \cup [1, 2\rangle = \langle 0, 2\rangle$ 6. $[4, \infty\rangle$

7. $A = \langle 2, 18\rangle$, $B = \langle -2, 2\rangle \cap \mathbb{Z} = \{-1, 0, 1\}$ de donde resulta que $A \,\Delta\, B = \{-1, 0, 1\} \cup \langle 2, 18\rangle$

8. $M = 4$

PROBLEMAS RESUELTOS SOBRE DESIGUALDADES DE NÚMEROS REALES

1. Sean $a, b \in \mathbb{R}$. Demuestre que: $a^2+b^2 \geq 2ab$.

SOLUCIÓN .- Como $(a-b)^2 \geq 0$, $\forall\, a, b \in \mathbb{R}$,
$$a^2-2ab+b^2 \geq 0 \Rightarrow a^2+b^2 \geq 2ab$$

2. Si a y b son números reales tales que $a^2+b^2 = 1$, demuestre que $|a+b| \leq \sqrt{2}$.

SOLUCIÓN .- De $a^2+b^2 \geq 2ab$ entonces
$2(a^2+b^2) \geq 2ab + (a^2+b^2) \Rightarrow 2(1) \geq (a+b)^2 \geq 0$
$\Rightarrow \sqrt{2} \geq \sqrt{(a+b)^2} \Rightarrow \sqrt{2} \geq |a+b|$.

3. Si $\{a, b, c, d\} \subset \mathbb{R}$, demuestre que
$$2abcd \leq 2|abcd| \leq a^2d^2+b^2c^2$$

SOLUCIÓN .- De $(|x|-|y|)^2 \geq 0 \Leftrightarrow x^2+y^2 \geq 2|x||y|$,
entonces haciendo $x = ad$, $y = bc$:
$(ad)^2+(bc)^2 \geq 2|ad||bc| = 2|abcd| \geq 2(abcd)$

4. Si $\{a, b, c, d\} \subset \mathbb{R}$, demuestre que:
$$ac+bd \leq |ac+bd| \leq \sqrt{(a^2+b^2)(c^2+d^2)}$$

SOLUCIÓN .- Del ejercicio anterior: $2abcd \leq a^2d^2+b^2c^2 \Rightarrow$
$$\begin{aligned} a^2c^2+(2abcd)+b^2d^2 &\leq a^2c^2+(a^2d^2+b^2c^2)+b^2d^2 \\ &= (a^2+b^2)(c^2+d^2) \\ \Rightarrow \quad (ac+bd)^2 &\leq (a^2+b^2)(c^2+d^2) \\ \Rightarrow \quad ac+bd \leq |ac+bd| &\leq \sqrt{(a^2+b^2)(c^2+d^2)} \ . \end{aligned}$$

5. Sean $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Demuestre que:
$$|ac|+|bd| \leq \sqrt{(a^2+b^2)(c^2+d^2)}$$

SOLUCIÓN .- Reemplazando en el Ejercicio anterior [4], a, b, c y d por $|a|$, $|b|$, $|c|$ y $|d|$, respectivamente.

6. Sea $x > 0$. Demuestre que: $x+\frac{1}{x} \geq 2$.

SOLUCIÓN .- Como $(\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}})^2 \geq 0 \Leftrightarrow x-2+\frac{1}{x} \geq 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \quad x + \frac{1}{x} \geq 2 \ .$$

7. Sean $x , y \in \mathbb{R}$, $r , s \in \mathbb{R}^+$; demuestre que:

$$\frac{x}{r} < \frac{y}{s} \quad \Rightarrow \quad \frac{x}{r} < \frac{x+y}{r+s} < \frac{y}{s}$$

SOLUCIÓN .- $\frac{x}{r} < \frac{y}{s} \quad \Leftrightarrow \quad xs < yr \quad (r , s \in \mathbb{R}^+)$

$\Leftrightarrow \quad (xr + xs < xr + yr) \quad \wedge \quad (xs + ys < yr + ys)$

$\Leftrightarrow \quad x(r+s) < (x+y)r \quad \wedge \quad (x+y)s < y(r+s)$

$\Leftrightarrow \quad \frac{x}{r} < \frac{x+y}{r+s} \quad \wedge \quad \frac{x+y}{r+s} < \frac{y}{s} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x}{r} < \frac{x+y}{r+s} < \frac{y}{s}$.

8. Sean $a , b , c \in \mathbb{R}$, $m , n , p \in \mathbb{R}^+$; demuestre que:

$$\frac{a}{m} < \frac{b}{n} < \frac{c}{p} \quad \Rightarrow \quad \frac{a}{m} < \frac{a+b+c}{m+n+p} < \frac{c}{p}$$

SOLUCIÓN .- Aplicando el Ejercicio anterior 2 veces:

$$\frac{a}{m} < \frac{b}{n} \quad \overset{\text{EJ.[7]}}{\Rightarrow} \quad \underline{\frac{a}{m} < \frac{a+b}{m+n} < \frac{b}{n}} \quad \wedge \quad \frac{b}{n} < \frac{c}{p} \quad \Rightarrow$$

$$\frac{a+b}{m+n} < \frac{c}{p} \quad \overset{\text{EJ.[7]}}{\Rightarrow} \quad \underline{\frac{a+b}{m+n} < \frac{(a+b)+c}{(m+n)+p} < \frac{c}{p}}$$

Y por la propiedad transitiva, se tiene que: $\frac{a}{m} < \frac{a+b+c}{m+n+p} < \frac{c}{p}$

9. Sean $a , b , c \in \mathbb{R}^+$. Demuestre que: $(a+b+c)(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}) \geq 9$

SOLUCIÓN .- Utilizando la propiedad: $\forall\, x > 0 \ , \quad x + \frac{1}{x} \geq 2$;

$(a+b+c)(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}) =$

$= \quad [\, 1 + \frac{a}{b} + \frac{a}{c} \,] + [\, \frac{b}{a} + 1 + \frac{b}{c} \,] + [\, \frac{c}{a} + \frac{c}{b} + 1 \,]$

$= \quad 3 + (\frac{a}{b} + \frac{b}{a}) + (\frac{a}{c} + \frac{c}{a}) + (\frac{b}{c} + \frac{c}{b})$

$\geq \quad 3 + (2) + (2) + (2) = 9 .$ [Haciendo $\frac{a}{b} = x \ , \ \frac{b}{a} = \frac{1}{x}$]

10. Si $a , b , c , d \in \mathbb{R}^+$, demuestre que:

$$(ab + cd)(ac + bd) \geq 4abcd$$

SOLUCIÓN .- De $(\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x + y \geq 2\sqrt{x}\sqrt{y}$,

$ab + cd \geq 2\sqrt{ab}\sqrt{cd} \quad \wedge \quad ac + bd \geq 2\sqrt{ac}\sqrt{bd}$

y multiplicando miembro a miembro ambas desigualdades :

$(ab + cd)(ac + bd) \geq 4\sqrt{a^2b^2c^2d^2} = 4abcd$.

11. Sean $a , b \in \mathbb{R}$ tales que $a < b$; demuestre que:

$$\{\, t \in \mathbb{R} / \ a < t < b \,\} = \{\, t \in \mathbb{R} / \ \left| t - \frac{a+b}{2} \right| < \frac{b-a}{2} \,\}$$

SOLUCIÓN .-

$a < t < b \quad \Leftrightarrow \quad a - \frac{a+b}{2} < t - \frac{a+b}{2} < b - \frac{a+b}{2} \quad \Leftrightarrow$

$-(\frac{a-b}{2}) < t - (\frac{a+b}{2}) < \frac{b-a}{2} \quad \Leftrightarrow \quad \left| t - (\frac{a+b}{2}) \right| < \frac{b-a}{2}$

12. Demuestre que: $\big|\, |x| - |y| \,\big| \leq \sqrt{|x^2 - y^2|}$, $\forall\, x , y \in \mathbb{R}$.

SOLUCIÓN .- Sabiendo que: $\big|\, |x| - |y| \,\big| \leq |x - y|$, y que $|-y| = |y|$,

se tiene que $\big|\, |x| - |-y| \,\big| \leq |x - (-y)| = |x + y|$;

por lo tanto, multiplicando ambas desigualdades:

$\big|\, |x| - |y| \,\big|^2 \leq |(x-y)(x+y)| = \left| x^2 - y^2 \right|$,

y extrayendo raíz cuadrada obtenemos la relación buscada.

13. Si $a + b + c = 0$ demuestre que $(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c})^2 = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}$

SOLUCIÓN .-

$(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c})^2 = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} + \frac{2}{ab} + \frac{2}{ac} + \frac{2}{bc} =$

$= \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} + \frac{2}{abc}(c + b + a) = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} + 0$

14. Si $a , b , c \in \mathbb{R}$, demuestre que: $|a| - |b| - |c| \leq |a - b - c|$.

SOLUCIÓN .- De $|x - y| \geq \big|\, |x| - |y| \,\big| \geq |x| - |y|$,

$|a - b - c| = |(a - b) - c| \geq |a - b| - |c| \geq |a| - |b| - |c|$.

15. Si $a , b \in \mathbb{R}$, demuestre que: $2(a^2 + b^2) \geq (a + b)^2$.

SOLUCIÓN .- De $a^2 + b^2 \geq 2ab \quad \Rightarrow$

$(a^2 + b^2) + (a^2 + b^2) \geq 2ab + (a^2 + b^2)$

$\Rightarrow \qquad 2(a^2 + b^2) \geq (a + b)^2$.

16. Si $a, b \in \mathbb{R}^+$, demuestre que: $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \geq \frac{8}{(a+b)^2}$.

SOLUCIÓN .- Sabiendo que se cumple: $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2$, $\forall\, x, y \in \mathbb{R}^+$

Entonces: $\frac{1}{a^2}(a+b)^2 + \frac{1}{b^2}(a+b)^2 = (1 + \frac{b}{a})^2 + (\frac{a}{b} + 1)^2$

$= 1 + 2\frac{b}{a} + \frac{b^2}{a^2} + \frac{a^2}{b^2} + 2\frac{a}{b} + 1$

$= 2 + 2(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}) + (\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{a^2}) \geq 2 + 2(2) + (2) = 8$

Por lo tanto $\frac{(a+b)^2}{a^2} + \frac{(a+b)^2}{b^2} \geq 8$, lo que implica que

$(a+b)^2(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}) \geq 8 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \geq \frac{8}{(a+b)^2}$.

17. Si $a, b, c \in \mathbb{R}^+$ (reales positivos), demuestre que:

$$2(a + \frac{1}{a}) + 2(b + \frac{1}{b})^2 \geq [\frac{(a+b)^2 + 4}{(a+b)}]^2$$

SOLUCIÓN .- Utilizando los dos Ejercicios anteriores,

$2(a + \frac{1}{a})^2 + 2(b + \frac{1}{b})^2 = 2(a^2 + 2 + \frac{1}{a^2} + b^2 + 2 + \frac{1}{b^2})$

$= 8 + 2(a^2 + b^2) + 2(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2})$

$\geq 8 + (a+b)^2 + \frac{2(8)}{(a+b)^2} = \frac{(a+b)^4 + 8(a+b)^2 + 16}{(a+b)^2}$

$= [\frac{(a+b)^2 + 4}{(a+b)}]^2$. L. q. q. d.

18. *Demuestre que:* $\left|\sqrt{a} - \sqrt{b}\right| \leq \sqrt{|a-b|}$, $\forall\, a, b \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$.

SOLUCIÓN .- En el PROBL. [12] hacer: $x = \sqrt{a} = |x|$, $y = \sqrt{b} = |y|$ de donde $x^2 = a$, $y^2 = b$.

19. *En* $\mathbb{R}$, *demuestre que:* $a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2 \geq abc(a+b+c)$

SOLUCIÓN .- $\forall\, a, b, c \in \mathbb{R}$: (usando: $2ab \leq a^2 + b^2$)

$abc(a+b+c) = a^2(bc) + b^2(ac) + c^2(ab)$

$\leq a^2(\frac{b^2+c^2}{2}) + b^2(\frac{a^2+c^2}{2}) + c^2(\frac{a^2+b^2}{2})$

$= a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2$.

20. *En* $\mathbb{R}$, *demuestre que:* $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + ac + bc$.

SOLUCIÓN .- $\forall\, a, b, c \in \mathbb{R}$, sabemos que se cumplen las relaciones:

$a^2 + b^2 \geq 2ab$, $a^2 + c^2 \geq 2ac$, $b^2 + c^2 \geq 2bc$

Sumándolas: $2(a^2 + b^2 + c^2) \geq 2(ab + ac + bc)$

$\Rightarrow \qquad a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + ac + bc$.

21. *Para todo* $a, b, c \in \mathbb{R}$, *demuestre que*

$(|a| + |b|)(|a| + |c|)(|b| + |c|) \geq 8|abc| \geq 6|abc|$.

SOLUCIÓN .- Puesto que $|a| + |b| \geq 2\sqrt{|a|}\sqrt{|b|} = 2\sqrt{|ab|}$,

análogamente $|a| + |c| \geq 2\sqrt{|ac|} \geq 0$

$|b| + |c| \geq 2\sqrt{|bc|} \geq 0$

Multiplicando estas tres desigualdades vemos que el sentido de la desigualdad resultante se conserva :

$(|a| + |b|)(|a| + |c|)(|b| + |c|) \geq (2^3)\sqrt{|ab||ac||bc|}$

$= 8\sqrt{|abc|^2} = 8|abc|$.

22. *Si* $a < 0$, *demuestre que:* $2a < a$.

SOLUCIÓN .- $a < 0 \Rightarrow a + a < 0 + a$ ... AXIOMA [03]

$\Rightarrow 2a < a$ ... AXIOMA [A4]

23. Si $a > 0$, *demuestre que:* $2a > a$. *(EJERCICIO)*

24. Si $a > b > c > 0$, *demuestre que:*

$b^3 - c^3 < a(b-c)(a+b+c) < 2a(b-c)(a+b+c)$.

SOLUCIÓN .- De la condición: $a > b > c > 0$ se deduce las siguientes desigualdades: $a^2 > b^2$; $ab > cb$; $ac > c^2$.

Sumándolas tenemos: $a^2 + ab + ac > (b^2 + bc + c^2)$ ... (1)

Entonces

$b^3 - c^3 = (b-c)(b^2 + bc + c^2)$ ... (pues $b - c > 0$)

$< (b-c)(a^2 + ab + ac) = a(b-c)(a+b+c)$ ... de (1)

Y la segunda desigualdad se sigue del PROBLEMA [23] previo.

25. *Sean* $a, b, c \in \mathbb{R}^+$, *distintos entre sí. Demuestre que:*

$$2(a^3 + b^3 + c^3) > ab(a + b) + ac(a + c) + bc(b + c)$$

SOLUCIÓN .- Puesto que $a^2 + b^2 > 2ab$ para $a \neq b$, entonces

$$\begin{aligned} a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2) &= (a + b)[(a^2 + b^2) - ab] \\ &> (a + b)[2ab - ab] \\ &= (a + b)(ab) \end{aligned}$$

Por lo tanto,
$$a^3 + b^3 > ab(a + b)$$
$$a^3 + c^3 > ac(a + c)$$
$$b^3 + c^3 > bc(b + c)$$

Y sumando estas tres desigualdades concluye la demostración.

26. *Si* a, b y c *son números positivos, demuestre que:*

$$(a + b + c)^3 \geq 27abc .$$

SOLUCIÓN .- Definamos los números reales x, y, z, positivos, de la forma:

$$x = \frac{a}{\sqrt[3]{abc}} \quad , \quad y = \frac{b}{\sqrt[3]{abc}} \quad , \quad z = \frac{c}{\sqrt[3]{abc}}$$

Y puesto que se tiene que: $xyz = 1$, entonces aplicando la propiedad (a) del PROBLEMA [3.16] del CAPÍTULO [5], se concluye que $x + y + z \geq 3$, de donde resulta: $a + b + c \geq 3\sqrt[3]{abc} > 0$.

Y aplicando el TEOR [1.8], Cap. 5, dos veces, tenemos que:

$$(a + b + c)^3 \geq (3\sqrt[3]{abc})^3 = 27abc .$$

27. Si $a, b, c \in \mathbb{R}$, demuestre que: $(a + 2b + 3c)^2 \leq 14(a^2 + b^2 + c^2)$.

SOLUCIÓN. Aplicando $A^2 + B^2 \geq 2AB$, para $A, B \in \mathbb{R}$, en la relación

$(a + 2b + 3c)^2 = a^2 + 4b^2 + 9c^2 + [\, 4ab + 6ac + 12bc \,]$, donde

$$\begin{aligned} 4ab &= 2(2a)(b) \leq (2a)^2 + b^2 = 4a^2 + b^2 \\ 6ac &= 2(3a)(c) \leq (3a)^2 + c^2 = 9a^2 + c^2 \\ 12bc &= 2(3b)(2c) \leq (3b)^2 + (2c)^2 = 9b^2 + 4c^2, \end{aligned}$$

se obtiene lo que se quería demostrar.

5. EL MÁXIMO ENTERO

Dado un número real x arbitrario, consideremos el conjunto M_x de todos los ***números enteros*** n ***menores o iguales al*** **número real** x fijado, es decir $M_x = \{ n \in \mathbb{Z} / \; n \leq x \}$.

Por ejemplo, para $x = \sqrt{5} = 2.2360\ldots$ tenemos que

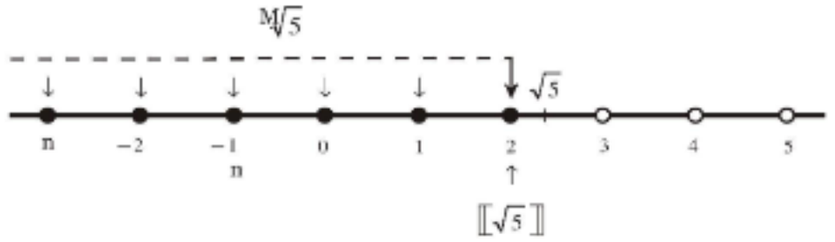
$$\begin{aligned} M_{\sqrt{5}} &= \{ \text{enteros } n \in \mathbb{Z} / \; n \leq \sqrt{5} \} \\ &= \{ \ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2 \} \qquad (*) \end{aligned}$$

AL MAYOR de los números enteros que constituyen el conjunto M_x se le denomina ***EL MÁXIMO ENTERO DEL NÚMERO REAL*** x, y se le denota con el símbolo

$$\begin{aligned} [\![x]\!] &= \max M_x \\ &= \max \{ \text{enteros } n \in \mathbb{Z} / \; n \leq x \} \end{aligned}$$

En el caso de $x = \sqrt{5}$ vemos, según la gráfica que sigue y por $(*)$, que

$$[\![\sqrt{5}]\!] = \max(M_{\sqrt{5}}) = 2$$



Consideremos otro ejemplo: $x = 4$. Entonces

$$M_4 = \{ n \in \mathbb{Z} / \; n \leq 4 \} = \{ \ldots, -1, 0, 1, 2, 3, 4 \}$$

Note que $n = 4 \in M_4$, pues $4 \leq 4$ es verdadero. Así, el MAYOR de todos los enteros n de M_4 es precisamente $n = 4$. Por lo tanto,

$$[\![4]\!] = \max(M_4) = \max \{ \ldots, -1, 0, 1, 2, 3, 4 \} = 4 .$$

De estos dos ejemplos podemos concluir que *EL MÁXIMO ENTERO* $[\![x]\!]$ de un número real x *ES SIEMPRE UN NÚMERO ENTERO,* y coincide con x en el caso de ser x un número entero.

5.1 DEFINICIÓN .- Dado un número real x, se llama *EL MÁXIMO ENTERO DE* x al número entero denotado por $[\![x]\!]$ y que es *EL MAYOR DE TODOS LOS ENTEROS QUE SON MENORES o IGUALES AL NÚMERO REAL* x,

$$[\![x]\!] = \max \{ \text{enteros } n \in \mathbb{Z} / \quad n \leq x \}$$

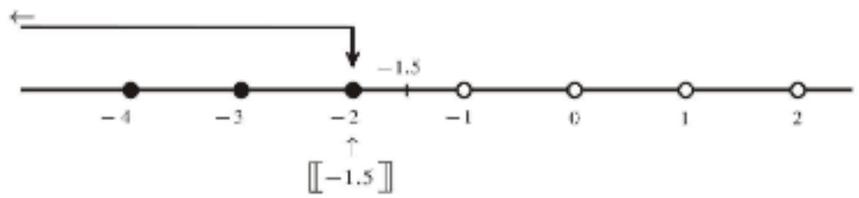
Para calcular el $[\![x]\!]$ se ubican gráficamente los números enteros $n \in \mathbb{Z}$ que se encuentran ***a la izquierda de*** x, o ***que coincidan con*** x, y el ***mayor*** de todos ellos es precisamente $[\![x]\!]$.

Por ejemplo,

a) $[\![\sqrt{3}]\!] = [\![1.73\ldots]\!] = \max \{ \text{enteros } n \in \mathbb{Z} / \quad n \leq \sqrt{3} \}$
$= \max \{ \text{enteros } n \in \mathbb{Z} / \quad n \leq 1.73\ldots \} = 1$
$= 1$

b) $[\![-1.5]\!] \stackrel{?}{=} -1$ FALSO

$[\![-1.5]\!] = -2$ VERDADERO , pues
$= \max \{ \text{enteros } n \in \mathbb{Z} / \quad n \leq -1.5 \} = -2$



Una propiedad de los Números Reales afirma que: "Dado un número real x, existe un único número ***entero*** n tal que $n \leq x < n+1$", de lo cual tenemos que este único entero con tal propiedad es precisamente *EL MÁXIMO ENTERO* $[\![x]\!]$.

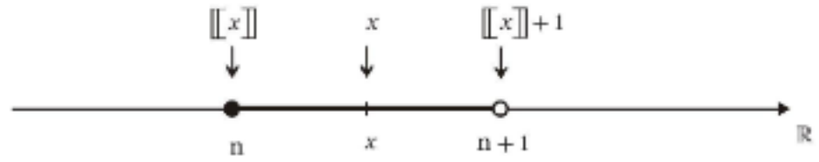
Este resultado motiva la siguiente PROPIEDAD FUNDAMENTAL DEL MÁXIMO ENTERO, que viene a ser una ***definición equivalente***, y que en la práctica formal es la más utilizada.

La propiedad de los Números Reales enunciada previamente y que **asegura** la existencia del Máximo Entero para cualquier número real x se demuestra en base al famoso AXIOMA DEL SUPREMO de los números reales y que se estudia brevemente en la sección de los CONJUNTOS ACOTADOS.

5.2 PROPIEDAD FUNDAMENTAL DEL MÁXIMO ENTERO

Sea $x \in \mathbb{R}$, arbitrario; y sea $n \in \mathbb{Z}$, entonces

$$[\![x]\!] = n \quad \Leftrightarrow \quad n \leq x < n+1 \quad , \quad n \in \mathbb{Z}$$



5.3 PROPIEDADES DEL MÁXIMO ENTERO

a) El MÁXIMO ENTERO $[\![x]\!]$ ***siempre es un NÚMERO ENTERO*** tal que

$$[\![x]\!] = n \quad \Leftrightarrow \quad x \in [n, n+1\rangle \ , \quad n \in \mathbb{Z}$$

b) Para todo número real x :

$$[\![x]\!] \leq x < [\![x]\!] + 1$$

c) Para todo número real x :

$$0 \leq x - [\![x]\!] < 1 \qquad \ldots \text{ de (b)}$$

d) $[\![x]\!] = x \quad \Leftrightarrow \quad x \in \mathbb{Z}$ (x entero)

e) $[\![[\![x]\!]]\!] = [\![x]\!]$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$ $\ldots$ de (d)

5.4 CASOS PARTICULARES

Como $[\![x]\!] = n \quad \Leftrightarrow \quad n \leq x < n+1 \ , \quad n \in \mathbb{Z}$
$\Leftrightarrow \quad x \in [n, n+1\rangle \ , \quad n \in \mathbb{Z}$

a) $[\![x]\!] = -2 \quad \Leftrightarrow \quad -2 \leq x < -1 \quad \Leftrightarrow \quad x \in [-2, -1\rangle$

b) $[\![x]\!] = 0.31$ es ABSURDO, pues todo ***MÁXIMO ENTERO debe ser un NÚMERO ENTERO***.

5.5 EJERCICIO .- Halle los Conjuntos Solución de las ecuaciones:

a) $[\![x-4]\!] = 2$ b) $[\![\,|x| - 3x\,]\!] = 0$

SOLUCIÓN.-

a) $[\![x-4]\!] = [\![(x-4)]\!] = 2 \quad \Leftrightarrow \quad 2 \leq x - 4 < 3$
$\Leftrightarrow \quad 6 \leq x < 7 \quad \Leftrightarrow \quad x \in [6, 7\rangle =$ C.S.

b) $[\![\,|x| - 3x]\!] = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 0 \leq |x| - 3x < 1$
$\Leftrightarrow \quad |x| - 3x \geq 0 \quad$ y $\quad |x| - 3x < 1$
$\Leftrightarrow \quad |x| \geq 3x \quad$ y $\quad |x| < 1 + 3x \qquad (*)$
(b1) (b2)

- Resolviendo (b1):

$$|x| \geq 3x \quad \Leftrightarrow \quad [\, x \geq 3x \quad \vee \quad x \leq -3x \,]$$
$$\Leftrightarrow \quad [\, 2x \leq 0 \quad \vee \quad 4x \leq 0 \,]$$
$$\Leftrightarrow \quad [\, x \leq 0 \quad \vee \quad x \leq 0 \,] \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{x \leq 0}$$

- Resolviendo (b2):

$$|x| < 1 + 3x \quad \Leftrightarrow \quad [\,(1+3x < 0) \text{ y } -(1+3x) < x < 1+3x\,]$$
$$\Leftrightarrow \quad [\,(x > -1/3) \text{ y } (x > -1/4) \text{ y } (x > -1/2)\,]$$
$$\Leftrightarrow \quad x \in \left\langle -\tfrac{1}{3}, \infty \right\rangle \cap \left\langle -\tfrac{1}{4}, \infty \right\rangle \cap \left\langle -\tfrac{1}{2}, \infty \right\rangle = \underline{\left\langle -\tfrac{1}{4}, \infty \right\rangle}$$

Regresando a (*):

$$\left[\!\left[\, |x| - 3x \,\right]\!\right] = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \leq 0 \quad \text{y} \quad x \in \left\langle -\tfrac{1}{4}, \infty \right\rangle$$
$$\Leftrightarrow \quad x \in \langle -\infty, 0] \cap \left\langle -\tfrac{1}{4}, \infty \right\rangle = \underline{\left\langle -\tfrac{1}{4}, 0 \right] = \text{C.S.}}$$

5.6 EJERCICIO.- Resuelva las ecuaciones siguientes:

a) $\left[\!\left[\dfrac{6-2x}{x} \right]\!\right] = 4$ b) $\left[\!\left[\dfrac{x}{2\sqrt{x}-1} \right]\!\right] = 0$

SOLUCIÓN.-

a) $\Leftrightarrow \quad 4 \leq \dfrac{6-2x}{x} < 5 \quad \Leftrightarrow \quad 4 \leq \dfrac{6}{x} - 2 < 5$

$\Leftrightarrow \quad 6 \leq \dfrac{6}{x} < 7 \quad \Leftrightarrow \quad \dfrac{6}{7} < x \leq 1 \quad \Leftrightarrow \quad x \in \langle 6/7, 1] = \text{C.S.}$

b) $0 \leq \dfrac{x}{2\sqrt{x}-1} < 1$ Ahora, resolveremos (b1) y (b2) por separado, y los intersectaremos al final.

(b1) (b2)

$$(b1) \quad \Leftrightarrow \quad [\, x \geq 0 \,] \quad \text{y} \quad [\,(x \geq 0 \quad \text{y} \quad 2\sqrt{x} - 1 > 0) \quad \vee$$
$$\vee \quad (x \leq 0 \quad \text{y} \quad 2\sqrt{x} - 1 < 0)\,]$$
$$\Leftrightarrow \quad [\, x \geq 0 \,] \quad \text{y} \quad [\,(x \geq 0 \quad \text{y} \quad x > 1/4) \quad \vee$$
$$\vee \quad (x \leq 0 \quad \text{y} \quad 0 \leq x < 1/4)\,] \quad \Leftrightarrow$$
$$x \in [0, \infty\rangle \cap \left[\left([0, \infty\rangle \cap \left\langle \tfrac{1}{4}, \infty \right\rangle \right) \cup \left(\langle -\infty, 0] \cap [0, 1/4\rangle \right) \right]$$

$\Leftrightarrow$

$$x \in \{0\} \cup \left\langle \tfrac{1}{4}, \infty \right\rangle = \underline{\text{Solución (b1)}} \qquad (\text{verificar})$$

$$(b2) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x}{2\sqrt{x}-1} - 1 < 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x - 2\sqrt{x} + 1}{2\sqrt{x}-1} < 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\frac{(\sqrt{x}-1)^2}{2\sqrt{x}-1} < 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \geq 0\,,\ x \neq 1\,,\ 2\sqrt{x} - 1 < 0$$
$$\Leftrightarrow \quad x \geq 0\,,\ x \neq 1 \quad \text{y} \quad x < \tfrac{1}{4} \quad \Leftrightarrow \quad \underline{x \in [0, 1/4\rangle} \ : \ (b2)$$

Así, el CONJUNTO SOLUCIÓN de (b) será la ***intersección*** de (b1) y (b2):

$$(b) \quad \Leftrightarrow \quad x \in (\{0\} \cup \langle 1/4, \infty\rangle) \cap [0, 1/4\rangle = \{0\}$$
$$\Leftrightarrow \quad x \in \text{C.S.} = \{0\}\,. \quad \text{Así, SOLUCIÓN (b): } x = 0 \text{ solamente.}$$

5.7 EJERCICIO.- Halle los Conjuntos Solución de las ecuaciones:

a) $\left[\!\left[1 - 2x \right]\!\right] = -5$ c) $\left[\!\left[x^2 - 2x - 3 \right]\!\right] = \sqrt{2}$

b) $\left[\!\left[\sqrt{x} + 1 \right]\!\right] = -2$ d) $\left[\!\left[x^2 - 6x + 8 \right]\!\right] = -1$

SOLUCIÓN:

a) $\left[\!\left[1 - 2x \right]\!\right] = -5 \quad \Leftrightarrow \quad -5 \leq 1 - 2x < -4 \quad \Leftrightarrow \quad -6 \leq -2x < -5$
$\Leftrightarrow \quad 3 \geq x > 5/2 \quad \Leftrightarrow \quad x \in \left\langle \tfrac{5}{2}, 3 \right] = \text{C.S.}$

b) $\left[\!\left[\sqrt{x} + 1 \right]\!\right] = -2 \quad \Leftrightarrow \quad -2 \leq \sqrt{x} + 1 < -1 \quad \Leftrightarrow \quad \underline{x \in \varnothing}$

Aquí no hay soluciones reales pues una expresión como $\sqrt{x} + 1$ que es positiva no puede estar entre dos números estrictamente negativos.

c) $\left[\!\left[x^2 - 2x - 3 \right]\!\right] = \sqrt{2} \ \ (= 1.4142\ldots) \quad \Leftrightarrow \quad x \in \varnothing = \text{C.S.}$

Aquí no hay soluciones reales pues un MÁXIMO ENTERO, que es siempre un número entero (cuando existe), no puede ser igual a $\sqrt{2}$.

d) $\left[\!\left[x^2 - 6x + 8 \right]\!\right] = -1 \quad \Leftrightarrow \quad -1 \leq x^2 - 6x + 8 < 0$
$\Leftrightarrow \quad [\, x^2 - 6x + 8 \geq -1 \quad \text{y} \quad x^2 - 6x + 8 < 0 \,]$
$\Leftrightarrow \quad [\, x^2 - 6x + 9 \geq 0 \quad \text{y} \quad (x-4)(x-2) < 0 \,]$
$\Leftrightarrow \quad [\, x \in \langle -\infty, \infty\rangle \quad \text{y} \quad x \in \langle 2, 4\rangle \,]$

(pues $x^2 - 6x + 9 = (x-3)^2 \geq 0$ se cumple ***para todo*** $x \in \mathbb{R}$)
$\Leftrightarrow \quad x \in \langle -\infty, \infty\rangle \cap \langle 2, 4\rangle = \langle 2, 4\rangle = \text{C.S.}$

5.8 TEOREMA.- Sean $x \in \mathbb{R}$. Para todo número ENTERO $n \in \mathbb{Z}$:

$$\left[\!\left[x + n \right]\!\right] = \left[\!\left[x \right]\!\right] + n$$

Este resultado es muy útil cuando se trata de simplificar cálculos.

PRUEBA .- Sea $[\![x]\!] = k$, con $k \in \mathbb{Z}$, entonces $k \le x < k+1$

$\Rightarrow \quad (k+n) \le x+n < (k+n)+1 \quad \Rightarrow \quad [\![x+n]\!] = k+n$

(pues siendo k y n enteros $\in \mathbb{Z}$, entonces $(k+n) \in \mathbb{Z}$ también)

$\Rightarrow \quad [\![x+n]\!] = k+n = [\![x]\!] + n$, lo que se quería probar.

5.9 EJERCICIO .- Resuelva $\left[\!\left[\dfrac{2x-1}{x+3}\right]\!\right] = 4 \qquad (*)$

$$(*) \quad \Leftrightarrow \quad \left[\!\left[\frac{2(x+3)-7}{x+3}\right]\!\right] = \left[\!\left[-\left(\frac{7}{x+3}\right)+2\right]\!\right] =$$

$$= \left[\!\left[-\frac{7}{x+3}\right]\!\right] + 2 = 4 \quad \Leftrightarrow \quad \left[\!\left[-\frac{7}{x+3}\right]\!\right] = 2$$

$$\Leftrightarrow \quad 2 \le \frac{-7}{x+3} < 3 \quad \Leftrightarrow \quad -\frac{7}{2} \le x+3 < -\frac{7}{3} \quad \text{y} \quad x \ne -3$$

$$\Leftrightarrow \quad -\frac{13}{2} \le x < -\frac{16}{3} \quad \text{y} \quad x \ne -3 \quad \Leftrightarrow \quad x \in \left[-\frac{13}{2}, -\frac{16}{3}\right\rangle$$

5.10 EJERCICIO .- Resuelva: $[\![x - |x-1|]\!] = |x|$.

SOLUCIÓN .- Por la Propiedad Fundamental (5.2) :

$[\![x - |x-1|]\!] = |x| \quad \Leftrightarrow \quad |x| \in \mathbb{Z} \quad \text{y} \quad |x| \le x - |x-1| < |x|+1$

$\Leftrightarrow \quad (x \in \mathbb{Z}) \quad \text{y} \quad [(|x| + |x-1| \le x) \quad \text{y} \quad (|x| + |x-1| > x-1)] \qquad (*)$

¿por qué? (a) (b)

donde: Solución (a) $= \{1\}$, Solución (b) $= \langle -\infty, \infty \rangle$ (verifíquelo)

Por lo tanto, regresando a $(*)$:

$(*) \quad \Leftrightarrow \quad (x \in \mathbb{Z}) \quad \text{y} \quad [x \in \{1\} \quad \text{y} \quad x \in \langle -\infty, \infty \rangle] \quad \Leftrightarrow \quad x \in \{1\} = \text{C.S.}$

Es decir, la única solución es: $x = 1$.

5.11 EJERCICIO .- Resuelva: $|2[\![x]\!] - x| = x \qquad (*)$

SOLUCIÓN .-

$(*) \quad \Leftrightarrow \quad x \ge 0 \quad \text{y} \quad [(2[\![x]\!] - x = x) \quad \vee \quad (2[\![x]\!] - x = -x)]$

$x \ge 0 \quad \text{y} \quad [([\![x]\!] = x) \quad \vee \quad ([\![x]\!] = 0)]$

$x \ge 0 \quad \text{y} \quad [x \in \mathbb{Z} \quad \vee \quad x \in [0, 1\rangle]$

$x \in [0, \infty\rangle \cap (\mathbb{Z} \cup [0, 1\}) = [0, 1\rangle \cup \{0\} \cup \mathbb{Z}^+$

$x \in [0, 1\rangle \cup \{1, 2, 3, \ldots\} = \text{C.S.}$

5.12 EJERCICIO .- Resuelva: $[\![\,|4x|\,]\!] = |2x| + 1 \qquad (*)$

SOLUCIÓN .- Por la Propiedad Fundamental (5.2) :

$(*) \quad \Leftrightarrow \quad |2x| + 1 \in \mathbb{Z} \quad \text{y} \quad |2x| + 1 \le |4x| < |2x| + 2$

$|2x| \in \mathbb{Z} \quad \text{y} \quad 2|x| + 1 \le 4|x| < 2|x| + 2$

¿por qué?

$2x \in \mathbb{Z} \quad \text{y} \quad x \in \langle -1, -1/2] \cup [1/2, 1\rangle \qquad$ (verificar)

$\Leftrightarrow \quad 2x \in \mathbb{Z} \quad \text{y} \quad 2x \in \langle -2, -1] \cup [1, 2\rangle$

$\Leftrightarrow \quad 2x = -1 \,, \quad 2x = 1 \quad \Leftrightarrow \quad x = -\frac{1}{2} \,, \quad x = \frac{1}{2}$

$\therefore \quad x \in \text{C.S.} = \{-1/2 \,, \; 1/2\}$.

5.13 EJERCICIO .- Resuelva: $[\![[\![3x]\!]]\!] = 2x + 2$.

SOLUCIÓN .- De $[\![[\![x]\!]]\!] = [\![x]\!]$ (propiedad 5.3 [e]), tenemos:

$[\![3x]\!] = 2x + 2 \quad \Leftrightarrow \quad (2x+2) \in \mathbb{Z} \quad \text{y} \quad 2x+2 \le 3x < (2x+2)+1 \quad \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \quad 2x \in \mathbb{Z} \quad \text{y} \quad (x \ge 2) \text{ y } (x < 3) \quad \Leftrightarrow \quad 2x \in \mathbb{Z} \quad \text{y} \quad (x \in [2, 3\rangle)$

$\Leftrightarrow \quad 2x \in \mathbb{Z} \quad \text{y} \quad (2x \in [4, 6\rangle) \quad \Leftrightarrow \quad 2x = 4 \quad \vee \quad 2x = 5$

$\Leftrightarrow \quad x = 2 \quad , \quad x = 5/2$. Luego, $x \in \{2, 5/2\} = \text{C.S.}$

6. INECUACIONES CON MÁXIMO ENTERO

6.1 TEOREMA .- Para todo entero $n \in \mathbb{Z}$:

(1) $[\![x]\!] < n \quad \Leftrightarrow \quad x < n$

(2) $[\![x]\!] \ge n \quad \Leftrightarrow \quad x \ge n$

PRUEBA .- Considerando que para $x \in \mathbb{R}$ existe un único número entero $k \in \mathbb{Z}$ tal que:

$$[\![x]\!] = k \quad \Leftrightarrow \quad k \le x < k+1 \quad \ldots \quad (*)$$

(1) $(\Rightarrow)$ $[\![x]\!] = k < n \quad \Rightarrow \quad [\![x]\!] = k \le n-1$, (pues $k, n \in \mathbb{Z}$)

$\Rightarrow \quad k \le x < k+1 \le (n-1)+1 = n \quad \Rightarrow \quad x > n$.

$(\Leftarrow)$ Sea $x < n$. Supongamos que $[\![x]\!] \ge n$, entonces

$[\![x]\!] = k \ge n \quad \Rightarrow \quad n \le k \le x < k+1 \quad \Rightarrow$

$x \ge n$ lo cual es ABSURDO, pues contradice la hipótesis que $x < n$. Luego, nuestra suposición no se cumple y por lo tanto, $[\![x]\!] < n$.

(2) Ejercicio.

6.2 COROLARIO .- Para todo entero $n \in \mathbb{Z}$:

$$(1) \quad [\![x]\!] > n \quad \Leftrightarrow \quad x \geq n+1$$

$$(2) \quad [\![x]\!] \leq n \quad \Leftrightarrow \quad x < n+1$$

PRUEBA .- Ambos resultados se siguen del hecho que si k y n son enteros en $\mathbb{Z}$:

$$(k > n \quad \Leftrightarrow \quad k \geq n+1) \quad y \quad (k \leq n \quad \Leftrightarrow \quad k < n+1)$$

y aplicando luego los resultados del TEOREMA (6.1).

6.3 EJERCICIO.- Halle los Conjuntos Solución de las inecuaciones:

a) $[\![-x]\!] > 0$ b) $[\![-2x]\!] < 1$

SOLUCIÓN.-

a) Por el TEOREMA 6.1 [2]: $[\![-x]\!] > 0 \quad \Leftrightarrow \quad [\![-x]\!] \geq 1$

$\Leftrightarrow \quad -x \geq 1 \quad \Leftrightarrow \quad x \leq -1 \quad \Leftrightarrow \quad x \in \langle -\infty, -1] = C.S.$

b) Por el TEOREMA 6.1 [1]: $[\![-2x]\!] < 1 \quad \Leftrightarrow \quad -2x < 1$

$\Leftrightarrow \quad x > -1/2 \quad \Leftrightarrow \quad x \in \langle -1/2, \infty\rangle = C.S.$

6.4 EJERCICIO .- Resuelva: $\left[\!\left[\frac{3x+2}{x-1} \right]\!\right] \leq \frac{13}{3}$

SOLUCIÓN .- Como $13/3 = 4.333\ldots$, entonces resolver la inecuación dada, es equivalente a resolver:

$$\left[\!\left[\frac{3x+2}{x-1} \right]\!\right] < 5 \overset{T.6.1[1]}{\Leftrightarrow} \frac{3x+2}{x-1} < 5 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{3x+2}{x-1} - 5 < 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{2x-7}{x-1} > 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \in \langle -\infty, 1\rangle \cup \langle \tfrac{7}{2}, \infty\rangle = C.S.$$

6.5 EJERCICIO .- Resuelva: $[\![\sqrt{x - [\![x]\!]}\,]\!] = 0$

SOLUCIÓN .- De 5.3 (c): $0 \leq x - [\![x]\!] < 1 \quad , \quad \forall\, x \in \mathbb{R} \quad \Leftrightarrow$

$0 \leq \sqrt{x - [\![x]\!]} < 1 \quad \Leftrightarrow \quad [\![\sqrt{x - [\![x]\!]}\,]\!] = 0 \quad , \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$

Por lo tanto, el Conjunto Solución es: $C.S. = \mathbb{R} = \langle -\infty, \infty\rangle$.

6.6 EJERCICIO .- Resuelva las siguientes inecuaciones:

a) $[\![x^2]\!] \leq 8$ b) $[\![x^2 - 7]\!]^2 > 2$

SOLUCIÓN .- Por el TEOREMA 6.1 [1] y [2] :

a) $[\![x^2]\!] \leq 8 \Leftrightarrow [\![x^2]\!] < 9 \Leftrightarrow x^2 < 9 \Leftrightarrow x \in \langle -3, 3\rangle = C.S.$

b) $[\![x^2 - 7]\!]^2 > 2 \quad \Leftrightarrow \quad [\![x^2 - 7]\!] > \sqrt{2} \quad \vee \quad [\![x^2 - 7]\!] < -\sqrt{2}$

$\Leftrightarrow \quad [\![x^2 - 7]\!] \geq 2 \quad \vee \quad [\![x^2 - 7]\!] \leq -2$

$\Leftrightarrow \quad [\![x^2]\!] \geq 9 \quad \vee \quad [\![x^2]\!] \leq 5 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 \geq 9 \quad \vee \quad x^2 < 6$

$\Leftrightarrow \quad x \in \langle -\infty, -3] \cup [3, \infty\rangle \cup \langle -\sqrt{6}, \sqrt{6}\rangle = C.S.$

6.7 EJERCICIO .- Demuestre que para todo $a, b \in \mathbb{R}$:

$$[\![a+b]\!] \geq [\![a]\!] + [\![b]\!]$$

SOLUCIÓN .- Sean m y $n \in \mathbb{Z}$ enteros tales que: $[\![a]\!] = m \ , \ [\![b]\!] = n$

$$\left.\begin{array}{l} m \leq a < m+1 \\ n \leq b < n+1 \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad m+n \leq a+b < (m+n)+2 \quad \Rightarrow$$

$[m+n \leq a+b < m+n+1] \ \sigma \ [m+n+1 \leq a+b < m+n+2] \ \Rightarrow$

$\Rightarrow \quad [\![a+b]\!] = (m+n) \quad \sigma \quad [\![a+b]\!] = (m+n+1) > (m+n)$

$\Rightarrow \quad [\![a+b]\!] \geq (m+n) = [\![a]\!] + [\![b]\!]$.

6.8 EJERCICIO .- Resuelva: $\dfrac{\sqrt{4 - |x|}}{[\![x^2 - 2x - 7]\!]} > 0 \qquad (*)$

SOLUCIÓN .- $x^2 - 2x - 7 = (x-1)^2 - 8$

EL UNIVERSO U: $4 - |x| \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \in [-4, 4] = U$. Así

$(*) \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{4 - |x|} > 0 \quad y \quad [\![(x-1)^2 - 8]\!] > 0 \quad y \quad x \in U$

$\Leftrightarrow \quad x \neq \pm 4 \quad y \quad x \in U \quad y \quad (x-1)^2 - 8 \geq 1$

$\Leftrightarrow \quad x \neq \pm 4 \quad y \quad x \in U \quad y \quad (x-1)^2 \geq 9$

$\Leftrightarrow \quad x \in \langle -4, 4\rangle \cap (\langle -\infty, -2] \cup [4, \infty\rangle) = \langle -4, -2]$.

6.9 EJERCICIO .- Resuelva: $\left| [\![\frac{1}{2x}]\!] - \sqrt{\frac{x-1}{x}} \right| < \sqrt{x} \qquad (*)$

SOLUCIÓN .- EL UNIVERSO U: $\frac{x-1}{x} \geq 0$ y $x \geq 0$: $x \in [1, \infty\rangle = U$.

Para $x \in U = [1, \infty\rangle$: $x \geq 1$, $2x \geq 2$ $\Rightarrow$ $0 < \frac{1}{2x} \leq \frac{1}{2}$

$\Rightarrow$ $\left[\!\left[\frac{1}{2x}\right]\!\right] = 0$. Asi, (*) se transforma en:

$$\left| 0 - \sqrt{\frac{x-1}{x}} \right| < \sqrt{x} \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{\frac{x-1}{x}} < \sqrt{x} \ , \ x \in U = [1, \infty\rangle$$

$$\Leftrightarrow \ x - 1 < x^2 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - x + 1 > 0 \ , \ x \in U = [1, \infty\rangle$$

Como la expresión cuadrática $x^2 - x + 1$ no tiene raices reales, entonces es ***siempre positiva*** y con mayor razón dentro del Universo $U = [1, \infty\rangle$. Por lo tanto, la última inecuación se cumple ***para todo*** $x \in [1, \infty\rangle = U$. Luego, el CONJUNTO SOLUCIÓN de la inecuación (*) es: C.S. $= [1, \infty\rangle$.

6.10 EJERCICIO .- Resuelva: a) $\frac{x}{[\![x]\!]} \geq 0$, b) $\frac{x}{[\![x]\!]} < 1$

SOLUCIÓN .-

a) $\Leftrightarrow$ $(x \geq 0$ y $[\![x]\!] > 0)$ $\vee$ $(x \leq 0$ y $[\![x]\!] < 0)$

$\Leftrightarrow$ $(x \geq 0$ y $x \geq 1)$ $\vee$ $(x \leq 0$ y $x < 0)$

$\Leftrightarrow$ $(x \in [0, \infty\rangle \cap [1, \infty\rangle)$ $\vee$ $(x \in \langle -\infty, 0] \cap \langle -\infty, 0\rangle)$

$\Leftrightarrow$ $x \in \langle -\infty, 0\rangle \cup [1, \infty\rangle$ = C.S:

b) $\frac{x}{[\![x]\!]} - 1 < 0$ $\Leftrightarrow$ $\frac{x - [\![x]\!]}{[\![x]\!]} < 0$ (*)

Por las Propiedades 5.3 [c] y [d]: $x - [\![x]\!] > 0$, $\forall\, x \notin \mathbb{Z}$

entonces

(*) $\Leftrightarrow$ $[\![x]\!] < 0$, $\forall\, x \in \mathbb{R} - \mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow$ $x < 0$, $\forall\, x \in (\mathbb{R} - \mathbb{Z})$ $\Leftrightarrow$ $x \in \langle -\infty, 0\rangle - \mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow$ $x \in (\ldots \cup \langle -3, -2\rangle \cup \langle -2, -1\rangle \cup \langle -1, 0\rangle)$ = C.S.

6.11 EJERCICIO .- Resuelva: $\frac{x}{[\![x]\!]} \geq 1$

SOLUCIÓN .- Ver 5.3 [c] y [d] ,

$\frac{x}{[\![x]\!]} - 1 \geq 0$ $\Leftrightarrow$ $\frac{x - [\![x]\!]}{[\![x]\!]} \geq 0$ $\Leftrightarrow$

$(x - [\![x]\!] \geq 0$ y $[\![x]\!] > 0)$ $\vee$ $(x - [\![x]\!] \leq 0$ y $[\![x]\!] < 0)$

$\Leftrightarrow$ $(x \in \mathbb{R}$ y $x \geq 1)$ $\vee$ $(0 \leq x - [\![x]\!] \leq 0$ y $x < 0)$

$\Leftrightarrow$ $x \in [1, \infty\rangle$ $\vee$ $(x - [\![x]\!] = 0$ y $x \in \langle -\infty, 0\rangle)$

$\Leftrightarrow$ $x \in [1, \infty\rangle$ $\vee$ $(x \in \mathbb{Z}$ y $x \in \langle -\infty, 0\rangle)$ $\Leftrightarrow$

$x \in [1, \infty\rangle \cup \mathbb{Z}^- = \{\ldots, -3, -2, -1\} \cup [1, \infty\rangle$ = C.S.

6.12 EJERCICIO .- Resuelva: $\frac{\sqrt{x/(2-x)}}{x^2 - [\![x]\!]\,|x| - (3/4)} \leq 0$ (*)

SOLUCIÓN.-

UNIVERSO U: $\frac{x}{2-x} \geq 0$ $\Leftrightarrow$ $x \in [0, 2\rangle = U$

(1) Si $x \in U_1 = [0, 1\rangle$: $[\![x]\!] = 0$, $|x| = x$, entonces

(*) $\Leftrightarrow$ $x^2 - (3/4) < 0$ $\Leftrightarrow$ $x \in \langle -\sqrt{3}/2 , \sqrt{3}/2\rangle$

Solución (1): $\langle -\sqrt{3}/2 , \sqrt{3}/2\rangle \cap U_1 = [0, \sqrt{3}/2\rangle$

(2) Si $x \in U_2 = [1, 2\rangle$: $[\![x]\!] = 1$, $|x| = x$, entonces

(*) $\Leftrightarrow$ $x^2 - x - (3/4) < 0$ $\Leftrightarrow$ $(x - \frac{1}{2})^2 < 1$

$\Leftrightarrow$ $-1 < x - (1/2) < 1$ $\Leftrightarrow$ $x \in \langle -1/2, 3/2\rangle$

Solución (2): $\langle -1/2, 3/2\rangle \cap U_2 = [1, 3/2\rangle$

Luego, como $U = U_1 \cup U_2$, el CONJUNTO SOLUCIÓN total estará constituido por la reunión de las dos soluciones parciales (1) y (2):

C.S. $= [0, \sqrt{3}/2\rangle \cup [1, 3/2\rangle$.

6.13 EJERCICIO .- (*): $2[\![x+1]\!]^2 - 11[\![x]\!] \leq -4$

SOLUCIÓN .- De $[\![x+1]\!] = [\![x]\!] + 1$, tenemos que

$2[\![x]\!]^2 + 4[\![x]\!] + 2 - 11[\![x]\!] + 4 \leq 0$ $\Leftrightarrow$ $2[\![x]\!]^2 - 7[\![x]\!] + 6 \leq 0$

$\Leftrightarrow$ $(2[\![x]\!] - 3)([\![x]\!] - 2) \leq 0$ $\Leftrightarrow$ $[\![x]\!] \in [3/2, 2]$

$\Leftrightarrow$ $[\![x]\!] = 2$ $\Leftrightarrow$ $2 \leq x < 3$: C.S.

¿Por qué?

6.14 EJERCICIO .- Halle el conjunto de valores que puede tomar W :

$$W = x^2 [\![3x - 1]\!] \ , \quad \text{si} \quad x \in \langle 0, 1\rangle$$

SOLUCIÓN .- Como $[\![3x - 1]\!] = [\![3x]\!] - 1$, entonces si $n \in \mathbb{Z}$:

$[\![3x]\!] = n$ $\Leftrightarrow$ $n \leq 3x < n + 1$ $\Leftrightarrow$ $\frac{n}{3} \leq x < \frac{n+1}{3}$ (*)

Ahora demos valores enteros a n de manera que podamos cubrir todo $\langle 0, 1\rangle$ según la última relación $(*)$, para $W = x^2(\llbracket 3x \rrbracket - 1) = x^2(n-1)$:

- Si $n = 0$: $0 < x < 1/3$, $W = x^2(0-1) = -x^2 \in \langle -1/9, 0\rangle$
- Si $n = 1$: $\frac{1}{3} \le x < 2/3$, $W = x^2(1-1) = 0 \in \{0\}$
- Si $n = 2$: $\frac{2}{3} \le x < 1$, $W = x^2(2-1) = x^2 \in [4/9, 1\rangle$

Por lo tanto, $W \in \langle -1/9, 0] \cup [4/9, 1\rangle$.

6.15 EJERCICIO .- Resuelva: $\dfrac{\llbracket -x \rrbracket - 2}{6 - \llbracket x \rrbracket} \ge 0$ $(*)$

SOLUCIÓN .- Equivalentemente,

$(\llbracket -x \rrbracket - 2 \ge 0 \text{ y } 6 - \llbracket x \rrbracket > 0) \vee (\llbracket -x \rrbracket - 2 \le 0 \text{ y } 6 - \llbracket x \rrbracket < 0)$

$\Leftrightarrow (\llbracket -x \rrbracket \ge 2 \text{ y } \llbracket x \rrbracket < 6) \vee (\llbracket -x \rrbracket \le 2 \text{ y } \llbracket x \rrbracket < 6)$

$\Leftrightarrow (-x \ge 2 \text{ y } x < 6) \vee (-x < 3 \text{ y } x \ge 7)$

$\Leftrightarrow (x \le -2 \text{ y } x < 6) \vee (x > -3 \text{ y } x \ge 7)$

$\Leftrightarrow x \in \langle -\infty, -2] \cup [7, \infty\rangle$ = C.S.

6.16 EJERCICIO .- Resuelva: $\dfrac{|x| - 1}{\llbracket x \rrbracket - 1} \ge 1$

SOLUCIÓN .- Equivalentemente,

$$\frac{|x| - 1}{\llbracket x \rrbracket - 1} - 1 \ge 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{|x| - \llbracket x \rrbracket}{\llbracket x \rrbracket - 1} \ge 0 \qquad (*)$$

Considerando que $\langle -\infty, \infty\rangle = \underset{(1)}{\langle -\infty, 0\rangle} \cup \underset{(2)}{[0, \infty\rangle}$

(1) Si $x \in \langle -\infty, 0\rangle$: $x < 0$, $|x| = -x$; y como se cumple (siempre) que $\llbracket x \rrbracket \le x$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$ entonces $x + \llbracket x \rrbracket \le x + x = 2x < 0 \Rightarrow -(x + \llbracket x \rrbracket) > 0$. Así,

$$(*) \Leftrightarrow \frac{-(x + \llbracket x \rrbracket)}{\llbracket x \rrbracket - 1} \ge 0 \Leftrightarrow \llbracket x \rrbracket - 1 > 0$$

$\Leftrightarrow \llbracket x \rrbracket > 1 \Leftrightarrow x \ge 2 \Leftrightarrow x \in [2, \infty\rangle$

Solución (1): $[2, \infty\rangle \cap \langle -\infty, 0\rangle = \varnothing$ Conjunto Vacío.

(2) Si $x \in [0, \infty\rangle$: $x \ge 0$, $|x| = x$; entonces

$$(*) \Leftrightarrow \frac{x + \llbracket x \rrbracket}{\llbracket x \rrbracket - 1} \ge 0 \Leftrightarrow$$

$(x - \llbracket x \rrbracket \ge 0 \text{ y } \llbracket x \rrbracket > 1) \vee (0 \le x - \llbracket x \rrbracket \le 0 \text{ y } \llbracket x \rrbracket < 1)$

$\Leftrightarrow (x \in \mathbb{R} \text{ y } x \ge 2) \vee (x - \llbracket x \rrbracket = 0 \text{ y } x < 1)$

$\Leftrightarrow x \in [2, \infty\rangle \vee (x \in \mathbb{Z} \text{ y } x \in \langle -\infty, 1\rangle)$

$\Leftrightarrow x \in \{\ldots, -3, -2, -1, 0\} \cup [2, \infty\rangle$

Solución (2): $(\{\ldots, -2, -1, 0\} \cup [2, \infty\rangle) \cap [0, \infty\rangle = \{0\} \cup [2, \infty\rangle$

EL CONJUNTO SOLUCIÓN total es la reunión de las dos Soluciones (1) y (2):

C.S. $= \varnothing \cup (\{0\} \cup [2, \infty\rangle) = \{0\} \cup [2, \infty\rangle$.

6.17 EJERCICIO .- Exprese como combinación de intervalos el conjunto

$$A = \{\, w = \left| x^2 \left\llbracket \frac{5-x}{2} \right\rrbracket - 4 \right| \;/\; x \in \langle 1, 3] \,\}$$

SOLUCIÓN .- Como $x \in \langle 1, 3]$ entonces $-x \in [-3, -1\rangle \Rightarrow (5-x) \in [2, 4\rangle \Rightarrow (5-x)/2 \in [1, 2\rangle$; así resulta que $\left\llbracket \frac{5-x}{2} \right\rrbracket = 1$ lo que implica que $w = \left| x^2 - 4 \right|$

Además, $x \in \langle 1, 3] \Leftrightarrow x^2 \in \langle 1, 9] \Leftrightarrow x^2 - 4 \in \langle -3, 5]$

$\Leftrightarrow -3 < (x^2 - 4) \le 5 \Rightarrow 0 \le \left| x^2 - 4 \right| \le 5 \Leftrightarrow w \in [0, 5]$

Por lo tanto, $A = [0, 5]$.

6.18 EJERCICIO .- Demuestre que: $\llbracket 2x \rrbracket - 2\llbracket x \rrbracket = 0$ ó 1 .

SOLUCIÓN .- Sea $\llbracket x \rrbracket = n$, $n \in \mathbb{Z}$, entonces

$n \le x < n+1 \Leftrightarrow 2n \le 2x < 2n+2$

$\Leftrightarrow (2n \le 2x < 2n+1) \text{ ó } (2n+1 \le 2x < 2n+2)$

$\Leftrightarrow (\llbracket 2x \rrbracket = 2n) \text{ ó } (\llbracket 2x \rrbracket = 2n+1)$

Por lo tanto,

$\llbracket 2x \rrbracket - 2\llbracket x \rrbracket = [(2n) - 2(n) = 0] \text{ ó } [(2n+1) - 2(n) = 1]$

$= 0 \text{ ó } 1$

Más aún, de lo anterior se puede ver que

$$\llbracket 2x \rrbracket - 2\llbracket x \rrbracket = \begin{cases} 0 & , \text{ si } x \in [n, n + \frac{1}{2}\rangle \\ 1 & , \text{ si } x \in [n + \frac{1}{2}, n+1\rangle \end{cases} , \quad n \in \mathbb{Z}$$

6.19 EJERCICIO .- Halle el Conjunto Solución de la inecuación:

$$\frac{(\llbracket x \rrbracket - 2)(\sqrt{|x| - 1} - 1)(\sqrt{3 - x} + 1)}{\left|\sqrt{x} - 2\right|} > 0 \qquad (*)$$

SOLUCIÓN .- UNIVERSO U : $|x| - 1 \geq 0$ y $3 - x \geq 0$ y $x \geq 0$

$\Leftrightarrow \quad x \in \langle -\infty, -1] \cup [1, \infty\rangle$ y $x \in \langle -\infty, 3]$ y $x \in [0, \infty\rangle$

$\Leftrightarrow \quad x \in U = [1, 3] = [1, 2\rangle \cup [2, 3\rangle \cup \{3\}$

Esto implica que $[\![x]\!] = 1, 2$ ó 3 . Además, como el denominador nunca se anula sobre el Universo $U = [1, 3]$, entonces:

$(*) \quad \Leftrightarrow \quad ([\![x]\!] - 2)(\sqrt{|x| - 1} - 1) > 0 \qquad (**)$

(1) Si $x \in [1, 2\rangle$: $[\![x]\!] = 1$, $[\![x]\!] - 2 = -1 < 0$, entonces

$(**) \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{|x| - 1} - 1 < 0 \quad \Leftrightarrow \quad |x| < 2$

Solución (1): $\langle -2, 2\rangle \cap [1, 2\rangle = [1, 2\rangle$.

(2) Si $x \in [2, 3\rangle$: $[\![x]\!] = 2$, $[\![x]\!] - 2 = 0$, entonces

$(**) \quad \Leftrightarrow \quad 0 > 0$ (FALSO) $\quad \Leftrightarrow \quad x \in \varnothing$

Solución (2): $\varnothing \cap [2, 3\rangle = \varnothing$

(3) Si $x \in \{3\}$: $x = 3$, $[\![x]\!] = 3$, $[\![x]\!] - 2 = 1 > 0$:

$(**) \quad \Leftrightarrow \quad (1)\ (\sqrt{|3| - 1} - 1) > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{2} > 1 \qquad (V)$

Por lo tanto, Solución (3): $x \in \{3\}$. Es decir, $x = 3$.

Luego, el CONJUNTO SOLUCIÓN estará constituido por la reunión de estas soluciones parciales,

C.S. $= [1, 2\rangle \cup \varnothing \cup \{3\} = [1, 2\rangle \cup \{3\}$.

SERIE DE EJERCICIOS

1. Encuentre los valores que puede tomar
   a) $[\![3x]\!]$, si $x \in [0, 1]$
   b) $[\![x^2/2]\!]$, si $x \in [-\frac{3}{2}, 3\rangle$
   c) $[\![1 - \sqrt{x}]\!]^2$, si $x \in \langle \frac{1}{2}, 10]$
   d) $[\![\operatorname{Sen} x]\!]$, si $x \in [0, 3\pi]$
   e) $[\![\operatorname{Cos}^2 x]\!]$, si $x \in [-\pi/2, 2\pi]$
2. Sea $a \in \mathbb{R}$. Demuestre que, si $n \in \mathbb{Z}$, entonces
   $n \leq a \quad \Rightarrow \quad n \leq [\![a]\!] \leq a$
3. Halle los Conjuntos Solución de las ecuaciones siguientes:

   a) $[\![2x + 1]\!] = -1$
   b) $[\![2 - |x|]\!] = 1$
   c) $\left|\, [\![\sqrt{x}]\!] - \sqrt{\pi} \,\right| = 2 - \sqrt{\pi}$
   d) $\left|\, [\![x^2]\!] - 1 \,\right| = 3$
   e) $\left[\!\!\left[\frac{x - 1}{\sqrt{x} - 2} \right]\!\!\right] = 0$
   f) $\left[\!\!\left[\frac{2x - 1}{x + 2} \right]\!\!\right] = 3$
   g) $\left[\!\!\left[\frac{|x - 2| + 3}{2} \right]\!\!\right] = 5$
4. Resuelva las ecuaciones:
   a) $[\![3x]\!] = x + 2$ b) $[\![3x]\!] = 2x + 2$
5. Demuestre que,
   a) $[\![-x]\!] = -[\![x]\!] \quad \Leftrightarrow \quad x \in \mathbb{Z}$
   b) $[\![-x]\!] = -[\![x]\!] - 1 \quad \Leftrightarrow \quad x \in \mathbb{R} - \mathbb{Z}$
   c) $[\![x + [\![x]\!]]\!] = 2[\![x]\!]$
   d) $a \leq b \quad \Rightarrow \quad [\![a]\!] \leq [\![b]\!]$, $a, b \in \mathbb{R}$
   e) Pruebe con un ejemplo que el recíproco de (d) no se cumple.
6. Halle el conjunto de valores que puede tomar: $\left[\!\!\left[\frac{2x + 3}{x + 2} \right]\!\!\right]$
   a) Para $x \in [0, 6]$, b) Para $x \in [-7/4, 0]$.
   SUG: $(2x + 3)/(x + 2) = 2 - [1/(x + 2)]$
7. Halle el conjunto de valores que puede tomar: $\left[\!\!\left[\frac{\pi^2}{|x| + 2} \right]\!\!\right]$
   a) Para $x \in \langle -\infty, 9\rangle$, b) Para $x \in \langle -\infty, -4/5]$.
8. Demuestre que,
   a) $\left[\!\!\left[\frac{|x| - 2}{3 - x} \right]\!\!\right] = -1$, para $x \in \langle -1, 1]$
   b) $|x| \geq \sqrt[3]{[\![x^3]\!]}$. SUG: $[\![x^3]\!] = n \quad \Leftrightarrow \quad n \leq x^3 < n + 1$
   $\Rightarrow \quad \sqrt[3]{n} \leq x \leq |x|$
   c) $[\![|x| - 2x]\!] = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \in \langle -1/3, 0]$
9. Demuestre que si $n \in \mathbb{Z}^+$ entonces
   a) $[\![nx]\!] - n[\![x]\!] \in \{0, 1, 2, \ldots, n - 1\}$

b) $[\![nx]\!] - n[\![x]\!] = p \quad \Leftrightarrow \quad x \in [\, k + \frac{p}{n} \,,\; k + \frac{p+1}{n} \rangle$
donde $p = 0, 1, 2, \ldots, n-1$, para todo $k \in \mathbb{Z}$.

10. Resuelva:
a) $[\![x^2 - 1]\!] \geq 0$ b) $[\![x^2 - 1]\!] > 0$ c) $[\![x^2 - 1]\!] \leq 0$
d) $[\![x^2 - 4]\!] \leq -1$ e) $|\, [\![-x]\!] - 1 \,| < 2$

11. Encuentre los Conjuntos Solución de las inecuaciones:
a) $[\![-x]\!] < 0$ b) $[\![\sqrt{3} - 2x]\!] < \sqrt{3}$
c) $|\, [\![2x]\!] - 1 \,| < 3$ e) $[\![\sqrt{x - [\![x]\!]}]\!] < 1/2$
d) $\dfrac{x}{[\![-x]\!]} < 0$ f) $[\![x^2 - 8]\!] > 1/2$

12. Resuelva las inecuaciones:
a) $\dfrac{1}{x - [\![x]\!]} > 1$ b) $\left[\!\!\left[\dfrac{6x - 4}{x^2} \right]\!\!\right] \leq 1$
c) $[\![x^2 - 4x - 3]\!] < 17/2$ d) $\left[\!\!\left[\dfrac{|x| - 1}{2 - x} \right]\!\!\right] < -9/4$

13. Halle los Conjuntos Solución de las siguientes inecuaciones:
a) $2[\![x]\!] + [\![x - 5]\!] \geq \frac{7}{2}$ b) $\left[\!\!\left[\sqrt{x-1} + \frac{3}{2} \right]\!\!\right] < \frac{67}{12}$
c) $\left[\!\!\left[x^2 - 2|x| - 16 \right]\!\!\right] \geq \frac{52}{7}$ d) $\dfrac{|6 - x| - 3}{3 - [\![x]\!]^2} < 0$
f) $[\![x - 4\sqrt{x} + 5]\!]^2 \geq 3$ e) $\dfrac{|6 - x| - 3}{3 - [\![x^2]\!]} < 0$
g) $2[\![x - 1]\!]^2 + 5[\![x]\!] \leq 17$

14. Exprese el conjunto A como combinación de intervalos
a) $A = \{\, x^2 - [\![|x - 1| + 2]\!] + [\![x]\!] \;/\; x \in \langle 0, 2] \,\}$
b) $A = \{\, x \in \mathbb{R} \;/\; \left[\!\!\left[\dfrac{|x+3| - |x-1| + |x-5|}{|x+2| - 3} \right]\!\!\right] = 0 \,\}$
c) $A = \{\, -x^2 \left[\!\!\left[\dfrac{|x+2| - 1}{x+3} \right]\!\!\right] \;/\; x \in \langle -3, 4] \,\}$

d) $A = \{\, \sqrt{|x| - \frac{1}{2}[\![x]\!]} \;/\; x \in [\, -2, 1 \rangle \,\}$
e) $A = \{\, x^2 - [\![|x+1| + 2]\!] x + [\![x]\!] \;/\; x \in \langle 0, 2] \,\}$

15. Halle los Conjuntos Solución de las siguientes inecuaciones:
a) $(|x| - 1)(x - 3)([\![x]\!] - 2)(2\sqrt{|x|} - \sqrt{|x| - 2}) > 0$
b) $([\![x]\!] - 2)(\sqrt{|x|} - \sqrt{3|x| - 1})(1 - \sqrt{3 - x}) \geq 0$

16. ¿Cuáles de las siguientes proposiciones son verdaderas?
a) $w = x - [\![x]\!] \quad \Rightarrow \quad w \in [\, 0, 1 \rangle$
b) $\forall\, n \in \mathbb{Z} : \quad [\![x + n]\!]^2 = [\![x]\!]^2 + 2n[\![x]\!] + n^2$
c) Sea $n \in \mathbb{Z} : \; z = x - n \;$ y $\; 0 \leq z < 1 \;\Rightarrow\; [\![x]\!] = n$
d) Si $x < -1 \;\Rightarrow\; \left|\, \left[\!\!\left[\frac{1}{x} \right]\!\!\right] + 1 \,\right| = \left[\!\!\left[-\frac{1}{x} \right]\!\!\right]$
e) $[\![x]\!]^3 - 2[\![x + 3]\!]^2 + [\![x]\!] > -30 \;\Leftrightarrow\; x \in [\, -2, 1 \rangle \cup [\, 5, \infty \rangle$

17. Halle todos los valores que puede tomar:
a) $\left[\!\!\left[\dfrac{|6 - x| - 1}{x + 3} \right]\!\!\right]$ si $x \in \langle -1, 8 \rangle$
b) $\left|\, [\![x^2 + x - 10]\!] \,\right|$, c) $\sqrt{2[\![2x + 3]\!] + 4[\![x]\!]}$
d) $\sqrt{2|x| - [\![2x]\!]}$, e) $\sqrt{2[\![2x + 7]\!] - 4[\![x]\!]}$
SUG: (e) Ver el EJERCICIO PROPUESTO [9] .

CLAVE DE RESPUESTAS

1. a) $\{0, 1, 2, 3\}$ b) $\{0, 1, 2, 3, 4\}$ c) $\{0, 1, 4\}$
d) $\{-1, 0, 1\}$ e) $\{0, 1\}$

3. a) $[\, -1, -1/2 \rangle$ b) $[\, -1, 0\} \cup \langle 0, 1]$ c) $[\, 4, 9 \rangle$
d) $\langle -\sqrt{5}, -2] \cup [\, 2, \sqrt{5} \rangle$
e) $0 \leq \dfrac{x-1}{\sqrt{x} - 2} < 1 \Leftrightarrow [\, \underset{(\beta)}{\dfrac{x-1}{\sqrt{x} - 2} \geq 0} \,] \text{ y } [\, \underset{(\alpha)}{\dfrac{x - \sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} - 2} < 0} \,]^{(*)}$

$(\alpha) \Leftrightarrow \dfrac{[\sqrt{x} - (1/2)]^2 + (3/4)}{\sqrt{x} - 2} < 0$

$\Leftrightarrow \sqrt{x} - 2 < 0 \quad y \quad x \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad 0 \leq x < 4$

Solución (α) : $[0, 4\rangle$

$(\beta) \Leftrightarrow \dfrac{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 1)}{\sqrt{x} - 2} \geq 0$

$\Leftrightarrow \dfrac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x} - 2} \geq 0 \quad y \quad x \geq 0$

$\Leftrightarrow \sqrt{x} \in \langle -\infty, 1] \cup [2, \infty\rangle \quad y \quad x \geq 0$

Solución (β): $x \in [0, 1] \cup [4, \infty\rangle$

Por lo tanto: CONJUNTO SOLUCIÓN $\{e\}$: $[0, 1]$ (de $(*)$).

f) $[-7, -9/2\rangle$ g) $\langle -13, -11] \cup [15, 17\rangle$

4. a) $x = 1$, b) $x = 2$, $x = 5/2$

5. e) $a = 4.5$, $b = 4.1$; 6 a) $\{1\}$, 6 b) $\{-2, -1, 0, 1\}$

7. a) $\{0, 1, 2, 3, 4\}$, b) $\{0, 1, 2, 3\}$

10. a) $\langle -\infty, -1] \cup [1, \infty\rangle$, b) $\langle -\infty, -\sqrt{2}] \cup [\sqrt{2}, \infty\rangle$,
c) $\langle -\sqrt{2}, \sqrt{2}\rangle$, d) $\langle -2, 2\rangle$, e) $\langle -3, 0]$

11. a) $\langle 0, \infty\rangle$, b) $\langle (\sqrt{3} - 3)/2, \infty\rangle$, c) $[-1/2, 2)$,
d) $\langle -\infty, -1] \cup \langle 0, \infty\rangle$, e) $\langle -\infty, \infty\rangle$, f) $\langle -\infty, -3] \cup [3, \infty\rangle$

12. a) $\langle -\infty, \infty\rangle - \mathbb{Z}$, b) $\langle -\infty, 0\} \cup \langle 0, 1\rangle \cup \langle 2, \infty\rangle$,
c) $\langle -2, 6\rangle$, d) $\langle 2, 3\rangle$

13. a) $[3, \infty\rangle$, b) $[1, 85/4\rangle$, c) $\langle -\infty, -6] \cup [6, \infty\rangle$,
d) $\langle -\infty, -1\rangle \cup [2, 3\rangle \cup \langle 9, \infty\rangle$, f) $[0, 1] \cup [9, \infty\rangle$
e) $\langle -\infty, -2] \cup [2, 3\rangle \cup \langle 9, \infty\rangle$, g) $[-3, 3\rangle$

14. a) $A = \langle -2, -1\rangle \cup [0, 3]$, b) $A = \varnothing$ Conjunto Vacío
c) $A = \{0\} \cup \langle 1, 9\rangle$
d) $A = [0, 1\rangle \cup \langle 1/\sqrt{2}, \sqrt{3/2}] \cup \langle \sqrt{2}, \sqrt{3}]$
$= [0, \sqrt{3/2}] \cup \langle \sqrt{2}, \sqrt{3}]$

e) $A = \{-4\} \cup \langle -3, 0\rangle$

15. a) $\langle -\infty, -2] \cup \langle 3, \infty\rangle$, b) $[-1/2, -1/3] \cup [1/3, 1/2] \cup \{2\}$

16. TODAS

17. a) $\{-1, 0, 1, 2\}$, b) $\mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$

c) $\{\sqrt{8n+6} \ / \ n = 0,1,2,3,\ldots\} \cup \{\sqrt{8n} \ / \ n = 0,1,2,3,\ldots\}$

d) $[0, 1\rangle \cup (\langle 1, 2] \cup \langle 3, 4] \cup \langle 5, 6] \cup \langle 7, 8] \cup \ldots) =$

$= [0, 1\rangle \cup (\bigcup_{n=1}^{\infty} \langle 2n - 1, 2n])$

e) $\{\sqrt{14}, 4\}$. Vea el Ejercicio Propuesto [9] .

Ω Ω Ω Ω Ω

9

INECUACIONES EXPONENCIALES

1. ECUACIONES EXPONENCIALES

Sea $a > 0$ un número real positivo arbitrario, y sean $P(x)$ y $Q(x)$ funciones arbitrarias de la variable real x, entonces llamaremos una ECUACIÓN EXPONENCIAL a una ecuación de una de las dos formas:

$$a^{P(x)} = 1 \qquad \text{o} \qquad a^{P(x)} = a^{Q(x)}$$

Note que se puede expresar

$$a^{P(x)} = 1 \quad \text{como} \quad a^{P(x)} = a^{0} .$$

Estos dos tipos de ecuaciones exponenciales se resuelven en base a los dos teoremas siguientes.

1.1 TEOREMA .- Sea $a > 0$. Si x es una variable real, entonces la expresión a^x es ***siempre positiva, para todo*** $x \in \mathbb{R}$.

Es decir, si $a > 0$ entonces $\quad a^x > 0, \quad$ ***para todo*** $x \in \mathbb{R}$

1.2 TEOREMA .- Sea $a > 0$, $a \neq 1$, entonces

$$(1) \quad a^{P(x)} = a^{Q(x)} \Leftrightarrow P(x) = Q(x)$$

$$(2) \quad a^{P(x)} = 1 \Leftrightarrow P(x) = 0$$

$$(3) \quad 1^{P(x)} = 1 \text{ , } \textit{para toda expresión } P(x).$$

Por ejemplo, para resolver la ecuación

$$25^{x^2 - 7x + 3} = \sqrt{5^{3x^2 - 12x - 3}}$$

primero transformamos ambos miembros a expresiones que tengan la misma base:

$$(5^2)^{x^2 - 7x + 3} = (5^{3x^2 - 12x - 3})^{1/2} \Leftrightarrow$$

$$5^{2(x^2 - 7x + 3)} = 5^{(3x^2 - 12x - 3)/2} \Leftrightarrow$$

$$2(x^2 - 7x + 3) = (3x^2 - 12x - 3)/2 , \quad [\text{ por TEOREMA 1.2 }]$$

$$4(x^2 - 7x + 3) = 3x^2 - 12x - 3 \Leftrightarrow x^2 - 16x + 15 = 0$$

$$(x - 1)(x - 15) = 0 \Leftrightarrow x \in \text{C.S.} = \{1, 15\} .$$

1.3 EJERCICIO .- Resuelva: $2^{2x+2} - 6^x - 2(3^{2x+2}) = 0$

SOLUCIÓN .-

$$4(2^{2x}) - (2^x)(3^x) - 18(3^{2x}) = 0 \Leftrightarrow$$

$4a^2 - ab - 18b^2 = 0$ [haciendo $a = 2^x$, $b = 3^x$]

$(4a - 9b)(a + 2b) = 0 \Leftrightarrow [\, 4a = 9b \vee a = -2b \,]$ (***esta segunda igualdad es absurda pues por el TEOR. 1.1 :*** a ***y*** b ***son positivos***). ***Luego,***

$$4a = 9b \Leftrightarrow \frac{b}{a} = \frac{4}{9} \Leftrightarrow \frac{3^x}{2^x} = (\frac{2}{3})^2 = (\frac{3}{2})^{-2} \Leftrightarrow$$

$$(\frac{3}{2})^x = (\frac{3}{2})^{-2} \Leftrightarrow \boxed{x = -2} \quad (\text{ por el TEOREMA 1.2 }) .$$

1.4 EJERCICIO .- Resuelva: $5(\sqrt[x+2]{3125^{x+1}}) - \sqrt[x+3]{15625^{x+2}} = 0$

SOLUCIÓN .-

$$3125 = 5^5 , \; 15625 = 5^6 \; ; \quad 5(5^5)^{\frac{x+1}{x+2}} = (5^6)^{\frac{x+2}{x+3}} \Leftrightarrow$$

$$1 + 5(\frac{x+1}{x+2}) = 6(\frac{x+2}{x+3}) \Leftrightarrow \frac{6x+7}{x+2} = \frac{6(x+2)}{x+3} \Leftrightarrow \boxed{x = 3}$$

1.5 EJERCICIO .- Resuelva en $\mathbb{R}$: $(\sqrt{2})^{|x^2 - 3x + 2|} = 2^{x+1}$

SOLUCIÓN .- Pasando a la misma base $\sqrt{2}$ se tiene que la ecuación es equivalente a : $|x^2 - 3x + 2| = 2(x + 1) \Leftrightarrow$

$2(x + 1) \geq 0 \wedge [\, x^2 - 3x + 2 = 2(x + 1) \vee x^2 - 3x + 2 = -2(x + 1) \,]$

$$\Leftrightarrow \quad x \geq -1 \quad \wedge \quad [\ x^2 - 5x = 0 \quad \vee \quad x^2 - x + 4 = 0\ ] \qquad (\textit{Discriminante} < 0)$$

$$\Leftrightarrow \quad (x \geq -1) \quad \wedge \quad [\ x(x-5) = 0 \quad \vee \quad x \in \varnothing \ \text{(Vacío)}\ ]$$

$$\Leftrightarrow \quad x = 0 \quad \vee \quad x = 5\,. \qquad \therefore \quad \text{C.S.} = \{0, 5\}\,.$$

1.6 EJERCICIO .- Resuelva el siguiente sistema de ecuaciones simultáneas:

$$\begin{cases} 3^x - 2^{2y} = 77 \\ 3^{x/2} - 2^y = 7 \end{cases}$$

SOLUCIÓN .- De la segunda ecuación tenemos: $2^y = 3^{x/2} - 7$, y que reemplazando en la primera:

$$3^x - (2^y)^2 = 77 \quad \Leftrightarrow \quad 3^x - (3^{x/2} - 7)^2 = 77$$

$$\Leftrightarrow \quad 3^x - [\,3^x - 14(3^{x/2}) + 49\,] = 77 \quad \Leftrightarrow \quad 14(3^{x/2}) = 77 + 49$$

$$\Leftrightarrow \quad 3^{x/2} = 9 = 3^2 \quad \Leftrightarrow \quad x/2 = 2 \quad \Leftrightarrow \quad x = 4\ ;$$

y reemplazando este valor en la segunda ecuación: $3^2 - 2^y = 7 \quad \Rightarrow \quad y = 1$.
Por lo tanto, la solución del sistema es: $(x, y) = (4, 1)$.

1.7 EJERCICIO .- Resuelva:

$$4^{x-\sqrt{x^2-5}} - 12(2^{x-1-\sqrt{x^2-5}}) + 8 = 0\,.$$

SOLUCIÓN .- Haciendo $u = x - \sqrt{x^2-5}$:

$$(2^2)^u - 12(2^{u-1}) + 8 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2^{2u} - 12(\frac{2^u}{2}) + 8 = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$(2^u)^2 - 6(2^u) + 8 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (2^u - 4)(2^u - 2) = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$[\ 2^u = 4\,(=2^2) \quad \vee \quad 2^u = 2\,(=2^1)\,] \quad \Leftrightarrow \quad [\ u = 2 \quad \vee \quad u = 1\ ]$$
(a) (•) (b)

(a) Resolviendo: $u = 2 = x - \sqrt{x^2-5}$, sobre el Universo $U =$

$$U = \{\, x \,/\, x^2 - 5 \geq 0\ \} = (-\infty, -\sqrt{5}\,] \cup [\sqrt{5}, \infty)\,:$$

$$\sqrt{x^2-5} = x - 2 \Leftrightarrow \quad x \geq 2 \ \wedge \ x \in U \ \wedge \ [\,x^2 - 5 = (x-2)^2 = x^2 - 4x + 4\,]$$

$$\Leftrightarrow \quad x \geq 2 \ \wedge \ x \in U \ \wedge \ 4x = 9 \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{x = \frac{9}{4}}$$

(b) Resolviendo: $u = 1 = x - \sqrt{x^2-5}$, sobre el mismo Universo U de (a) :

$$\sqrt{x^2-5} = x - 1 \quad \Leftrightarrow \quad x \geq 1 \ \wedge \ x \in U \ \wedge \ [\,x^2 - 5 = (x-1)^2 = x^2 - 2x + 1\,]$$

$$\Leftrightarrow \quad x \geq 1 \ \wedge \ x \in U \ \wedge \ 2x = 6 \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{x = 3}$$

Por lo tanto, de (a) y (b) en (•): $x \in$ C.S. $= \{\frac{9}{4}, 3\}$.

SERIE DE EJERCICIOS

1. Resuelva las siguientes ecuaciones exponenciales:

   a) $5^{x+1} + 5^x = 750$ d) $2^{x+2} - 2^{x-1} = 28$

   b) $2^x - 2^{x-2} = 3$ e) $7^{x^2-4x+6} = 343$

   c) $7^x - 7^{x-1} = 6$. RPT: a) 3 ; b) 2 ; c) 1 ; d) 3 ; e) $\{1, 3\}$.

   Resuelva las siguientes ecuaciones:

2. $2(81^x) = 36^x + 3(16)^x$

3. $12(3^{\frac{1}{2x}}) - 3^{\frac{1}{x}} = 27$

4. $3^{4\sqrt{x}} = 4(3^{2\sqrt{x}}) - 3$. RPT: **(2)** $\frac{1}{2}$; **(3)** $\{\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\}$; **(4)** $\{0, \frac{1}{4}\}$.

   Resuelva los siguientes sistemas de ecuaciones exponenciales:

5. $5^{3x-2y} = 3125$
   $11^{6x-7y} = 14\,641$

6. $3^x 4^y = 3\,981\,312$
   $2^y 5^x = 400\,000$

7. $3^y x = 3^7$
   $x^y = 3^{12}$

8. $y^{\frac{x+1}{x-1}} = 16$
   $y^x = 64$

9. $\sqrt[x]{x+y} = 2$
   $(x+y)3^x = 279\,936$

10. $(3x+y)^{x-y} = 9$
    $\sqrt[x-y]{324} = 18x^2 + 12xy + 2y^2$.

    Resuelva las siguientes ecuaciones exponenciales:

11. $(\sqrt[4]{\sqrt{10}+3})^x - (\sqrt[4]{\sqrt{10}-3})^x = 12\sqrt{10}$. RPT: $x = 8$.

12. $(\sqrt{3+\sqrt{8}})^x + (\sqrt{3-\sqrt{8}})^x = 34$. RPT: $x = \pm 4$.

RPTS: **(5)** $(x, y) = (3, 2)$; **(6)** $(5, 7)$; **(7)** $(27, 4)$, $(81, 3)$;
(8) $(3, 4)$, $(-1/2, 1/4096)$; **(9)** $(7, 121)$; **(10)** $(5/4, -3/4)$, $(-1/4, -9/4)$

2. INECUACIONES EXPONENCIALES

Las inecuaciones exponenciales que analizaremos aquí son de los tipos siguientes:

$$a^{P(x)} > 1 \ , \quad a^{P(x)} \geq 1 \ , \quad a^{P(x)} < 1 \ , \quad a^{P(x)} \leq 1 \ , \quad \text{con} \quad a > 0\ ;$$

o más generalmente: $a^{P(x)} > a^{Q(x)}$, $a^{P(x)} \geq a^{Q(x)}$, y además con los simbolos $<$ y $\leq$, respectivamente.

La resolución de estas inecuaciones tienen como base los siguientes teoremas, donde además debemos recordar que en general:

$$u < v \quad \Leftrightarrow \quad v > u$$

2.1 TEOREMA .- Sea $a > 0$,

I) Si $a > 1$, entonces

1) $a^{P(x)} > a^{Q(x)} \quad \Leftrightarrow \quad P(x) > Q(x)$

2) $a^{P(x)} \geq a^{Q(x)} \quad \Leftrightarrow \quad P(x) \geq Q(x)$

Es decir, si $a > 1$, ***el sentido de la desigualdad se mantiene.***

II) Si $0 < a < 1$, entonces

1) $a^{P(x)} > a^{Q(x)} \quad \Leftrightarrow \quad P(x) < Q(x)$

2) $a^{P(x)} \geq a^{Q(x)} \quad \Leftrightarrow \quad P(x) \leq Q(x)$

Es decir que, en este caso, la desigualdad cambia de sentido.

2.2 TEOREMA .- Sea $a > 0$,

I) Si $a > 1$:

1) $a^{P(x)} > 1 \quad \Leftrightarrow \quad P(x) > 0$

2) $a^{P(x)} \geq 1 \quad \Leftrightarrow \quad P(x) \geq 0$

3) $a^{P(x)} < 1 \quad \Leftrightarrow \quad P(x) < 0$

4) $a^{P(x)} \leq 1 \quad \Leftrightarrow \quad P(x) \leq 0$ ...

II) Si $0 < a < 1$:

1) $a^{P(x)} > 1 \quad \Leftrightarrow \quad P(x) < 0$

2) $a^{P(x)} \geq 1 \quad \Leftrightarrow \quad P(x) \leq 0$

3) $a^{P(x)} < 1 \quad \Leftrightarrow \quad P(x) > 0$

4) $a^{P(x)} \leq 1 \quad \Leftrightarrow \quad P(x) \geq 0$

2.3 TEOREMA .- Sean $a > 0$, $b > 0$, y $\alpha \in \mathbb{R}$:

1) Si $\alpha > 0$: $a^{\alpha} < b^{\alpha} \quad \Leftrightarrow \quad a < b$

$a^{\alpha} \leq b^{\alpha} \quad \Leftrightarrow \quad a \leq b$

2) Si $\alpha = 0$: $a^{\alpha} = b^{\alpha} = 1$

3) Si $\alpha < 0$: $a^{\alpha} < b^{\alpha} \quad \Leftrightarrow \quad a > b$

$a^{\alpha} \leq b^{\alpha} \quad \Leftrightarrow \quad a \geq b$

2.4 EJERCICIO .- Resuelva: i) $(0.3)^{x+9} > (0.3)^{x^2-3x+4}$

ii) $2^{x^2-7,7x+17,5} \leq 16\sqrt{2}$

SOLUCIÓN .- Usando el Teorema (2.1) :

(i) $\overset{\text{¿?}}{\Leftrightarrow}$ $x + 9 < x^2 - 3x + 4 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - 4x - 5 > 0$

$\Leftrightarrow \quad (x-5)(x+1) > 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \in (-\infty, -1) \cup (5, \infty)$

(ii) : $2^{x^2-7,7x+17,5} \leq 2^{9/2}$ [pues $16\sqrt{2} = 2^{9/2}$]

$\Leftrightarrow \quad x^2 - 7,7x + 17,5 \leq 9/2 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - 7,7x + 13 \leq 0$

$\Leftrightarrow \quad 10x^2 - 77x + 130 = (2x-5)(5x-26) \leq 0$

$\Leftrightarrow \quad x \in [5/2 , 26/5] = \text{C.S.}$

2.5 EJERCICIO .- Resuelva: $\sqrt{(\frac{1}{9})^{2x^2-3x+5}} > (\text{Tan}\frac{\pi}{6})^{2x^2+4x+2}$.

SOLUCIÓN .- $\text{Tan}\frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}}$, $\frac{1}{9} = (\frac{1}{\sqrt{3}})^4$, luego :

$$(\frac{1}{9})^{\frac{2x^2-3x+5}{2}} > (\frac{1}{\sqrt{3}})^{2x^2+4x+2} \quad \Leftrightarrow$$

$$(\frac{1}{\sqrt{3}})^{4(\frac{2x^2-3x+5}{2})} > (\frac{1}{\sqrt{3}})^{2x^2+4x+2} \quad \Leftrightarrow$$

$2(2x^2 - 3x + 5) < 2x^2 + 4x + 2 \quad \Leftrightarrow \quad 2(x^2 - 5x + 4) < 0$

$2(x-1)(x-4) < 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \in \langle 1, 4 \rangle = \text{C.S.}$

2.6 EJERCICIO .- Resuelva: $1000\sqrt[x]{0.1} \geq 10^{2x}$.

SOLUCIÓN .- $10^3(10^{-1})^{1/x} \geq 10^{2x} \Leftrightarrow 10^{3-(1/x)} \geq 10^{2x} \Leftrightarrow$

$3-(1/x) \geq 2x \Leftrightarrow 2x+\frac{1}{x}-3 \leq 0 \Leftrightarrow \frac{2x^2-3x+1}{x} \leq 0$

$\frac{(2x-1)(x-1)}{x} \leq 0 \Leftrightarrow x \in \langle -\infty, 0\rangle \cup [1/2, 1] =$ C.S..

2.7 EJERCICIO .- Resuelva: $\frac{x-1}{\sqrt{3^{3x+1}}} - \frac{2x+5}{\sqrt{9^{x+5}}} > 0$

SOLUCIÓN .-

$3^{\frac{3x+1}{3(x-1)}} > 3^{\frac{2(x+5)}{2x+5}} \Leftrightarrow \frac{3x+1}{3(x-1)} > \frac{2(x+5)}{2x+5} \Leftrightarrow$

$\frac{3x+1}{3(x-1)} - \frac{2(x+5)}{2x+5} > 0 \Leftrightarrow \frac{(x-5)}{3(x-1)(2x+5)} < 0 \Leftrightarrow$

$x \in \langle -\infty, -5/2\rangle \cup \langle 1, 5\rangle =$ C.S.

2.8 EJERCICIO .- Resuelva: $25^{\sqrt{x-2}} - 5(5^{\sqrt{x-2}}) - 500 < 0$

SOLUCIÓN .-

Sea $a = \sqrt{x-2}$, entonces tenemos:

$5^{2a} - 5(5^2) - 500 < 0 \Leftrightarrow (5^a - 25)(5^a + 20) < 0 \overset{¿?}{\Leftrightarrow}$

$(5^a - 25) < 0 \Leftrightarrow 5^{\sqrt{x-2}} < 5^2 \Leftrightarrow \sqrt{x-2} < 2 \Leftrightarrow$

$[\, x \geq 2 \ \wedge \ (x-2) < 2^2 = 4 \,] \Leftrightarrow x \in [2, 6\rangle =$ C.S.

2.9 EJERCICIO .- Resuelva: $4^x \leq 3(2^{x+\sqrt{x}}) + 4^{1+\sqrt{x}}$ . . . (*)

SOLUCIÓN .- $3 = 2^2 - 1$:

$(*) \Leftrightarrow 2^{2x} \leq 2^{2+\sqrt{x}+x} - 2^{\sqrt{x}+x} + 2^{2+2\sqrt{x}} \Leftrightarrow$

$2^{2x} + 2^{\sqrt{x}+x} - 2^{2+\sqrt{x}+x} - 2^{2+2\sqrt{x}} \leq 0$

$\Leftrightarrow (2^x + 2^{\sqrt{x}})(2^x - 2^{2+\sqrt{x}}) \leq 0 \Leftrightarrow 2^x \leq 2^{\sqrt{x}+2}$

$\Leftrightarrow x \leq \sqrt{x}+2 \Leftrightarrow (\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+1) \leq 0$

$\Leftrightarrow \sqrt{x} \leq 2 \Leftrightarrow \boxed{0 \leq x \leq 4}$ (C.S.)

2.10 EJERCICIO .- Resuelva la inecuación :

$$(\sqrt{3+\sqrt{8}})^x + (\sqrt{3-\sqrt{8}})^x \leq 34$$

SOLUCIÓN .-

$(3+\sqrt{8})^{x/2} + (3+\sqrt{8})^{-x/2} \leq 34$ (¿por qué?)

multiplicamos ambos miembros por $a = (3+\sqrt{8})^{x/2}$, y luego pasamos todos los términos al primer miembro:

$a^2 - 34a + 1 \leq 0 \overset{?}{\Leftrightarrow} [a-(17-12\sqrt{2})][a-(17+12\sqrt{2})] \leq 0$

$\Leftrightarrow 17-12\sqrt{2} \leq a \leq 17+12\sqrt{2}$

$\Leftrightarrow (3-\sqrt{8})^2 \leq (3+\sqrt{8})^{x/2} \leq (3+\sqrt{8})^2$

$\Leftrightarrow (3+\sqrt{8})^{-2} \leq (3+\sqrt{8})^{x/2} \leq (3+\sqrt{8})^2$

$\Leftrightarrow -2 \leq x/2 \leq 2 \Leftrightarrow \boxed{-4 \leq x \leq 4} =$ C.S.

2.11 EJERCICIO .- Resuelva:

$$\left[\left(\frac{1}{81}\right)^{(x-1)(x+2)}\right]^{(x+1)} > \left[\left(\frac{1}{9}\right)^{x+1}\right]^{x^2-4}$$

SOLUCIÓN .- Esta inecuación es equivalente a la inecuación:

$2(x-1)(x+2)(x+1) < (x+1)(x^2-4) \Leftrightarrow x(x+1)(x+2) < 0$

$\Leftrightarrow x \in \langle -\infty, -2\rangle \cup \langle -1, 0\rangle =$ C.S.

2.12 EJERCICIO .- Resuelva: $\sqrt[x+1]{(0.16)^{x-1}} \leq \sqrt[2x-1]{(0.064)^{2x-4}}$

SOLUCIÓN .- La inecuación es equivalente a:

$0.4^{\frac{2(x-1)}{x+1}} \leq 0.4^{\frac{3(2x-4)}{2x-1}} \Leftrightarrow \frac{2(x-1)}{x+1} \geq \frac{6(x-2)}{2x-1}$

$\Leftrightarrow \frac{x-1}{x+1} - \frac{3(x-2)}{2x-1} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{-(x^2-7)}{(x+1)(2x-1)} \geq 0$

$\Leftrightarrow \frac{(x-\sqrt{7})(x+\sqrt{7})}{(x+1)(2x-1)} \leq 0$

$\Leftrightarrow x \in [-\sqrt{7}, -1\rangle \cup (\frac{1}{2}, \sqrt{7}\,] =$ C.S.

SERIE DE EJERCICIOS

1. $17^{2x-5} > 17^{5x-6}$, 2) $\dfrac{4^{2x-2}\cdot 4^{5-3x}}{4^{x+3}} \geq \dfrac{(4^{x+1})^{2x-3}}{4^{3x+1}}$

3. $2^{1-x^2}\,2^{2x} \geq 2^{-6}$, 5) $27^{2\sqrt{x}} \geq 4(3^{\sqrt{9x}}) - 3$

4. $5(3^{2x-1}) - 9^{x-(1/2)} \geq 9^x + 4(3^{2x-2}) - 81$

6. $\sqrt{4^{x(x-1)-(1/2)}} < \sqrt[4]{2}$, 7) $8\sqrt{(0.25)^{5-(x/2)}} \leq 2^{\sqrt{x-1}}$

8. $\sqrt[x+1]{4096} < 2\left(\sqrt[x+2]{32768}\right)$, 9) $(0.7)^{|x^2-3x+2|} \geq (0.49)^{x+1}$

10. $(0.8)^{|x^2-3x+2|} \geq (0.64)^{x+1}$, 11) $5^{5\sqrt{x}} \geq (5^{\sqrt{x}-4})^x$

12. $(0.5)\left[\sqrt[x+2]{(0.03125)^{x+1}}\right] < \sqrt[x+3]{(0.015625)^{x+2}}$

13. $2(2^{\sqrt{x}+3})^{\frac{1}{2\sqrt{x}}} \geq \sqrt{x} - \sqrt[4]{16}$

14. $\sqrt[x+2]{(\frac{1}{16})^{x-4}} \geq \sqrt[x+1]{(0.25)^{2x-4}}$

15. $3^{4\sqrt{x}} - 4(3^{2\sqrt{x}}) + 3 \leq 0$ 16. $\sqrt{9^{x(x+1)-(1/2)}} \geq \sqrt[4]{3}$

17. $4^{x+1} - 257 \leq -64/(4^x)$ 18. $3^{x+2} + 9^{x+1} < 810$

19. $150(5^{x+2}) - 25^{x+1} - 78125 \geq 0$

20. $100(10^x) \leq \sqrt[x]{1000^5}$

21. a) $x^x = x$, b) $x^x \leq x$, c) $x^x > x$

22. a) $x^{\sqrt{x}} = \sqrt{x^x}$, b) $x^{\sqrt{x}} < \sqrt{x^x}$

23. $(\operatorname{Tan}\frac{\pi}{3})^x - 6(\operatorname{Tan}\frac{\pi}{6})^x < 1$

24. $16^{\operatorname{Sen}^2 x} + 16^{\operatorname{Cos}^2 x} > 10$, $x \in [0, \pi]$

25. $4^{x-\sqrt{x^2-5}} - 12(2^{x-1-\sqrt{x^2-5}}) + 8 \leq 0$

26. $(\sqrt[4]{\sqrt{10}+3})^x - (\sqrt[4]{\sqrt{10}-3})^x > 12\sqrt{10}$

27. Demuestre que el Conjunto Solución de: $8x^4 - \sqrt{|x|} + 13 \geq 0$
es TODO $\mathbb{R} = \langle -\infty, \infty \rangle$.

SUG: Analice los casos a) $|x| < 1$ y b) $|x| \geq 1$.

28. Resuelva la inecuación:

$$\sqrt[3]{\frac{5-\sqrt{|x|}}{x^4+1}} + 2 \geq 0$$

SUG: Esta inecuación es equivalente a la del Ejercicio [27] previo (¿?).

CLAVE DE RESPUESTAS

1. $x < 1/3$, 2. $[-1, 2]$, 3. $[1-\sqrt{8}, 1+\sqrt{8}]$,
4. $x \leq 3$, 5. $\{0\} \cup [1/9, \infty\rangle$, 6. $\langle -1/2, 3/2\rangle$,
7. $[1, 4\rangle \cup [4, 10] = [1, 10]$, 8. $\langle -\infty, -7\rangle \cup \langle -2, -1\rangle \cup \langle 1, \infty\rangle$,
9. $0 \leq x \leq 5$, 10. $\langle -\infty, 0\rangle \cup \langle 5, \infty\rangle$, 11. $[0, 25]$,
12. $\langle -3, -2\rangle \cup \langle 3, \infty\rangle$, 13. $\langle 0, 1\rangle \cup [9, \infty\rangle$,
14. $\langle -2, -1\rangle \cup [0, \infty\rangle$, 15. $0 \leq x \leq 1/4$,
16. $\langle -\infty, -3/2\,] \cup [1/2, \infty\rangle$, 17. $-1 \leq x \leq 3$,
18. $x < 2$, 19. $2 \leq x \leq 3$, 20. $\langle -\infty, -5] \cup \langle 0, 3]$,
21. a) $x = 1$, b) $x = 1$, c) $\forall\, x > 0$, con $x \neq 1$: $\langle 0, 1\rangle \cup \langle 1, \infty\rangle$
22. a) $x = 4$, b) $\langle 0, 1\rangle \cup \langle 4, \infty\rangle$; 23. $x < 2$,
24. $x \in \left\langle \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3} \right\rangle \cup \left\langle \frac{2\pi}{3}, \frac{5\pi}{6} \right\rangle$, 25. $x \in [9/4, 3]$,
26. $x > 8$;
27. a) $|x| < 1 \Rightarrow 0 \geq -|x| \geq -\sqrt{|x|} > -1$, luego, $\forall\, |x| < 1$:

$$8x^4 - \sqrt{|x|} + 13 > 8x^4 - 1 + 13 = 8x^4 + 12 > 0$$

Así, C.S. (a): $|x| < 1$, es decir: $\langle -1, 1\rangle$.

b) $|x| \geq 1 \Rightarrow x^4 \geq x^2 \geq |x|$, luego, $\forall\, |x| \geq 1$:

$$8x^4 - \sqrt{|x|} + 13 \geq 8|x| - \sqrt{|x|} + 13 = 8(|x|+1) + 5 - \sqrt{|x|}$$

¿por qué? $\geq 8(2\sqrt{|x|}) + 5 - \sqrt{|x|} = 15\sqrt{|x|} + 5 > 0$

Así, C.S. (b): $|x| \geq 1$, es decir $\langle -\infty, -1] \cup [1, \infty\rangle$.

$\therefore$ C.S. = (a) $\cup$ (b) $= \mathbb{R}$.

28. C.S. $= \langle -\infty, -1] \cup [1, \infty\rangle \cup \langle -1, 1\rangle = \langle -\infty, \infty\rangle = \mathbb{R}$.

Ω Ω Ω Ω Ω

10

RELACIONES

1. PARES ORDENADOS. PRODUCTO CARTESIANO

Los pares ordenados son entes matemáticos que consisten de dos elementos a y b, a los cuales se les denomina PRIMERA COMPONENTE y SEGUNDA COMPONENTE respectivamente, y se les denota por (a, b).

1.1 DEFINICIÓN .- Un par ordenado (a, b) se define en términos de conjuntos:

$$(a, b) = \{\{a\}, \{a, b\}\}$$

1.2 TEOREMA .- (IGUALDAD DE PARES ORDENADOS).- Dos pares ordenados (a, b) y (c, d) ***son iguales*** si y sólo si sus primeras componentes son iguales: $a = c$, así como también sus segundas componentes: $b = d$, simultáneamente. Es decir,

$$(a, b) = (c, d) \quad \Leftrightarrow \quad [\, a = c \quad \wedge \quad b = d \,]$$

1.3 EJEMPLOS .-

a) Los pares ordenados $(3, 2)$ y $(2, 3)$ no son iguales pues sus primeras componentes son 3 y 2 respectivamente; tampoco son iguales sus segundas componentes.

b) Los pares ordenados $(4, 2)$ y $(4, 4)$ no son iguales pues sus segundas componentes son diferentes.

c) Como una aplicación del TEOREMA 1.2 tenemos que son iguales los pares ordenados $(3x + 2y, -5) = (11, 3x - 2y)$ si y sólo si:

$$[\, 3x + 2y = 11 \quad \wedge \quad -5 = 3x - 2y \,]$$

$$\Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} 3x + 2y = 11 \\ 3x - 2y = -5 \end{array}\right] \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} 6x = 6 \\ \end{array}\right] \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ y = 4 \end{array}\right]$$

1.4 PRODUCTO CARTESIANO $A \times B$

Dados dos conjuntos A y B se define el PRODUCTO CARTESIANO $A \times B$ como el conjunto

$$A \times B = \{\, (a, b) \;/\; a \in A \quad y \quad b \in B \,\}$$

Este es un conjunto de pares ordenados (a, b) cuyas primeras componentes se encuentran en el conjunto A, y sus segundas componentes en el conjunto B.

1.5 EJEMPLO .- Sean $A = \{1, 3, 5\}$, $B = \{r, s\}$, entonces

$$\begin{aligned} A \times B &= \{\, (a, b) \;/\; a \in A \quad \wedge \quad b \in B \,\} \\ &= \{\, (a, b) \;/\; a \in \{1, 3, 5\} \quad \wedge \quad b \in \{r, s\} \,\} \\ &= \{\, (1, r), (1, s), (3, r), (3, s), (5, r), (5, s) \,\} \end{aligned}$$

cuyos elementos (pares ordenados) pudieron haberse distribuido como en el siguiente diagrama llamado DIAGRAMA DE ÁRBOL :

A	B		A × B
1	r	→	(1 , r)
	s	→	(1 , s)
3	r	→	(3 , r)
	s	→	(3 , s)
5	r	→	(5 , r)
	s	→	(5 , s)

Obteniéndose así un total de $3 \times 2 = 6$ elementos.

1.6 NOTA .- Si los conjuntos A y B son finitos y tienen m y n elementos respectivamente, entonces el Producto Cartesiano $A \times B$ tiene $m \times n$ elementos. De aquí proviene su nombre y su notación.

1.7 NOTA .- Si al menos uno de los conjuntos A ó B es vacío entonces $A \times B = \varnothing$, es también vacío.

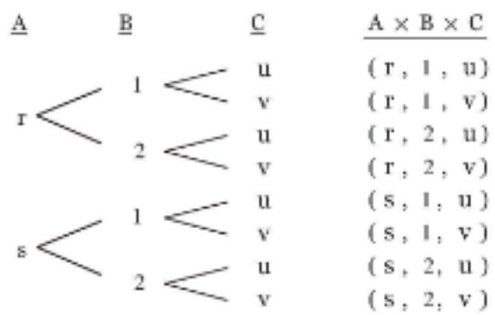
El concepto de Producto Cartesiano se puede extender a 3 ó más conjuntos:

$$A \times B \times C = \{\, (a, b, c) \;/\; a \in A \quad \wedge \quad b \in B \quad \wedge \quad c \in C \,\}$$

extendiendo el concepto de pares ordenados al de TERNAS ORDENADAS donde

$$(a, b, c) = \{\{a\}, \{a, b\}, \{a, b, c\}\}$$

1.8 EJEMPLO .- Si $A = \{r, s\}$, $B = \{1, 2\}$, $C = \{u, v\}$, los elementos de $A \times B \times C$ se obtienen mediante el diagrama de árbol siguiente:



Obteniéndose un total de $2 \times 2 \times 2 = 8$ elementos en $A \times B \times C$.

1.9 NOTA .- El Producto Cartesiano en general no es conmutativo. Es decir $A \times B \neq B \times A$, a menos que $B = A$. Por ejemplo, si $A = \{1\}$, $B = \{2\}$ entonces $A \times B = \{(1, 2)\}$ y $B \times A = \{(2, 1)\}$.

1.10 EJERCICIO .- Demuestre que:

1) $M \subset A \ \wedge \ N \subset B \ \Rightarrow \ M \times N \subset A \times B$
2) $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$
3) $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$

PRUEBA DE (1) :

Sea $(a, b) \in M \times N \ \Rightarrow \ a \in M \ \wedge \ b \in N \ \Rightarrow$
$a \in A$ (pues $M \subset A$) $\wedge \ b \in B$ (pues $N \subset B$) $\Rightarrow (a, b) \in A \times B$
Por lo tanto, $M \times N \subset A \times B$.

PRUEBA DE (2) : Sea $(a, b) \in A \times (B \cap C) \Leftrightarrow a \in A \ \wedge \ b \in (B \cap C)$
$\Leftrightarrow \ a \in A \ \wedge \ (b \in B \ \wedge \ b \in C) \Leftrightarrow (a \in A \ \wedge \ a \in A) \ \wedge \ (b \in B \ \wedge \ b \in C) \Leftrightarrow (a \in A \ \wedge \ b \in B) \ \wedge \ (a \in A \ \wedge \ b \in C) \Leftrightarrow$
$(a, b) \in A \times B \ \wedge \ (a, b) \in A \times C \Leftrightarrow (a, b) \in (A \times B) \cap (A \times C)$.
La prueba de (3) queda como ejercicio.

1.11 EJERCICIO .- Demuestre que si A' = Complemento de A, entonces
$(A \times B)' = (A' \times B) \cup (A \times B') \cup (A' \times B')$

SOLUCIÓN .-

Sea $(a, b) \subset (A \times B)' \Leftrightarrow (a, b) \not\in A \times B \Leftrightarrow \sim[(a, b) \subset A \times B]$
$\equiv \sim[a \in A \ \wedge \ b \in B] \equiv \sim(a \in A) \ \vee \ \sim(b \in B) \equiv$
$[\sim(a \in A) \ \wedge \ (b \in B \ \vee \ b \in B')] \ \vee \ [(a \in A \ \vee \ a \in A') \ \wedge \ \sim(b \in B)]$
(pues $p \equiv p \wedge V$) ,
$\equiv [a \in A' \ \wedge \ (b \in B \ \vee \ b \in B')] \ \vee \ [(a \in A \ \vee \ a \in A') \ \wedge \ b \in B'] \equiv$
$(a \subset A' \wedge b \subset B) \vee (a \subset A' \wedge b \subset B') \vee (a \subset A \wedge b \subset B') \vee (a \subset A' \wedge b \subset B')$
$\Leftrightarrow \ (a, b) \in (A' \times B) \cup (A' \times B') \cup (A \times B') \cup (A' \times B')$
$\Leftrightarrow \ (a, b) \in (A' \times B) \cup (A \times B') \cup (A' \times B')$.

1.12 NOTA .- Al Producto Cartesiano $A \times A$ también se le representa por A^2 .

2. RELACIONES. TIPOS DE RELACIONES

Sean A y B dos conjuntos. Un conjunto R de pares ordenados se llama una **RELACIÓN DE A EN B** si R es un subconjunto cualquiera de $A \times B$.

$$R \text{ es una } \textbf{Relación de } A \textbf{ en } B \ \Leftrightarrow \ R \subset A \times B$$

Una RELACIÓN de A en B es también llamada una RELACIÓN BINARIA.

2.1 EJEMPLO .- Sean $A = \{3, 4, 5\}$, $B = \{1, 2\}$. Los siguientes conjuntos de pares ordenados son algunas RELACIONES de A en B :

$R_1 = \{(3, 1)\}$, $R_2 = \{(5, 2)\}$, $R_3 = \{(3, 1), (4, 2), (5, 2)\}$
$R_4 = \{(3, 1), (3, 2), (4, 1), (4, 2)\}$, $R_5 = A \times B$, mientras que
$R_6 = \{(3, 2), (4, 1), (2, 1)\}$ no lo es, pues el par $(2, 1) \not\in A \times B$, ya que $2 \not\in A$.

Puesto que en general, si $A \times B$ tiene n elementos entonces $A \times B$ tiene 2^n subconjuntos; por lo tanto, existen 2^n relaciones de A en B .

Cuando un elemento (a, b) pertenece a una relación R se denota $a \ R \ b$:

$$a \ R \ b \ \Leftrightarrow \ (a, b) \in R$$

y se lee " a está relacionado con b según la relación R ".

Para las relaciones dadas en el Ejemplo 2.1 : $3 \ R_1 \ 1$, $4 \ R_3 \ 2$, $5 \ R_2 \ 2$, etc.

Si $(a, b) \not\in R$ también denota $a \not R \ b$, y se dice que " a no está relacionado con b , según la relación R ".

2.2 DEFINICIÓN .- Se dice que un conjunto R es una **RELACIÓN EN A** si $R \subset A \times A$.

2.3 EJEMPLO .- Si R es una relación en $A = \{2, 3, 9\}$ tal que

$$R = \{ (x, y) \in A \times A \ / \ y + 1 \leq x^2 \} \quad \text{entonces}$$

$$R = \{(2, 2), (2, 3), (3, 2), (3, 3), (9, 2), (9, 3), (9, 9)\},$$

pues para $(x, y) \in A \times A$, con $x \in A \ \wedge \ y \in A$:

$x = 2$: $y + 1 \leq 2^2 = 4 \ \Rightarrow \ y \in \{2, 3\} \ \Rightarrow \ (2, 2), (2, 3) \in R$
$x = 3$: $y + 1 \leq 3^2 = 9 \ \Rightarrow \ y \in \{2, 3\} \ \Rightarrow \ (3, 2), (3, 3) \in R$

$x = 9$: $y + 1 \leq 9^2 = 81 \Rightarrow y \in \{2,3,9\} \Rightarrow (9,2),(9,3),(9,9) \in R$

2.4 EJERCICIO .- Sea $A = \{1,2,3,4\}$. Dadas las relaciones R_1 y R_2 en A:

$$R_1 = \{(x,y) / x < y\}, \qquad R_2 = \{(x,y) / x + y = 5\},$$

halle: a) El número de pares ordenados de $R_1 \cup R_2$; b) $R_2 - (R_1 \cap R_2)$

SOLUCIÓN .- Como $R_1 \subset A \times A$ y $R_2 \subset A \times A$, entonces

$R_1 = \{(x,y) / x < y\} = \{(1,2),(1,3),(2,3),(1,4),(2,4),(3,4)\}$

$R_2 = \{(x,y) / x + y = 5\} = \{(1,4),(2,3),(3,2),(4,1)\}$

a) Vemos que el número de elementos de $R_1 \cup R_2$ es 10.

b) $R_1 \cap R_2 = \{(1,4),(2,3)\} \Rightarrow R_2 - (R_1 \cap R_2) = \{(3,2),(4,1)\}$

2.5 PROBLEMA .- Sean $A = \{1,2,3,4,5,6\}$ y la relación R en A definida por

$$(x,y) \in R \Leftrightarrow x \text{ es divisor de } y.$$

Halle el número $n(R)$ de elementos de la relación R.

SOLUCIÓN .- $(x,y) \in R \Leftrightarrow y$ es múltiplo de x. Así tenemos que $(1,1),(1,2),(2,4),(2,6),(3,6),\ldots \in R$. En general

$R = \{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6),(2,2),(2,4),(2,6),(3,3),$
$(3,6),(4,4),(5,5),(6,6)\}$. Así, $n(R) = 14$.

2.6 EJERCICIO .- Se define en $\mathbb{Z}$ (enteros) la relación R por:

$$a \, R \, b \Leftrightarrow a - b \text{ es múltiplo de } 3.$$

Demuestre que 1) $\forall\, a \in \mathbb{Z}$, $(a,a) \in R$

2) $(a,b) \in R \Rightarrow (b,a) \in R$

3) $(a,b) \in R \wedge (b,c) \in R \Rightarrow (a,c) \in R$.

SOLUCIÓN .- $a - b$ es múltiplo de $3 \Leftrightarrow a - b = 3k$, algún $k \in \mathbb{Z}$.

1) $\forall\, a \in \mathbb{Z}$, $a - a = 0 = 3 \times 0$, con $0 \in \mathbb{Z} \Rightarrow (a,a) \in R$.

2) $(a,b) \in R \Rightarrow a - b = 3k$, algún $k \in \mathbb{Z}$
$\Rightarrow (b - a) = 3(-k)$, donde $-k \in \mathbb{Z}$, pues $k \in \mathbb{Z}$
$\Rightarrow (b,a) \in R$

3) $(a,b) \in R \wedge (b,c) \in R \Rightarrow a - b = 3k_1$, algún $k_1 \in \mathbb{Z}$
$\Rightarrow b - c = 3k_2$, algún $k_2 \in \mathbb{Z}$
$\Rightarrow$ (sumando) $a - c = 3k_3 = 3(k_1 + k_2)$
$\Rightarrow (a,c) \in R$, pues $k_3 = k_1 + k_2 \in \mathbb{Z}$.

TIPOS DE RELACIONES

2.7 RELACIONES REFLEXIVAS

Un conjunto R de pares ordenados es una RELACIÓN REFLEXIVA EN A si para todo $a \in A$: $(a,a) \in R$.

Así, una relación es REFLEXIVA si todo elemento de A está relacionado consigo mismo, según esta relación R.

2.8 EJEMPLO .- Sean $A = \{1,2,3,4\}$ y las relaciones en A:

$R_1 = \{(1,1),(2,1),(3,3),(3,4),(4,4),(4,1),(2,2)\}$

$R_2 = \{(1,1),(2,2),(3,4),(4,3),(4,4)\}$

entonces R_1 es reflexiva en A pues $(a,a) \in R_1$, ***para todo elemento*** $a \in A$, además de otros pares. En cambio, R_2 no es reflexiva en A, pues le falta el par $(3,3)$ para serlo.

2.9 EJEMPLO .- Sea $T = \{$ Triángulos del Plano Euclidiano $\}$. La relación R en T definida por: $\underline{a}\ R\ \underline{b} \Leftrightarrow$ " $\underline{a}$ es semejante a $\underline{b}$ " (es decir, los triángulos $\underline{a}$ y $\underline{b}$ son congruentes), es una Relación Reflexiva pues todo triángulo es semejante a sí mismo.

2.10 EJEMPLO .- Sea A una familia de Conjuntos. La relación R en A definida por: " $\underline{a}\ R\ \underline{b} \Leftrightarrow \underline{a}$ es subconjunto de $\underline{b}$ ", es una relación reflexiva en A, pues $a \subset a$, $\forall\, a \in A$.

2.11 RELACIONES SIMÉTRICAS

Dada una relación R en un conjunto A, se dice que R es una RELACIÓN SIMÉTRICA EN A si: $(a,b) \in R \Rightarrow (b,a) \in R$.

Es decir, si (a,b) está en la relación R, también (b,a) debe estar en R.

2.12 EJEMPLO .- Dado $A = \{1,2,3,4\}$ y las relaciones en A:

$R_1 = \{(1,2),(2,3),(4,2),(3,2),(2,1),(2,4)\}$,

$R_2 = \{(1,1),(2,2),(3,3)\}$,

$R_3 = \{(1,1),(3,3),(4,1),(2,3),(1,4)\}$,

vemos que R_1 y R_2 son Simétricas en A, pero que R_3 no lo es pues le falta al menos el par $(3,2)$ para ello.

2.13 EJEMPLO .- Sea $T = \{$ Triángulos en el Plano Euclidiano $\}$. La relación R definida por: $\underline{a}\ R\ \underline{b} \Leftrightarrow$ " $\underline{a}$ es semejante a $\underline{b}$ ",

es Simétrica en T, pues si el triángulo a es semejante al triángulo b entonces se cumple que " el triángulo b es semejante al triángulo a ".

2.14 EJEMPLO .- Sea $\mathbb{Z}^+$ el conjunto de enteros positivos. La relación definida por " a es divisor de b " NO ES SIMÉTRICA EN A, ya que si bien 3 es divisor de 6, sin embargo 6 no es divisor de 3.

2.15 RELACIONES TRANSITIVAS

Una relación R en un conjunto A es **TRANSITIVA EN** A si :

$$[\ (a,b) \in R \ \wedge \ (b,c) \in R\ ] \ \Rightarrow \ (a,c) \in R .$$

2.16 EJEMPLO .- Dado $A = \{1,2,3,4\}$, la relación $R = \{(1,2),(2,3),(1,3),(3,1),(1,1),(4,4)\}$ **no es** transitiva en A, pues si bien se cumple que :

$$(1,2) \in R \ \text{ y } \ (2,3) \in R \ \Rightarrow \ (1,3) \in R$$
$$(1,3) \in R \ \text{ y } \ (3,1) \in R \ \Rightarrow \ (1,1) \in R$$
$$(4,4) \in R \ \text{ y } \ (4,4) \in R \ \Rightarrow \ (4,4) \in R$$

en cambio falla en: $(2,3) \in R$ y $(3,1) \in R \not\Rightarrow (2,1) \in R$, ya que $(2,1) \notin R$.

Con respecto a las siguientes relaciones en A, tenemos que:

$R_1 = \{(1,2),(2,1),(2,2),(1,1)\}$ si es Transitiva,

$R_2 = \{(1,4),(4,1),(2,4),(3,4),(4,3)\}$ no es Transitiva pues le faltan por lo menos 7 pares para serlo. ¿Cuáles son?

RPTA: Son: $(1,1),(2,1),(3,1),(1,3),(2,3),(3,3)$, y $(4,4)$.

2.17 EJEMPLO .- La relación R definida en $\mathbb{R}$ (números reales) por: " $a < b$ " ***es una relación transitiva*** pues por la Propiedad Transitiva en $\mathbb{R}$ se tiene que: si $a < b$ y $b < c$ entonces $a < c$.

Asimismo, la relación en $\mathbb{R}$ definida por " $a \leq b$ " también es Transitiva.

2.18 EJEMPLO .- Sea A una familia de conjuntos. La relación definida en A por: " $A \subset B$ " ***es una relación Transitiva en*** A, pues:

$$A \subset B \ \text{ y } \ B \subset C \ \Rightarrow \ A \subset C .$$

2.19 RELACIONES DE EQUIVALENCIA

Una relación R en un conjunto A es una RELACIÓN DE EQUIVALENCIA si simultáneamente satisface que es:

1) Reflexiva : $\forall\ a \in A\ , \quad (a,a) \in R$
2) Simétrica : $(a,b) \in R \ \Rightarrow \ (b,a) \in R$
3) Transitiva : $[\ (a,b) \in R \ \wedge \ (b,c) \in R\ ] \ \Rightarrow \ (a,c) \in R$

2.20 EJEMPLO .- Sea $A = \{1,2,3,4\}$; la relación $R = \{(1,1),(2,1),(1,2),(2,2),(3,3),(4,4)\}$ es una Relación de Equivalencia en A pues es Reflexiva, es Simétrica y es Transitiva en A.

2.21 EJEMPLO .- La relación R en $\mathbb{Z}$ (enteros) definida por:

$$R = \{\ (a,b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \ / \ \ (a-b) \text{ es múltiplo de } 3\ \}\ ,$$

es una Relación de Equivalencia, lo cual ya fue probado en el Ejercicio (2.6).

2.22 EJERCICIO .- Se definen las siguientes relaciones en $\mathbb{Z}$:

$R_1 = \{(x,y) \ / \ (xy)^2 \text{ es par}\}$, $R_2 = \{(x,y) \ / \ x + y^2 = y + x^2\}$,

$R_3 = \{(x,y) \ / \ x \leq y\}$.

De las siguientes afirmaciones, ¿Cuáles son verdaderas? :

a) R_1 y R_2 son reflexivas
b) R_2 es simétrica y R_3 no es simétrica
c) R_2 es transitiva,
d) R_3 es transitiva.

RPTA: Son verdaderas: (b), (c) y (d). Es falsa (a).

SOLUCIÓN .-

1) Análisis de $R_1 = \{(x,y) \ / \ (xy)^2 \text{ es par}\}$: si consideramos por ejemplo $x = 5 \in \mathbb{Z}$ entonces $(x,x) \notin R_1$ pues $(xx)^2 = x^4 = 5^4 = 625$ es impar. Por lo tanto R_1 NO ES REFLEXIVA, de modo que la afirmación (a) es FALSA, aún cuando la relación R_2 sí resulta ser REFLEXIVA pues $(x,x) \in R_2$, $\forall\ x \in \mathbb{Z}$, debido a que: $x + x^2 = x + x^2$.

2) Análisis de $R_2 = \{(x,y) \ / \ x + y^2 = y + x^2\}$:

R_2 ES SIMÉTRICA: sea $(x,y) \in R_2 \ \Rightarrow \ x + y^2 = y + x^2 \ \Rightarrow$

$$y + x^2 = x + y^2 \ \Rightarrow \ (y,x) \in R_2$$

R_2 ES TRANSITIVA: sea $(x,y) \in R_2 \ \wedge \ (y,z) \in R_2 \ \Rightarrow$

$$\Rightarrow \quad \begin{array}{l} x + y^2 = y + x^2 \\ \underline{y + z^2 = z + y^2} \end{array}$$

$$\Rightarrow \quad x + y + y^2 + z^2 = y + z - x^2 + y^2$$

$$\Rightarrow \quad x + z^2 = z + x^2 \quad \Rightarrow \quad (x,z) \in R_2$$

Además sabemos que R_3 NO ES SIMÉTRICA [$(4,5) \in R_3$, pero $(5,4) \notin R_3$] pero si ES TRANSITIVA, de modo que las afirmaciones (b), (c), y (d) son Verdaderas.

2.23 EJERCICIO .- Dada la relación R definida en los Números Reales:

$$R = \{ (x,y) / \ |x-y| \leq 4 \},$$

¿Cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas? :

a) R es reflexiva
b) R es simétrica
c) R es transitiva
c) R no es de Equivalencia

RPTA: Son Verdaderas (a) , (b) y (d) solamente.

SOLUCIÓN .- a) Como $|x-x| = 0 \leq 4$, entonces $(x,x) \in R$, $\forall\, x \in R$ por lo tanto, R es reflexiva, y (a) es Verdadera.

b) Sea $(x,y) \in R$, entonces $|x-y| \leq 4$

$$\Rightarrow \quad |y-x| = |x-y| \leq 4 \quad \Rightarrow$$

$|y-x| \leq 4 \quad \Rightarrow \quad (y,x) \in R \quad \Rightarrow$ R es Simétrica.

Por lo tanto, (b) es verdadera.

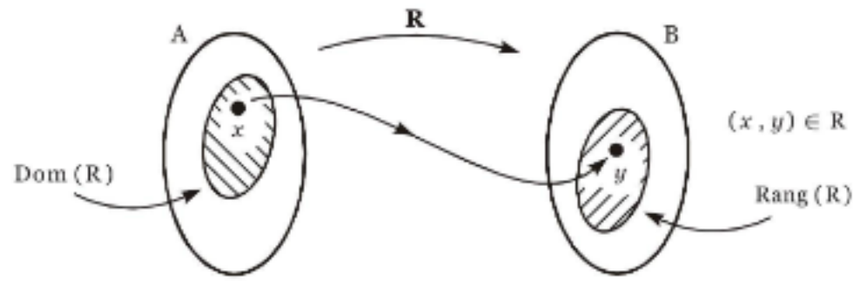
c) La afirmación: " R ***es Transitiva*** " es FALSA: consideremos los pares
$(x,y) = (6,3) \in R$ [pues $|6-3| = 3 \leq 4$] ,
$(x,y) = (3,1) \in R$ [pues $|3-1| = 2 \leq 4$] ,
sin embargo, $(6,1) \notin R$ [pues $|6-1| = 5 \not\leq 4$] .

d) Como R no es transitiva entonces no es una relación de Equivalencia.
Por lo tanto, (d) es Verdadera.

2.24 DOMINIO Y RANGO DE UNA RELACIÓN

Sea R una relación de A en B; es decir, $R \subset A \times B$. Se llama DOMINIO DE LA RELACIÓN R al conjunto de todas las primeras componentes de los pares ordenados de R. Y se llama RANGO DE LA RELACIÓN R al conjunto de todas las segundas componentes de los pares ordenados de R.

Note que $\text{Dom}(R) = \{ x / \ (x,y) \in R \} \subset A$
$\text{Rang}(R) = \{ y / \ (x,y) \in R \} \subset B$



Al conjunto A se le llama CONJUNTO DE PARTIDA de la relación R , y al conjunto B se le llama CONJUNTO DE LLEGADA.

2.25 EJEMPLO .- Sea $R = \{(1,1),(2,1),(2,3),(3,1),(3,2),(4,1),(4,2),(5,3)\}$, entonces $\text{Dom}(R) = \{1,2,3,4,5\}$ y $\text{Rang}(R) = \{1,2,3\}$.

2.26 EJEMPLO .- Dados los conjuntos $A = \{1,3,5\}$ y $B = \{2,4,6\}$, se definen las relaciones: $R_1 = \{(x,y) \in A \times B / \ x+y = 7 \}$,
$R_2 = \{(x,y) \in A \times B / \ y = 6 \}$.

Halle la suma S de todos los elementos de $\text{Dom}(R_1 - R_2) \cup \text{Rang}(R_1 - R_2)$.

SOLUCIÓN .- $R_1 = \{(1,6),(3,4),(5,2)\}$, $R_2 = \{(1,6),(3,6),(5,6)\}$,
$R_1 - R_2 = \{(3,4),(5,2)\}$, $\text{Dom}(R_1 - R_2) = \{3,5\}$,
$\text{Rang}(R_1 - R_2) = \{2,4\}$. Luego, $S = 3+5+2+4 = 14$.

SERIE DE EJERCICIOS

1. Demuestre que: $(A - B) \times C = (A \times C) - (B \times C)$.
2. ¿Cuántos elementos tiene $A \times B$ si
$A = \{ x \in \mathbb{Z} / \ -12 < x+6 < 20 \}$,
$B = \{ x \in \mathbb{Z} / \ 10 < x^2 < 400 \}$?.
3. Halle por extensión el conjunto
$M = \{ (s,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} / \ (s^2+3s, t^2-7t) = (-2,-12) \}$.
4. En $A = \{1,2,3,4,5\}$ se define la relación $R = \{(1,1),(2,2),(3,3),(5,1),(2,4),(5,4),(5,2),(4,3),(3,5)\}$. Si $M = \{x \in A / \ (x,2) \in R\}$, $N = \{y \in A / \ (3,y) \in R\}$, $P = \{x \in A / \ (x,5) \notin R\}$, halle: $(M \cup N) - P$.
5. Si $A = \{3,4,5,6,7,8,9,10\}$, entonces dada la relación $R = \{ (x,y) / \ y$ es múltiplo de x, $x \neq y \} \subset A \times A$, halle la suma de todos los elementos del $\text{Dom}(R)$.
6. Dadas las relaciones en $\mathbb{Z}$: $R_1 = \{ (x,y) / \ x^2 - 2y = 3 \}$ y $R_2 = \{(x,y) / \ x < y \ \vee \ x > y \}$, halle la relación $R_1 - R_2$.
SUG: $\complement(R_2) = \{ (x,y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} / \ x = y \}$.
7. Dado el Universo $U = \{1,2,3,4\}$, y las relaciones $R_1 = \{(x,y) / \ x = y \}$, $R_2 = \{ (x,y) / \ y = 3 \}$, $R_3 = \{ (x,y) / \ x \leq y \}$, halle la relación $R_3 - (R_1 \cup R_2)$.
8. Dados $A = \{x \in \mathbb{N} / \ x < 3 \}$, $B = \{x \in \mathbb{N} / \ x$ es par y $x < 5 \}$, $C = \{x \in \mathbb{N} / \ x$ es impar, $x \leq 6 \}$, halle el conjunto $(A \cap B) \times (C - A)$.

9. En $A = \mathbb{Z}$ definimos T: $(x,y) \in T \Leftrightarrow x - y$ es divisible por 5, ¿cuáles son Verdaderas?:
   a) $(x,y) \in T \Rightarrow (y,x) \in T$. b) $(x,4) \in T \Rightarrow x$ es múltiplo de 5.
   c) $(2,17) \in T$, d) $(7n, -8n) \in T$, $\forall n \in \mathbb{Z}$.

10. Sea $U = \{1,2,3,4,5\}$ y $R_1 = \{(x,y) / x < y\}$, $R_2 = \{(x,y) / x + y = 5\}$ dos relaciones en U; halle $n(R_1 \cup R_2)$.

11. Si $A = \{(x,y) / (x^2 + 3x, y^2 + 3y - 2) = (-2, 2x)\} \subset \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, $B = \{(x,y) / y = x, x \in \mathbb{Z}\}$, halle: $A - B$.

12. Dado el conjunto $A = [1,8] \cap \mathbb{Z}$, se define la relación $R \subset A \times A$ como: $(a,b) \Leftrightarrow a$ es divisor de b. Halle $n(R)$.

13. Sean $A = \{a,b,c\}$, $B = \{a,b,d,e\}$, ¿Cuántos subconjuntos tiene $(A \times B) - (B \times A)$?.

14. ¿Cuáles de las siguientes afirmaciones son Verdaderas?:
   a) $A \subset A \times A$, $\forall A$; b) $A \times B \subset (A \times B) \cup C$
   c) $(A \times B) \cup (C \times D) = (A \cup C) \times (B \cup D)$
   d) $(A - B) \times (C - D) = (A \times C) \cap (B' \times D')$

15. Si $A = \{x \in \mathbb{Z}^+ / x = (2k-1)/3, k \in \mathbb{Z}^+\}$,
   $B = \{x \in \mathbb{Z}^+ / x^2 + 1 \leq 12\}$, halle $(A \cap B) \times (B - A)$.

16. Dados $A = \{(x,y) / x = y + 1\}$, $B = \{(x,y) / y^2 = x + 1\}$, donde x e y son elementos de $\mathbb{Z}$, halle $A \cap B$.

17. Halle la intersección de las relaciones en $\mathbb{R}$:
   $R_1 = \{(x,y) / x^2 + y^2 = 5\}$, $R_2 = \{(x,y) / x + y = 3\}$.

18. Si $A = \{(x,y) / 4x^2 + 9y^2 = 72\}$, $B = \{(x,y) / 3x^2 - 2y^2 = 19\}$, halle $A \cap B$.

19. Sean los conjuntos $A = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} / (|x+3|, |y-1|) = (4,1)\}$
   $B = \{1,0,-7\}$, $C = \{1,2\}$, halle $A \cap (B \times C)$.

20. Dado A y la relación R en A: $R = \{(x,y) / x = y \vee x + y = 3\}$ ¿Cuáles son verdaderas?: ¿Es R relación de Equivalencia?
   a) $\forall a \in A, (a,a) \in R$; b) $(a,b) \in R \Rightarrow (b,a) \in R$.
   c) $(a,b) \in R \wedge (b,c) \in R \Rightarrow (a,c) \in R$.

21. En $A = \{1,2,4,6,8\}$ se define $R = \{(x,y) / 3$ es divisor de $x + y\}$, halle la suma de todos los elementos del rango de R.

22. Si U es el conjunto de triángulos del plano $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ y si S es la relación en U definida por $(x,y) \in S \Leftrightarrow \underline{x}$ es semejante a $\underline{y}$, demuestre que S es una relación de Equivalencia.

23. Una relación R en A se llama ANTISIMÉTRICA si cumple que:
   $$(a,b) \in R \wedge (b,a) \in R \Rightarrow a = b.$$
   Demuestre que las relaciones definidas en $\mathbb{Z}$: $R_1 = \{(x,y) / x < y\}$ y $R_2 = \{(x,y) / x \leq y\}$ son antisimétricas.

24. Si R y S son dos relaciones reflexivas en A, ¿Cuáles son ciertas?:
   a) $R \cup S$ es reflexiva, b) $R \cap S$ es reflexiva,
   c) $(R \cup S) \cap (R \cap S)$ es reflexiva.

25. En $A = \{1,2,4,6,8\}$ se define la relación $R = \{(x,y) / 3$ es divisor de $x + y\}$, ¿Cuáles son verdaderas?:
   a) R es reflexiva, c) R es transitiva,
   b) R es simétrica, d) R tiene 9 elementos.

26. Dados los conjuntos $A = \{1,3,5,8\}$, $B = \{2,6,9\}$ se define la relación R de A en B por: $(x,y) \in R \Leftrightarrow$ "$\underline{x}$ es mayor que $\underline{y}$". Si M es el Dominio de R, N su rango, y si $(u,w) \in (A - M) \times (B - N)$, halle $u + w$.

27. Sea $A = \{x / x = 2n, n \in \mathbb{Z}^+ \wedge 5 < x < 25\}$. Sea R una relación en A, y sea $n(R)$ el número de elementos de R. ¿Cuáles de las siguientes proposiciones son verdaderas?:
   a) $n(R) < 10 \Rightarrow R$ no es reflexiva,
   b) $n(R) \geq 10 \Rightarrow R$ es reflexiva,
   c) R transitiva $\Rightarrow n(R) \geq 3$.

28. Sea $A = \{1,2,3\}$ y sean R, S y T relaciones en A, reflexiva, simétrica y transitiva, respectivamente. Si $R = \{(1,1),(2,3),(a,2),(3,b)\}$, $S = \{(1,3),(c,d)\}$, $T = \{(3,e),(2,3)\}$, halle: $b - a + c - d + e$.

29. En el conjunto $A = \{0,1,2,3, \ldots\}$ se definen las relaciones:
   $(x,y) \in R \Leftrightarrow 2x + 3y = 24$,
   $(x,y) \in S \Leftrightarrow (x+y)(x-y) > 4$. ¿Cuáles son verdaderas?:
   a) $Dom(R) \cap Rang(R) = \{0,6,8\}$, b) $R \cap S \neq \varnothing$
   c) $(x,y) \in R \wedge (y,x) \in R \Rightarrow x = y$
   d) $Dom(S) = A - \{0,1,2\}$.

30. En $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ se define la relación:
   $$((x,y),(z,w)) \in R \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} / x - z = 2k \wedge y - w = 5k$$

¿Cuáles son Verdaderas? :

a) R es una relación reflexiva y simétrica, b) R es transitiva,

c) $\{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \ / \ ((x,y),(-1,1)) \in R\} = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \ / \ 2y - 5x = 7\}$.

31. Sea $\mathcal{P}(A)$ el conjunto Potencia del conjunto A (es decir, $\mathcal{P}(A)$ es el conjunto de todos los subconjuntos $X \subset A$).
Si se define la relación R en $\mathcal{P}(A)$ como: $X \ R \ Y \Leftrightarrow X \subset Y$,
a) ¿Es R una relación de Equivalencia? ¿Por qué?
b) ¿Es R una relación antisimétrica? ¿Por qué? Ver el Probl. Prop. 23.

32. Dada la relación en $\mathbb{R}$: $S = \{(x,y) \ / \ -1 < x - y < 2\}$,
a) ¿Es S reflexiva? , b) ¿Es simétrica? , c) ¿Es transitiva? .

CLAVE DE RESPUESTAS

2. 992 ; 3) $M = \{(-1,3),(-1,4),(-2,3),(-2,4)\}$; 4) $\{3\}$

5. 12 ; 6) $\{(3,3),(-1,-1)\}$; 7) $\{(1,4),(2,4),(3,4),(1,2)\}$

8. $\{(2,3),(2,5)\}$; 9) Sólo $\{a\}$, $\{c\}$ y $\{d\}$; 10) 12 ;

11. $\{(-2,-1),(-1,0),(-1,-3)\}$; 12) 20 ; 13) $2^8 = 256$

14. Sólo $\{b\}$ y $\{d\}$; 15) $\{(1,2),(3,2)\}$; 16) $\{(3,2),(0,-1)\}$

17. $\{(1,2),(2,1)\}$; 18) $\{(3,2),(3,-2),(-3,2),(-3,-2)\}$

19. $\{(1,2),(-7,2)\}$; 20) Todas, Sí ; **21)** 21 ; 24) Todas

25. Sólo $\{b\}$ y $\{d\}$.

26. $(A - M) \times (B - N) = \{(1,9)\}$, $(u,w) = (1,9)$, $u + w = 10$.

27. Sólo (a) ; se prueba que $n(A) = 10$, $A = \{6,8,10,12,14,16,18,20,22,24\}$. La afirmación (c) es FALSA pues R puede ser $\{(8,8)\}$ la cual es transitiva y tiene un solo elemento.

28. $a = 2$, $b = 3$, $c = 3$, $d = 1$, $e = 3$; lo que implica que: $b - a + c - d + e = 2$.

29. $\{b\}$, $\{c\}$ y $\{d\}$ solamente ; 30. Todas ;

31. a) No, pues R no es simétrica, aún cuando sí es reflexiva y transitiva;
b) Si, pues: $X \subset Y \ \wedge \ Y \subset X \Leftrightarrow X = Y$.

32. A) Si, b) No , c) No .

3. GRÁFICAS DE RELACIONES DEFINIDAS POR ECUACIONES E INECUACIONES

Una relación $R \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ puede ser representada en un Plano Cartesiano de modo que los valores x del DOMINIO de R se consideren en el Eje X, y los valores y del RANGO de R en el Eje Y, ubicando los puntos $(x,y) \in R$ en el plano cartesiano.

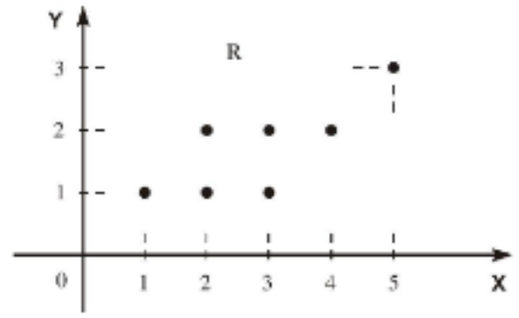
Por ejemplo, dada la relación

$$R = \{(1,1),(2,1),(2,2),(3,1),(3,2),(4,2),(5,3)\}$$

Su representación gráfica corresponde a los puntos de la figura adyacente:

$DOM(R) = \{1,2,3,4,5\}$
$RANG(R) = \{1,2,3\}$

El Dominio se lee en el Eje X mientras que el Rango se lee en el Eje Y.



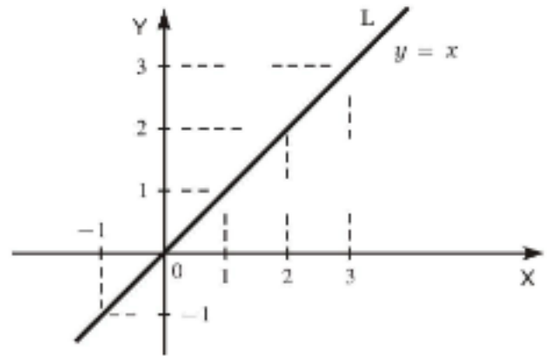
3.1 EJEMPLO .- Bosquejaremos las gráficas de las siguientes relaciones:

$L = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \ / \ x = y\}$,
$S = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \ / \ x = 2\} = \{(2,y) \ / \ y \in \mathbb{R}\}$
$T = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \ / \ y = 3\} = \{(x,3) \ / \ x \in \mathbb{R}\}$

Analizando la relación L, para que un par ordenado (x,y) se encuentre en L sus dos componentes deben ser iguales $x = y$. Algunos pares de L son: $(-2,-2)$, $(-1,-1),(0,0),(1,1)$, etc. Luego,

$Dom(L) = \langle -\infty, \infty \rangle = \mathbb{R}$ [Eje X], $Rang(L) = \langle -\infty, \infty \rangle = \mathbb{R}$ [Eje Y]

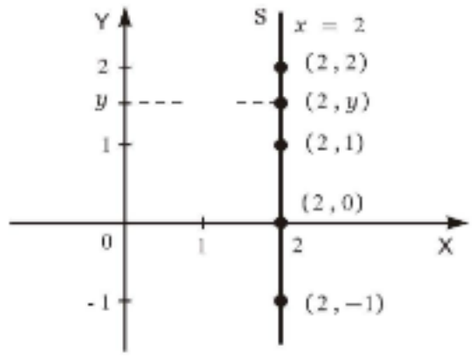
En general, como el Dominio es un conjunto continuo, uniendo todos los puntos del conjunto L se obtiene una RECTA.



Con respecto a la relación $S = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} / x = 2\} = \{(2, y) / y \in \mathbb{R}\}$ basta que la primera componente de un par (x, y) sea igual a 2 para que el par se encuentre en S. La segunda componente está libre para tomar todos los valores reales posibles, sin restricciones.

$\text{Dom}(S) = \{2\}$
$\text{Rang}(S) = \mathbb{R} =$ Eje Y

Aquí también la gráfica corresponde a una RECTA, pero VERTICAL, y que pasa precisamente por $x = 2$.



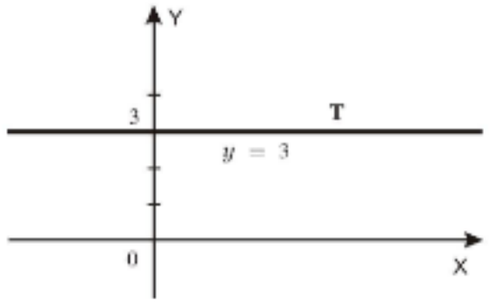
En general, toda ecuación de la forma:

$\boxed{x = c}$ (c constante)

en el plano X Y corresponde a una RECTA VERTICAL que pasa por $x = c$, en el Eje X.

Análogamente, podemos ver que la gráfica de la relación $T = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} / y = 3\}$ corresponde a una RECTA HORIZONTAL que corta al EJE Y a la "altura" $y = 3$.

$\text{Dom}(T) = (-\infty, \infty)$
$= \mathbb{R} =$ Eje X
$\text{Rang}(T) = \{3\}$



En general, toda ecuación de la forma: $\boxed{y = c}$, con c constante, en el plano **X Y** corresponde a una RECTA HORIZONTAL que pasa precisamente por $y = c$.

3.2 NOTA. a) La gráfica correspondiente a la ecuación $y = 0$ es una recta horizontal que coincide con el Eje X.

b) Y la gráfica de $x = 0$ es una recta vertical que coincide con el Eje Y.

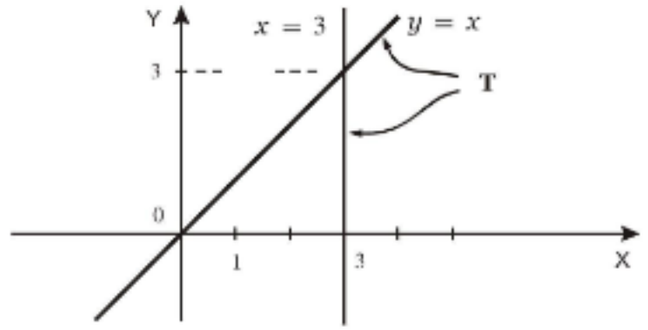
3.3 EJERCICIO.- Bosqueje la gráfica de la relación:

$T = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} / (x - 3)(y - x) = 0\}$

SOLUCIÓN.- En $\mathbb{R}$: $ab = 0 \Leftrightarrow [a = 0 \vee b = 0]$. Luego,

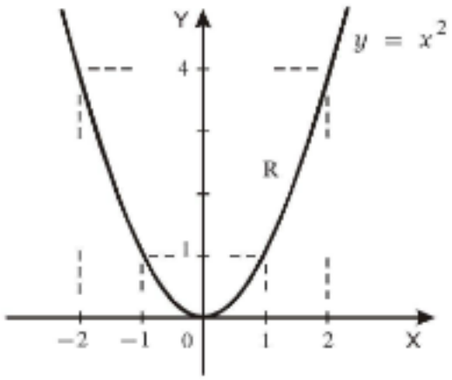
$$(x - 3)(y - x) = 0 \Leftrightarrow [x - 3 = 0 \vee y - x = 0]$$
$$\Leftrightarrow x = 3 \vee y = x$$

y que por tener el conectivo lógico de la DISYUNCIÓN $\vee$ su gráfica consistirá de (LA REUNIÓN DE) ambas rectas:



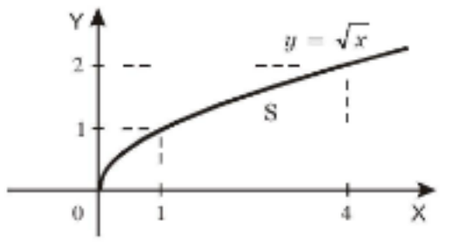
A continuación presentamos las gráficas de las siguientes relaciones en $\mathbb{R}$:

$R = \{(x, y) / y = x^2\}$, $S = \{(x, y) / y = \sqrt{x}\}$,
$T = \{(x, y) / y = -\sqrt{x}\}$, $W = \{(x, y) / x = y^2\}$



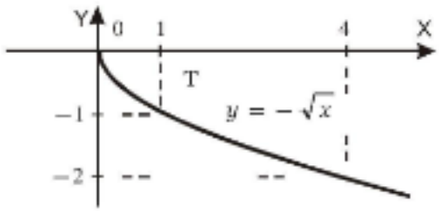
$\left[\begin{array}{l} y = x^2 \geq 0 \\ x \quad \text{no tiene restricciones} \end{array}\right.$

$\Rightarrow \text{Dom}(R) = (-\infty, \infty)$
$\text{Rang}(R) = [0, \infty)$



$\left[\begin{array}{l} y = \sqrt{x},\ x \geq 0 \\ y = \sqrt{x} \geq 0 \end{array}\right.$

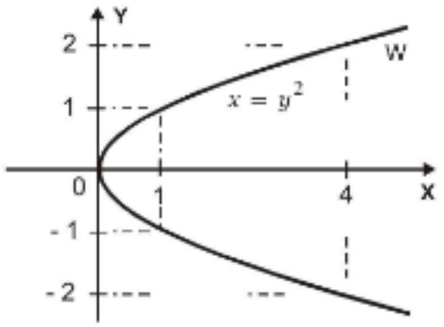
$\Rightarrow \text{Dom}(S) = [0, \infty)$
$\text{Rang}(S) = [0, \infty)$



$$\left[\begin{array}{l} y = -\sqrt{x}\,, \quad x \geq 0 \\ y = -\sqrt{x} \leq 0 \end{array}\right.$$

$\Rightarrow$ Dom (T) $= [0, \infty\rangle$

Rang (T) $= \langle -\infty, 0]$



$$\left[\begin{array}{l} x = y^2 \geq 0 \\ y \quad \text{libre en} \quad \mathbb{R} \end{array}\right.$$

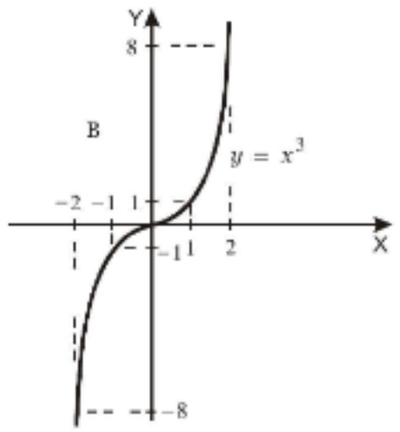
$\Rightarrow$ Dom (W) $= [0, \infty\rangle$

Rang (W) $= \mathbb{R} =$ Eje Y

NOTA.- Como $x = y^2 \Leftrightarrow [\, y = \sqrt{x} \quad \vee \quad y = -\sqrt{x}\,, \ \forall\, x \in [0, \infty)\,]$ entonces la gráfica de W corresponde a la reunión de las gráficas de las relaciones S y T.

La gráfica de la relación CÚBICA: $B = \{ (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \ / \ y = x^3 \}$ corresponde a la figura adyacente, donde

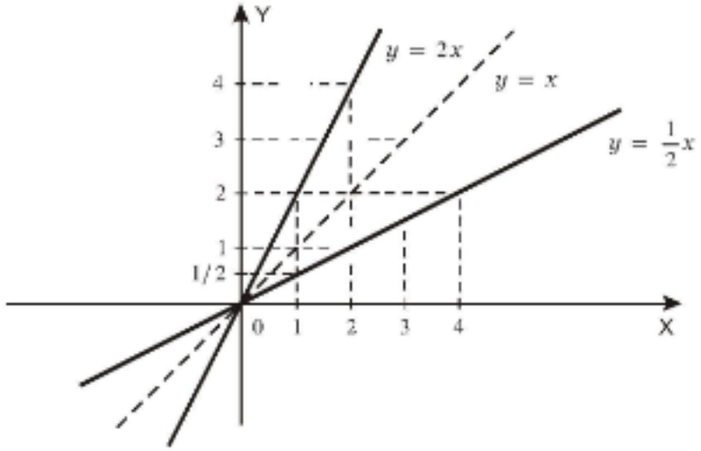
$$\begin{aligned} \text{Dom (B)} &= \langle -\infty, \infty\rangle \\ &= \text{Eje X}, \\ \text{Rang (B)} &= \langle -\infty, \infty\rangle \\ &= \text{Eje Y} \end{aligned}$$



Ahora analizaremos la posición de las gráficas de las siguientes rectas:

$L_1 = \{ (x, y) \ / \ y = 2x \}$, $L_2 = \{ (x, y) \ / \ y = \frac{1}{2}x \}$,

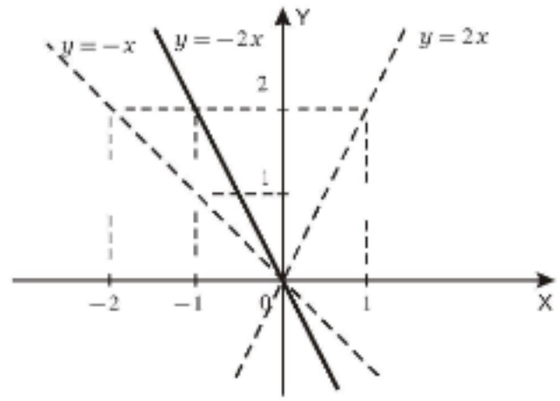
con respecto a la recta $L = \{ (x, y) \ / \ y = x \}$:



Así como de las rectas:

$$L_3 = \{ (x, y) \ / \ y = -2x \}$$

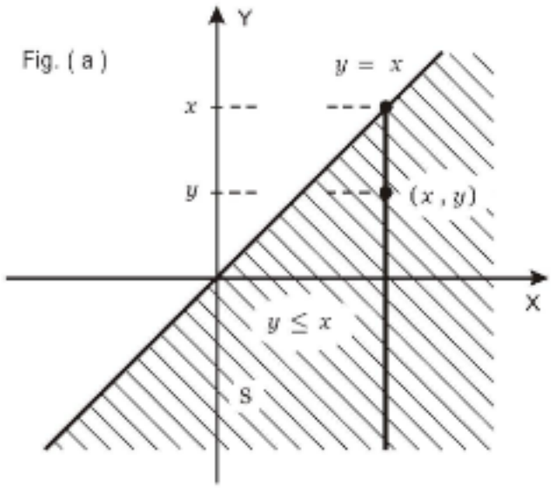
$$L_4 = \{ (x, y) \ / \ y = -x \} :$$



3.4 GRÁFICAS DE RELACIONES DEFINIDAS POR INECUACIONES (A)

Consideremos la relación $S = \{ (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \ / \ y \leq x \}$, un punto (x, y) satisface la condición $y \leq x$ (vea en el Eje Y) si se encuentra en la semirrecta vertical que comienza en la recta $y = x$ y que baja sin límite (zona sombreada de la Fig. (a)).

Fig. (a)



Cuando x toma todos los valores del Eje X, la semirrecta indicada barrerá toda la zona sombreada.

La relación $S_0 = \{ (x, y) / \quad y < x \}$ corresponde a la gráfica anterior pero exceptuando los puntos del borde $y = x$. (Fig. (b))

Del mismo modo se puede bosquejar la gráfica de la relación

$$T = \{ (x, y) / \quad 2y > -x \} = \{ (x, y) / \quad y > -\frac{1}{2}x \}$$

que se encuentra encima del borde $y = -\frac{1}{2}x$, sin incluirlo. Fig. (c).

Fig. (b)

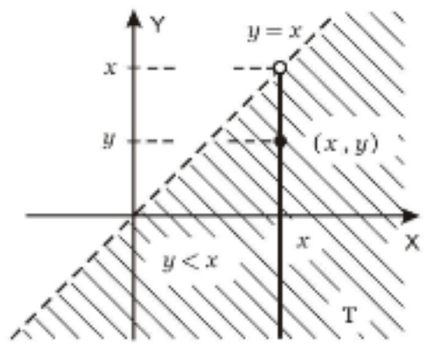
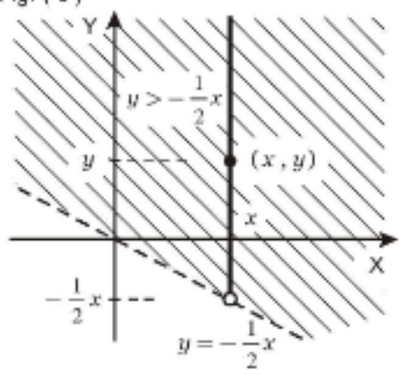


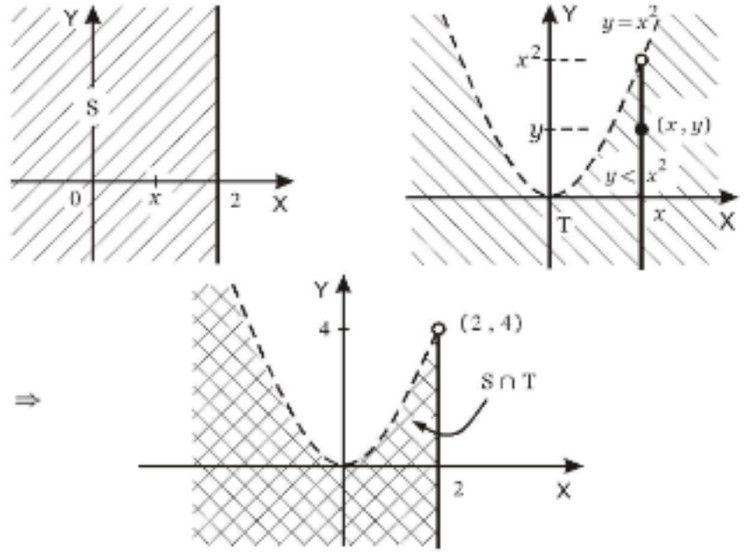
Fig. (c)



3.5 EJERCICIO .- Halle la gráfica de la intersección $S \cap T$ de las relaciones:

$$S = \{ (x, y) / \quad x \leq 2 \}, \quad T = \{ (x, y) / \quad y < x^2 \}.$$

SOLUCIÓN .-



3.6 RESUMEN .- Si la inecuación puede expresarse en una de las dos formas

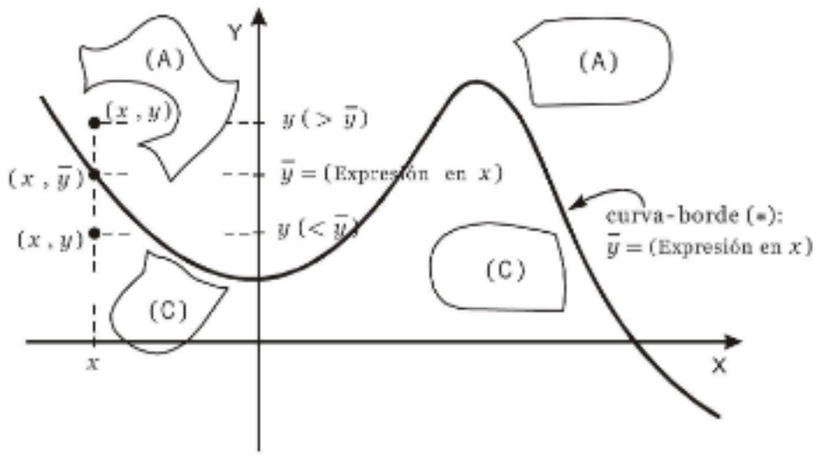
A) $y >$ [Expresión en x] o B) $y \geq$ [Expresión en x]

entonces la gráfica de la región está acotada por la curva del borde determinada por la ecuación: $y =$ [Expresión en x] ... (*) .

Además ,

(A): corresponde a la parte del plano acotada inferiormente por el borde (*), pero sin incluirlo.

(B): corresponde a la gráfica de (A) incluyendo el borde (*) .



En los casos C) $y <$ [Expresión en x]
o D) $y \leq$ [Expresión en x]

la región corresponde a la parte del plano limitada superiormente por la curva–borde (*) y denotada por (C), e incluyendo a la curva-borde en el caso (D).

3.7 EJERCICIO .- Grafique las relaciones definidas por

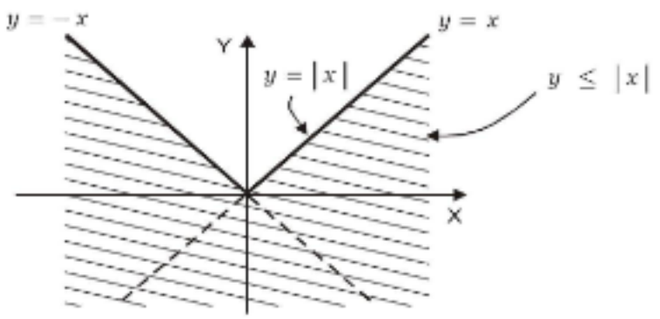
a) $y \leq |x|$, b) $y \geq |x|$.

SOLUCIÓN .-

a) $|x| \geq y \Leftrightarrow [\ x \geq y \ \vee \ x \leq -y\ ]$

$\Leftrightarrow [\ y \leq x \ \vee \ y \leq -x\ ]$

que corresponde a la (RE)UNIÓN de las dos regiones: $y \leq x$ y $y \leq -x$

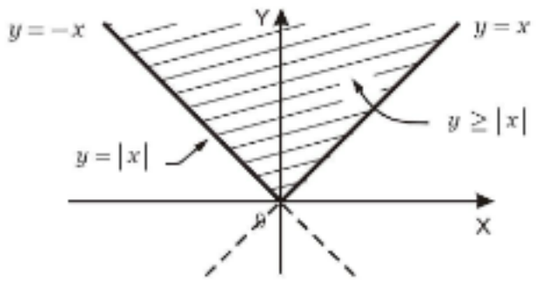


b) Esta gráfica de $y \geq |x|$ corresponderá al complemento de la gráfica de (a), incluyendo la curva-borde pues:

$|x| \leq y \Leftrightarrow (y \geq 0) \wedge (-y \leq x \leq y)$

$\Leftrightarrow (y \geq 0) \wedge (y \geq -x) \wedge (y \geq x)$

(intersección de las tres regiones)



3.8 EJERCICIO .- Grafique la (re)unión $R \cup S$ de las relaciones:

$$R = \{ (x, y) / \ x \geq y > x^3 , \ x > 0 \}$$

$$S = \{ (x, y) / \ x \leq y < x^3 , \ x < 0 \}$$

SOLUCIÓN .- R corresponde a la intersección de las tres regiones:

a) $y \leq x$ $\wedge$ b) $y > x^3$ $\wedge$ c) $x > 0$

S corresponde a la intersección de las tres regiones:

a_1) $y \geq x$ $\wedge$ b_1) $y < x^3$ $\wedge$ c_1) $x < 0$

Note que el origen $(0, 0)$ no se incluye en ninguno de los dos casos.
Vea la figura FIG. (1) de la página siguiente.

3.9 EJERCICIO .- Grafique la región definida por la relación:

$$S = \{ (x, y) / \ |y| \geq x^2 , \ |y| \leq |x| \}$$

SOLUCIÓN .- S es la intersección de: $|y| \geq x^2 \ \wedge \ |y| \leq |x|$, donde

i) $|y| \geq x^2 \Leftrightarrow y \geq x^2 \ \vee \ y \leq -x^2$,

ii) $|y| \leq |x| \Leftrightarrow [\ x \geq 0 \ \wedge \ |y| \leq x\ ] \vee [\ x < 0 \ \wedge \ |y| \leq -x\ ]$

$\Leftrightarrow [\ (x \geq 0) \wedge (y \leq x) \wedge (y \geq -x)\ ] \vee [\ (x < 0) \wedge (y \leq -x) \wedge (y \geq x)\ ]$

(Vea la Fig. 2)

FIG. 1

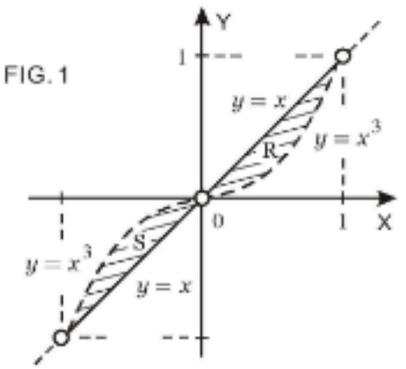
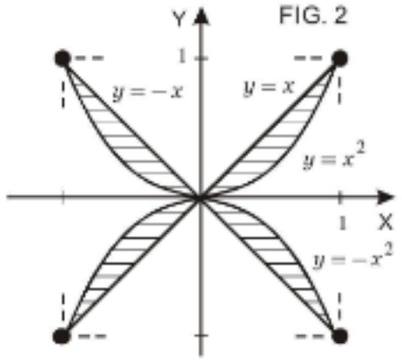


FIG. 2



4. RELACIONES INVERSAS

Toda relación R de A en B tiene una RELACIÓN INVERSA de B en A denotada por R^{-1} o también por R^*, y está definida por:

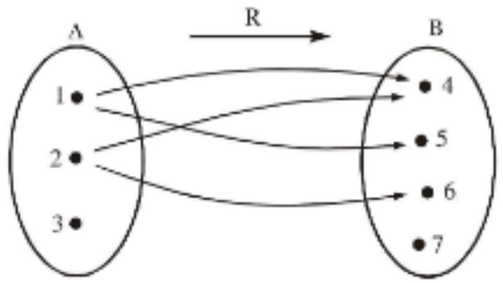
$$R^{-1} = \{ (b, a) / \ (a, b) \in R \} = R^* .$$

Así, los elementos de R^{-1} son obtenidos al intercambiar las componentes en todos los pares ordenados de R.

Por ejemplo, sea $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{4, 5, 6, 7\}$, y la relación R de A en B:

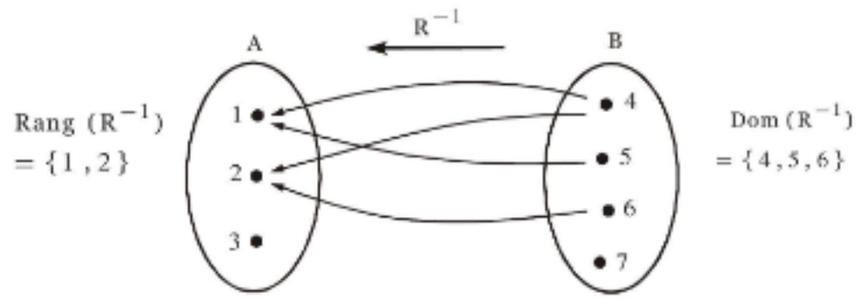
$$R = \{(1, 4), (1, 5), (2, 4), (2, 6)\}$$

entonces $$R^{-1} = \{(4, 1), (5, 1), (4, 2), (6, 2)\}$$



Aquí, se tiene que: $\text{Dom}(R) = \{1, 2\}$

$\text{Rang}(R) = \{4, 5, 6\}$



4.1 **PROPIEDAD FUNDAMENTAL DE LAS RELACIONES INVERSAS**

Dada una relación R de A en B y su relación inversa R^{-1} de B en A, se cumple que:

$$\text{Dom}(R^{-1}) = \text{Rang}(R)$$
$$\text{Rang}(R^{-1}) = \text{Dom}(R)$$

En el Ejemplo previo vimos que

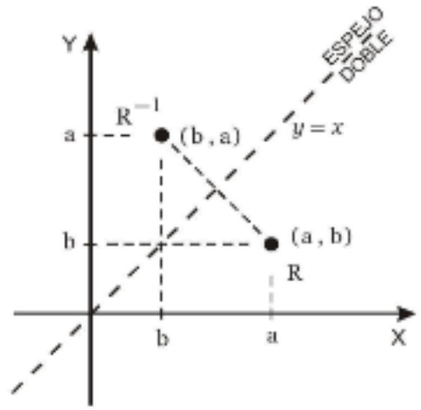
$$\text{Dom}(R^{-1}) = \{4, 5, 6\} = \text{Rang}(R)$$
$$\text{Rang}(R^{-1}) = \{1, 2\} = \text{Dom}(R)$$

4.2 GRÁFICA DE LA RELACIÓN INVERSA

$$R^{-1} = \{(b, a) / (a, b) \in R\}$$

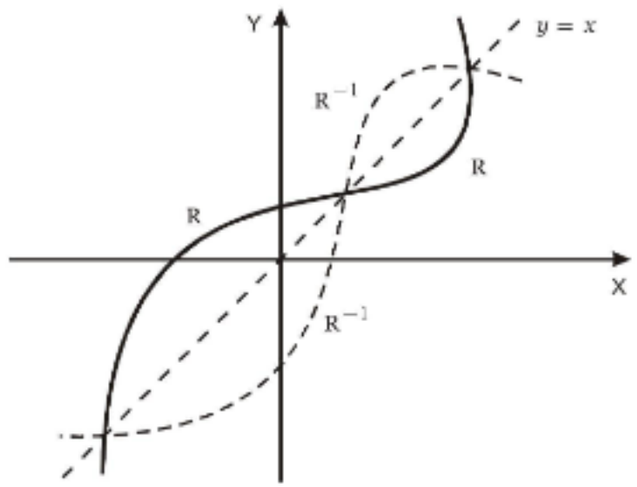
En la figura se ha ubicado un punto de R y el correspondiente punto de R^{-1}, y vemos que si se considera a la recta $y = x$ como un ESPEJO DOBLE entonces R^{-1} se obtiene precisamente como la IMAGEN de R a través de dicho espejo.

En este caso se dice que la recta $y = x$ es una RECTA DE SIMETRÍA, y que:

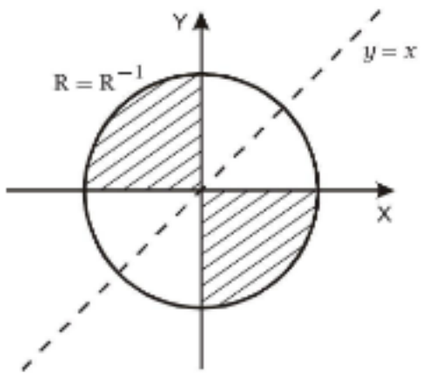


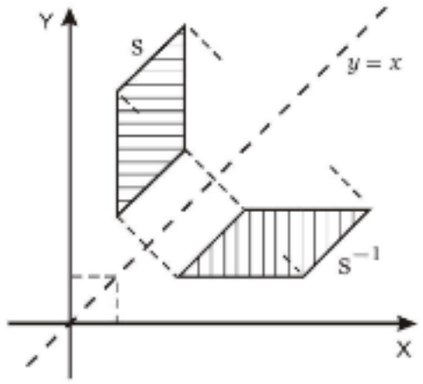
LA GRÁFICA DE R^{-1} ES SIMÉTRICA A LA GRÁFICA DE R CON RESPECTO A LA RECTA $y = x$.

En el diagrama siguiente, la curva continua corresponde a una relación R, y la curva punteada a su relación inversa R^{-1}.



En la siguiente figura, R consiste de toda la circunferencia y de toda la zona sombreada.



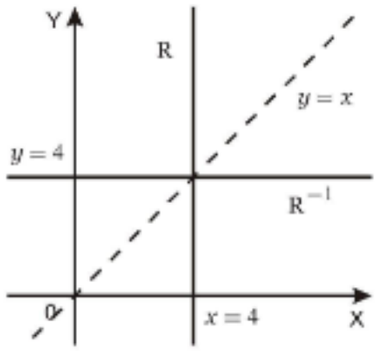


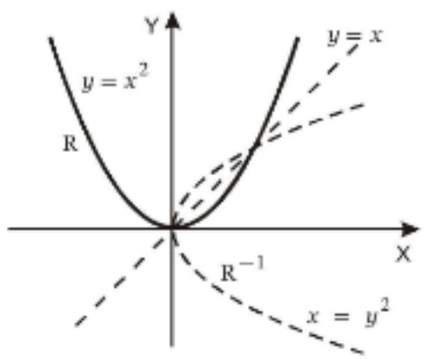
La relación inversa de una recta horizontal $y = C$ es la recta vertical $x = C$, y viceversa. En efecto,

$R = \{ (4, z) / z \in \mathbb{R} \}$ tiene ecuación $x = 4$

y $R^{-1} = \{ (z, 4) / z \in \mathbb{R} \}$ tiene ecuación $y = 4$.

La relación inversa de la parábola $R: y = x^2$ es la parábola $R^{-1}: x = y^2$, la cual se obtuvo intercambiando x con y en R.





SERIE DE PROBLEMAS

1. Grafique e indique el Dominio y el Rango de las relaciones:
   a) $R = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} / \ |y| \leq |x| \leq 3 \}$
   b) $S = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} / \ |y| \geq x^2 , |y| < x \}$
   c) $T = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} / \ |y| \geq x^2, |y| \leq |x| \}$, d) T^{-1}.
2. Sea $S = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} / \ 3x - y \leq 12 \ \wedge \ 2x - 3y < 0 \}$,

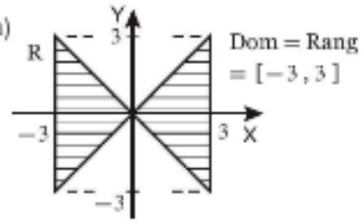
¿Cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas? :

I) $S^{-1} = \{(m, n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} / \ 3n - m \leq 12 \ \wedge \ 2n - 3m < 0 \}$

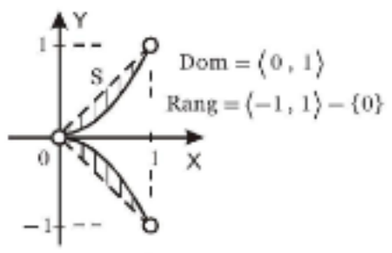
II) $(4, 5) \in S^{-1}$; III) $\nexists (a, b) \in S / (b, a) \in S$.

CLAVE DE RESPUESTAS

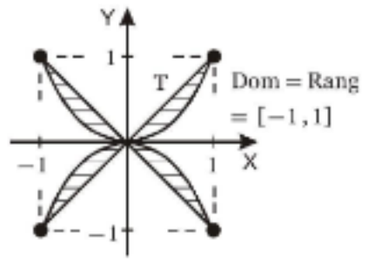
1. a)



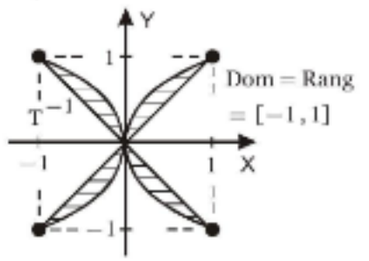
b)



c)



d)



2. Sólo (I) y (II) ; (III) es FALSA pues sí existe al menos el par ordenado $(1, 3/4) \in S$ tal que $(3/4, 1) \in S$.

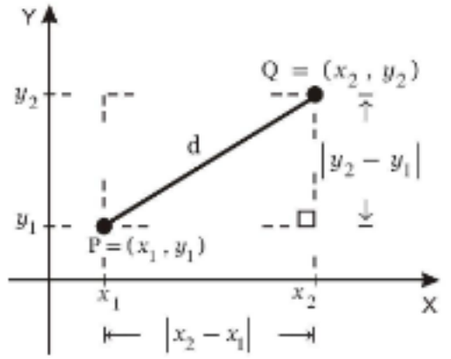
5. DISTANCIA ENTRE DOS PUNTOS EN EL PLANO CARTESIANO

La DISTANCIA entre los puntos $P = (x_1, y_1)$ y $Q = (x_2, y_2)$, y que denotaremos por $d = d(P; Q)$ satisface la siguiente relación pitagórica:

$$d^2 = |x_2 - x_1|^2 + |y_2 - y_1|^2$$
$$= (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2,$$

y por lo tanto

$$d = d(P; Q) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$



5.1 EJEMPLO .- Para los puntos:

1) $P = (3, 4)$, $Q = (6, 8)$: $\quad d(P; Q) = \sqrt{(6-3)^2 + (8-4)^2} = \sqrt{25} = 5$

2) $P = (-2, 4)$, $Q = (10, -9)$:

$$d(P; Q) = \sqrt{[10-(-2)]^2 + [(-9)-(4)]^2} = \sqrt{169} = 13$$

3) $P = (-8, -9)$, $Q = (0, 6)$:

$$d(P; Q) = \sqrt{[0-(-8)]^2 + [6-(-9)]^2} = \sqrt{289} = 17$$

5.2 PROPIEDADES DE LA DISTANCIA

1) $d(P; Q) \geq 0$; $\quad d(P; Q) = 0 \Leftrightarrow P = Q$;
2) $d(P; Q) = d(Q; P)$;
3) $d(P; Q) + d(Q; R) \leq d(P; R)$ ... [Desigualdad Triangular]

5.3 EJERCICIO .- Probar que el triángulo de vértices $A = (2, 3)$, $B = (-1, 0)$, $C = (-2, 4)$ es isósceles .

SOLUCIÓN.- Para que ello ocurra, dos de sus lados deben tener longitudes iguales; verificamos que, en efecto,

$$d(A; B) = 3\sqrt{2} \quad , \quad \underline{d(A; C) = \sqrt{17}} \quad , \quad \underline{d(B; C) = \sqrt{17}} \ .$$

5.4 EJERCICIO .- Halle una ecuación para los puntos $P = (x, y)$ que equidisten de $A = (-2, 1)$ y $B = (4, 6)$.

SOLUCIÓN .-

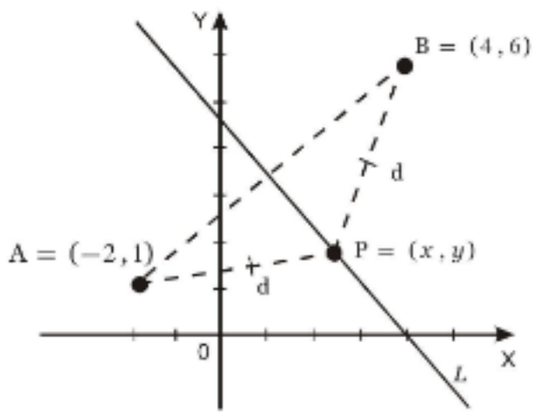
Por la condición:

$d(P; A) = d(P; B)$:

$$\sqrt{(x+2)^2 + (y-1)^2} = \sqrt{(x-4)^2 + (y-6)^2}$$

Elevando al cuadrado ambos miembros y reduciendo términos semejantes obtenemos la ecuación de una recta

$L: \ 12x + 10y = 47$



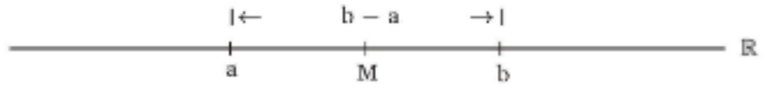
5.5 EJERCICIO .- Probar que los puntos $A(-4, 2)$, $B(4, -6)$ y $C(0, -2)$ son colineales, es decir que se encuentran en una misma recta.

SOLUCIÓN .- Ello ocurrirá en el único caso en que considerando las distancias entre ellos, la suma de dos de tales distancias coincida con el valor de la tercera. Así, verificamos que

$$d(A; C) = 4\sqrt{2} \quad , \quad d(C; B) = 4\sqrt{2} \quad , \quad d(A; B) = 8\sqrt{2} \ .$$

5.6 FÓRMULA DEL PUNTO MEDIO

En la recta real $\mathbb{R}$, vemos que el punto medio M entre los puntos a y b satisface la fórmula:



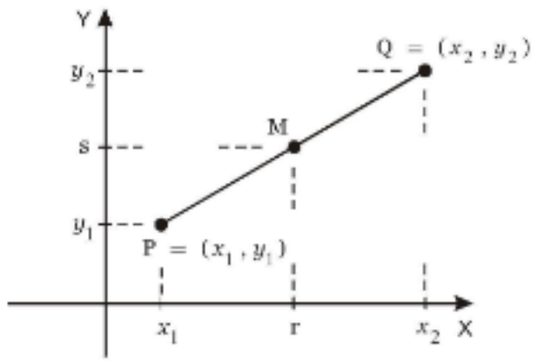
$$M = a + \frac{1}{2}(b-a) = \frac{a+b}{2} \quad \Rightarrow \quad \boxed{M = \frac{a+b}{2}} \qquad \text{(semisuma)}$$

Utilizaremos este hecho en ambos Ejes X , Y para hallar las coordenadas del punto $M = (r, s)$ que se encuentra en la mitad del segmento de recta que une a los puntos $P = (x_1, y_1)$ y $Q = (x_2, y_2)$:

Por el Teorema de Tales, si M es punto medio del segmento $\overline{PQ}$, entonces r es punto medio entre los valores x_1 y x_2 , y s es punto medio entre y_1 y y_2 :

$$r = \frac{x_1 + x_2}{2} \ ,$$

$$s = \frac{y_1 + y_2}{2}$$



Por lo tanto,

$$\boxed{M = \left(\frac{x_1 + x_2}{2} \ , \ \frac{y_1 + y_2}{2}\right)}$$ PUNTO MEDIO

Por ejemplo, el punto medio M entre los puntos $A = (3, 8)$ y $B = (9, -4)$ tiene las coordenadas

$$M = \left(\frac{3+9}{2} \ , \ \frac{8+(-4)}{2}\right) = (6, 2)$$

6. LA RECTA Y SUS ECUACIONES

Si una recta es vertical ya sabemos que su ecuación es de la forma $\boxed{x = C}$, con C: constante. Y si la recta L no es vertical y pasa por un punto fijo $P_0 = (x_0, y_0)$ llamado PUNTO DE PASO de la recta, entonces L forma un ángulo fijo α ($\neq 90^\circ$) con el Eje X. Este ángulo se mide ***en sentido antihorario desde el semieje positivo del Eje*** X, y se le llama ÁNGULO DE INCLINACIÓN de L.

Un punto $P = (x, y) \neq P_0$ se encontrará en la recta L si y sólo si

$$\tan\alpha = \frac{y - y_0}{x - x_0}$$

Análogamente, si $Q = (x_1, y_1) \in L$, entonces también se tendrá que

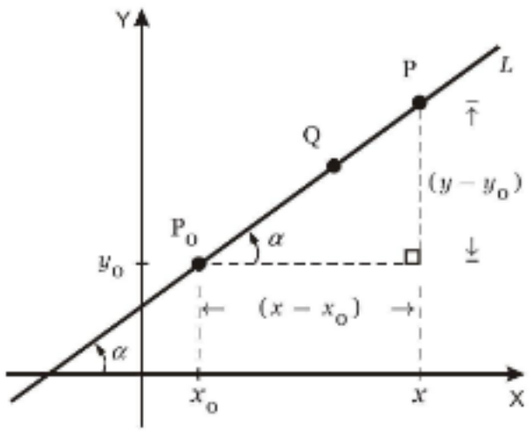
$$\tan\alpha = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$$

6.1 DEFINICIÓN .- Se llama **PENDIENTE** de la recta L al valor de la tangente de su ángulo de inclinación α, y se le denota con la letra m :

$$\boxed{m = \tan\alpha = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}}$$

donde $(x_1, y_1) = Q \in L$,
y $(x_0, y_0) \in L$.

El valor de la PENDIENTE m será constante para cada recta, y proporciona una medida de su inclinación con respecto al eje X .

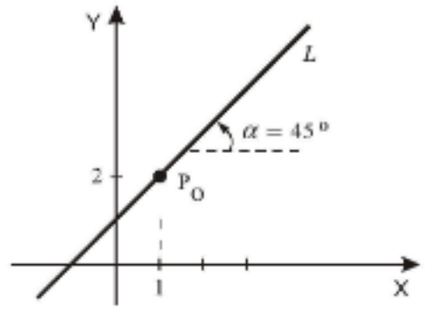


Así, la ecuación de UNA RECTA NO VERTICAL L queda completamente determinada si se indican su PENDIENTE m, y las coordenadas de algún PUNTO DE PASO (x_0, y_0) :

$$L: \quad m = \frac{y - y_0}{x - x_0} \quad \Rightarrow \quad L: \boxed{y - y_0 = m(x - x_0)}$$

6.2 EJEMPLO .- Hallaremos la ecuación de la recta L que pasa por el punto $(1, 2)$ y tiene ángulo de inclinación $\alpha = 45^\circ$.

Aquí, la pendiente es igual a $m = \tan 45^\circ = 1$, y como pasa por el punto $P_0 = (1, 2) = (x_0, y_0)$,



entonces

L : $y - 2 = m(x - 1)$
$y - 2 = 1(x - 1)$

Efectuando operaciones,

L : $y = x + 1$

6.3 EJERCICIO .- Halle la ecuación de la recta L que pasa por los puntos $A = (3, 4)$ y $B = (5, 8)$.

SOLUCIÓN .- Como ambos puntos pertenecen a la recta L se puede tomar cualquiera de ellos como PUNTO DE PASO P_0, digamos $P_0 = A = (3, 4)$.

Sólo falta hallar el valor de la pendiente m, considerando $Q = (x_1, y_1) = B = (5, 8) \in L$:

$$m = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = \frac{8 - 4}{5 - 3} = \frac{4}{2} = 2 \quad \Rightarrow \quad m = 2$$

$$L: \quad y - y_0 = m(x - x_0) \quad \Rightarrow \quad L: \quad y - 4 = 2(x - 3)$$
$$\Rightarrow \quad L: \quad y = 2x - 2 \qquad \ldots \quad (*)$$

Note que esta misma ecuación se obtiene si se hubiese considerado como PUNTO DE PASO al otro punto $B = P_0 = (5, 8)$, $L: \ y - y_0 = m(x - x_0)$

$\Rightarrow \quad y - 8 = 2(x - 5) \quad \Rightarrow \quad L: \quad y = 2x - 2$

La ecuación para la recta L en la forma

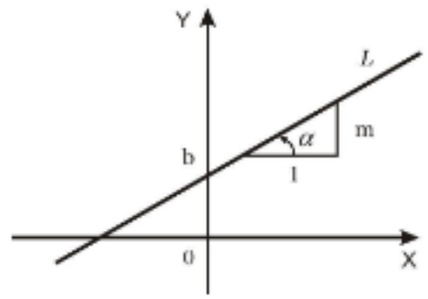
$$L: \quad y - y_0 = m(x - x_0)$$

se denomina la FORMA PUNTO – PENDIENTE.

Consideremos ahora como punto de paso al punto $(0, b)$, en el que L intercepta al EJE Y , entonces

L: $y - b = m(x - 0)$

$$\boxed{L: \quad y = mx + b}$$



Esta forma proporciona directamente la PENDIENTE m como el coeficiente de la variable x, mientras que el término independiente b indica el punto en el EJE Y donde la recta L lo corta. Este valor b puede ser ***cero, positivo o negativo***.

Así, por ejemplo, la ecuación $y = 3x - 2$ corresponde a una recta L con ***pendiente*** $m = 3$, y ***punto de paso*** $(0, b) = (0, -2)$, pues corta al EJE Y en el valor $y = -2$.

Para la recta L no vertical con ángulo de inclinación α, se tiene :

i) Si $0 < \alpha < 90^\circ$ entonces $m = \tan\alpha > 0$ (PENDIENTE POSITIVA),

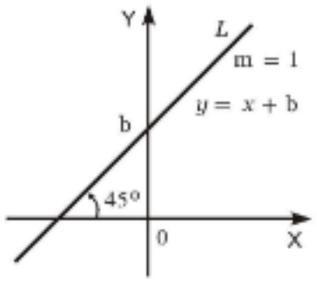
ii) Si $\alpha = 0$, entonces $m = \tan 0 = 0$ (PENDIENTE NULA)
$\Leftrightarrow$ L es HORIZONTAL,

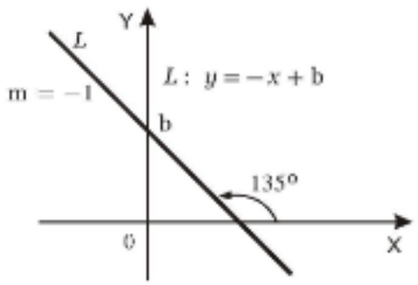
iii) Si $90^\circ < \alpha < 180^\circ$ entonces $m = \tan\alpha < 0$ (PENDIENTE NEGATIVA)

Cualquier otro ángulo se reduce a uno de los tres casos anteriores para efectos del cálculo de la pendiente $m = \tan\alpha$.

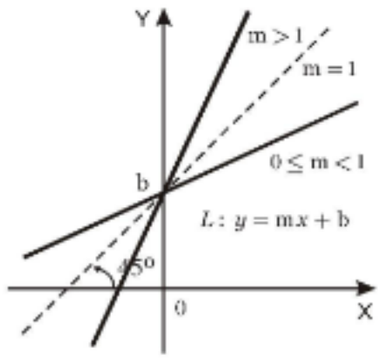
6.4 NOTA .- $m = 1 \Leftrightarrow \tan\alpha = 1 \Leftrightarrow \alpha = 45^\circ$

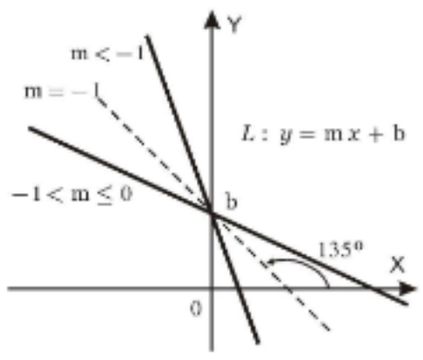
$m = -1 \Leftrightarrow \tan\alpha = -1 \Leftrightarrow \alpha = 135^\circ$





Y si $0 < \alpha < 90^\circ$, la pendiente m aumenta de valor conforme el ángulo α va creciendo. En general se tiene el siguiente bosquejo:



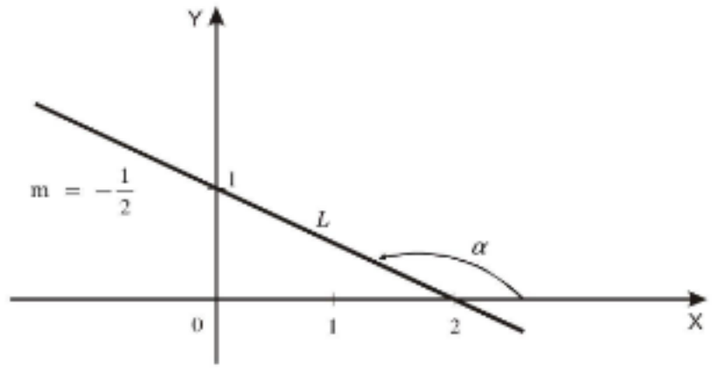


6.5 EJERCICIO .- Dada la recta $L: 2x + 4y = 4$, halle su ***pendiente***, un ***punto de paso***, y su gráfica.

SOLUCIÓN .- Para hallar algún punto de paso de L basta dar un valor cualquiera a la variable x, y despejar el valor de y correspondiente, o viceversa.

Por ejemplo, para $y = 0$, se tiene $x = 2$; luego $P_0 = (2, 0)$ es un ***PUNTO DE PASO*** (que obviamente no es el único) de L. Además, al despejar y de la ecuación obtenemos

$y = -\frac{1}{2}x + 1 \Rightarrow m = -\frac{1}{2}$, (coeficiente de x) de donde vemos que la recta también pasa por el punto $(0, b) = (0, 1)$ en el EJE Y.



6.6 TEOREMA .- Si a y b no son simultáneamente ceros, entonces la ecuación $ax + by + c = 0$ siempre corresponde a la ecuación de una recta en el plano X Y.

PRUEBA .- i) Si $a = 0$, $b \neq 0$: $y = -c/b$, (L HORIZONTAL)

ii) Si $a \neq 0$, $b = 0$: $x = -c/a$, (L VERTICAL)

iii) Si $a \neq 0$, $b \neq 0$:

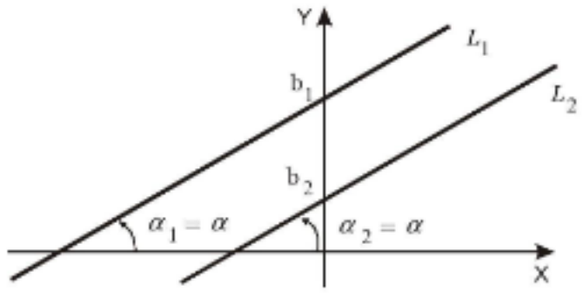
$$ax + by + c = 0 \Leftrightarrow y = (-\frac{a}{b})x + (-\frac{c}{b})$$

es una recta con pendiente $m = -a/b$, y que pasa por el punto $(0, -c/b)$ del Eje Y.

7. RECTAS PARALELAS Y PERPENDICULARES

Dos rectas L_1 y L_2 son PARALELAS ($L_1 // L_2$) si tienen el mismo ángulo de inclinación: $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$.

$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$



En el caso de rectas que ***no son verticales*** esto equivale a que sus pendientes sean iguales:

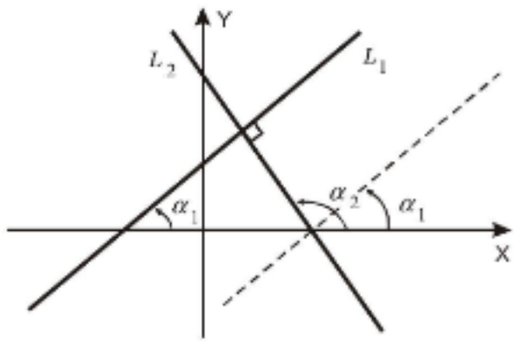
$$m_1 = m_2 = m = \tan\alpha$$

Si ninguna de las rectas L_1 y L_2 es vertical, entonces L_1 y L_2 son PERPENDICULARES si y sólo si $\alpha_2 - \alpha_1 = 90^\circ$. Esto equivale a:

$$\tan\alpha_2 = \cot(-\alpha_1) = -\cot(\alpha_1) = -1/\tan(\alpha_1)$$

$$\Leftrightarrow \quad (\tan\alpha_1)(\tan\alpha_2) = -1 \quad \Leftrightarrow \quad m_1 m_2 = -1$$

Por lo tanto, L_1 y L_2 son PERPENDICULARES si y sólo si el producto de sus pendientes es igual a: -1.



7.1 TEOREMA .- Sean L_1 y L_2 dos rectas de pendientes m_1 y m_2 respectivamente, entonces

i) $L_1 \,//\, L_2 \quad \Leftrightarrow \quad m_1 = m_2$

ii) $L_1 \perp L_2 \quad \Leftrightarrow \quad m_1 m_2 = -1 \quad (\text{ó} \quad m_2 = -\dfrac{1}{m_1})$.

7.2 EJEMPLOS .- Las rectas $L_1: \; 2x + y + 1 = 0 \quad (\Rightarrow m_1 = -2)$

$L_2: \; 4x + 2y = -5 \quad (\Rightarrow m_2 = -2)$

son ***paralelas*** pues tienen sus pendientes iguales. En cambio, las rectas

$L_1: \; 3x - 2y + 1 = 0 \quad (\Rightarrow m_1 = 3/2)$

$L_2: \; 4x + 6y - 7 = 0 \quad (\Rightarrow m_2 = -4/6 = -2/3)$

son ***perpendiculares*** pues $m_1 m_2 = (3/2)(-2/3) = -1$.

7.3 EJERCICIO .- Dadas las rectas $L_1: \; (2-k)x + (k+1)y = 6$

$L_2: \; 4x + 3y + 5 = 0$

halle el valor de k para que ambas rectas sean paralelas.

SOLUCIÓN .- Sean m_1 y m_2 sus pendientes: $m_1 = \dfrac{k-2}{k+1}$, $m_2 = -\dfrac{4}{3}$

Y como $L_1 \,//\, L_2$ entonces

$$m_1 = m_2 \quad \Rightarrow \quad \frac{k-2}{k+1} = -\frac{4}{3} \quad \Rightarrow \quad k = 2/7 .$$

7.4 EJERCICIO .- Dadas las rectas $L_1: \; -2x + y = -2$, $L_2: \; x + y = 7$, indique si son paralelas y halle su punto de intersección Q.

SOLUCIÓN .- $m_1 = 2$, $m_2 = -1$. Como $m_1 \neq m_2$ entonces las rectas no son paralelas, y por lo tanto tienen un punto de intersección $Q = (a, b) \in L_1 \cap L_2$. Y puesto que $Q = (a, b) \in L_1: \; -2x + y = -2$

y $Q = (a, b) \in L_2: \; x + y = 7$

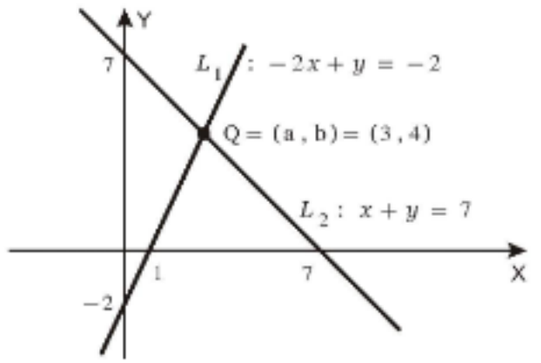
entonces las coordenadas de Q satisfacen ambas ecuaciones simultáneamente:

$$\begin{cases} -2a + b = -2 \\ a + b = 7 \end{cases}$$

Resolviendo este sistema:

$a = 3$, $b = 4$

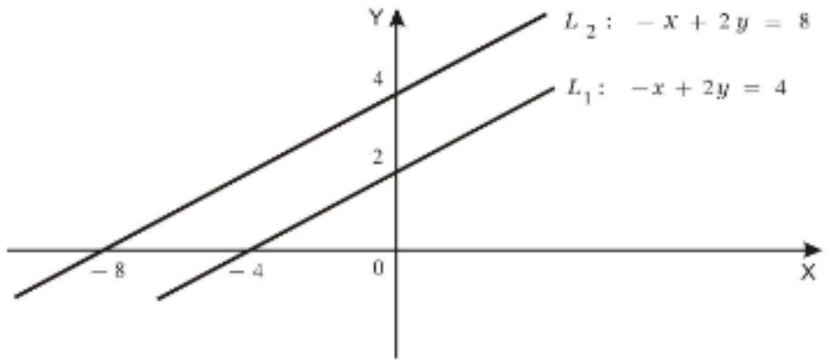
$\Rightarrow \quad Q = (a, b) = (3, 4)$



7.5 NOTA .- Cuando dos ecuaciones (simultáneas) de dos rectas no tienen ninguna solución, ello significa que ambas rectas son paralelas y están separadas, como en el caso de

$L_1:\ -x + 2y = 4 \qquad (\Rightarrow\ m_1 = 1/2)$

$L_2:\ -2x + 4y = 16 \quad (\Rightarrow\ m_2 = 1/2\ ,\ [\,L_2:\ -x + 2y = 8\,])$



7.6 EJERCICIO .- Si $L:\ 3x + 4y = 2$, halle la ecuación de la recta L_1 perpendicular a L, y que pase por el punto $(4, 2)$.

SOLUCIÓN .- $L:\ 3x + 4y = 2 \quad \Rightarrow \quad m = -3/4$

$L_1:\ -4x + 3y + k = 0 \quad \Rightarrow \quad m_1 = 4/3$

y como $(4, 2) \in L_1$, entonces $-4(4) + 3(2) + k = 0 \quad \Rightarrow \quad k = 10$.

Por lo tanto, $L_1:\ -4x + 3y + 10 = 0$.

7.7 EJERCICIO .- Halle el valor de n para que las tres rectas:

$L_1:\ 7x - 2y = 5$, $L_2:\ x + 7y = 8$, y

$L_3:\ 3nx - ny = 12$, se corten en un mismo punto.

SOLUCIÓN .- Intersectando L_1 con L_2: $\begin{cases} 7x - 2y = 5 \\ x + 7y = 8 \end{cases}$,

$\Rightarrow$ se obtiene $Q = (x, y) = (1, 1)$.

Y como $Q = (1, 1) \in L_3:\ 3nx - ny = 12 \ : \ \Rightarrow \quad 3n(1) - n(1) = 12$

Así $n = 6$.

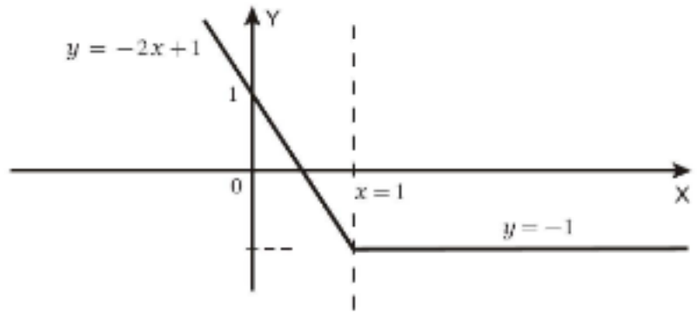
7.8 EJERCICIO .- Grafique la ecuación: $y = |x - 1| - x$.

SOLUCIÓN .- Si $x \geq 1$, $y = (x - 1) - x = -1 \quad \Rightarrow \quad y = -1$

Si $x < 1$, $y = -(x - 1) - x = 1 - 2x \quad \Rightarrow \quad y = -2x + 1$

$$y = |x - 1| - x \quad \Leftrightarrow \quad y = \begin{cases} -2x + 1 & , \text{ si } x < 1 \\ -1 & , \text{ si } x \geq 1 \end{cases}$$

La gráfica se muestra a continuación.



SERIE DE EJERCICIOS

1. Grafique la ecuación $|y - 2x| = 4 - 2x - y$.
2. Grafique la relación $R = \{\,(x, y) \in \mathbb{R}^2 / \ |x - 1| = |y - 1|\,\}$.
3. Halle las pendientes de las rectas que pasan por los puntos:

   a) $(2, 1)$ y $(3, 4)$ b) $(0, 1)$ y $(-1, 0)$

   c) $(6, -3)$ y $(-2, 1)$ d) $(1, 2)$ y $(1, -2)$.

   Además, indique el valor $y = b$ por donde estas rectas interceptan al Eje Y, si existen.
4. Halle las ecuaciones de las rectas indicadas en el problema (3) previo.
5. Una recta L con pendiente negativa pasa por $(-1, 1)$ y dista $\sqrt{5}$ unidades del punto $A = (4, 1)$. Hallar la pendiente y la ecuación de L.
6. Halle las ecuaciones de las rectas L_1 y L_2 que pasan por $(5, 6)$, tales que L_1 sea paralela a: $2x + y = 5$ y L_2 sea perpendicular a: $3x + 2y - 7 = 0$.
7. Una recta que pasa por el origen corta a las rectas $x - y = 3$, $y = 2x + 4$ en los puntos A y B respectivamente. Si el origen es punto medio del segmento $\overline{AB}$, halle las coordenadas del punto A.
8. Sea $P = (a, b)$ un punto tal que la recta OP que lo une con el origen tenga pendiente -3, y que la recta MP trazada por los puntos P y $M = (3, 1)$ tenga pendiente 2. Calcule el valor de: $a + b$.

11

GRÁFICAS DE RELACIONES

1. GRÁFICA DE LA PARÁBOLA

Ya hemos visto que la gráfica de la ecuación de primer grado de la forma $ax + by + c = 0$ es una recta. Ahora encontraremos las gráficas de las ecuaciones de segundo grado de la forma

$$y = ax^2 + bx + c$$

y que mediante el método de completar cuadrados siempre se puede transformar a la forma

$$y = a(x - h)^2 + k$$

donde b y k son ciertas constantes que dependen de a, b y c, y que pueden tomar cualquier valor real.

1.1 DESPLAZAMIENTOS HORIZONTALES

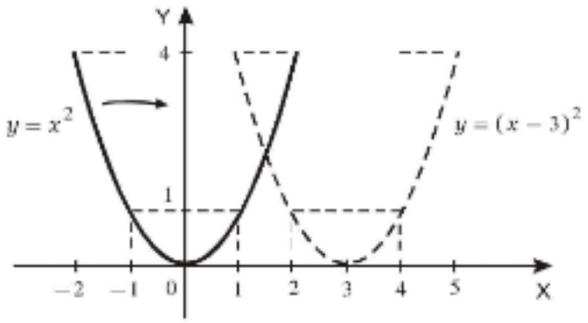
GRÁFICA DE LAS PARÁBOLAS $y = x^2$, $y = (x - 3)^2$:

Para $y = x^2$:

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	9	4	1	0	1	4	9

$y = (x - 3)^2$:

x	0	1	2	3	4	5	6
y	9	4	1	0	1	4	9

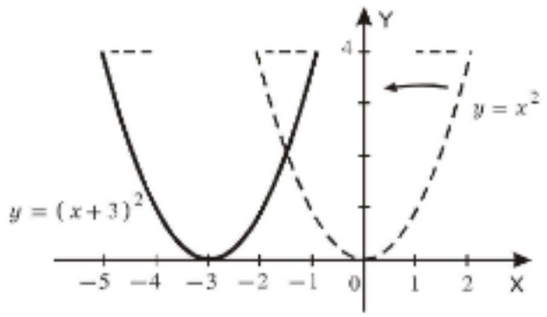


Note que la forma de la gráfica de la ecuación $y = (x-3)^2$ es la misma que la de la ecuación $y = x^2$, a la que se le ha desplazado 3 unidades HACIA LA DERECHA.

a) La gráfica de $y = a(x - h)^2$ tiene la misma forma que la de $y = ax^2$ pero desplazada h unidades **HORIZONTALMENTE HACIA LA DERECHA**.

b) La gráfica de $y = a(x + h)^2$ tiene la misma forma que la de $y = ax^2$ pero desplazada h unidades **HORIZONTALMENTE HACIA LA IZQUIERDA**.

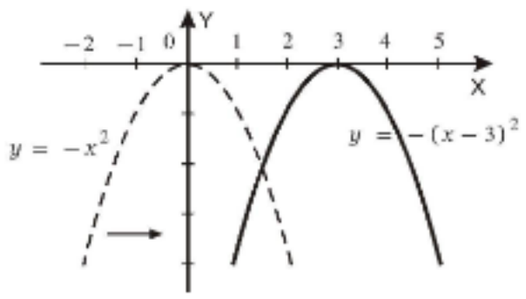
Por lo tanto, la gráfica de: $y = (x+3)^2$, es como sigue



GRÁFICAS DE:

$y = -x^2$

$y = -(x-3)^2$



Observe que la gráfica de $y = -x^2$ tiene la misma forma que la de la parábola $y = x^2$ ***pero volteada como si el EJE X actuara como un ESPEJO*** y allí se reflejara $y = x^2$.

1.2 DESPLAZAMIENTOS VERTICALES

GRÁFICAS DE : $y = x^2$, $y = x^2 + 1$

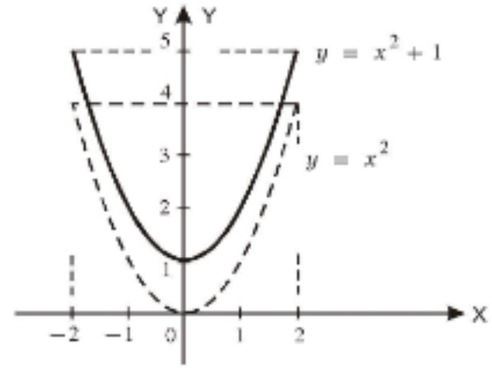
$y = x^2$:

x	−2	−1	0	1	2
y	4	1	0	1	4

$y = x^2 + 1$:

x	−2	−1	0	1	2
y	5	2	1	2	5

Aquí, notamos que la gráfica de $y = x^2 + 1$ tiene la misma forma que la de $y = x^2$ pero a la cual se le ha subido una (1) unidad VERTICALMENTE .



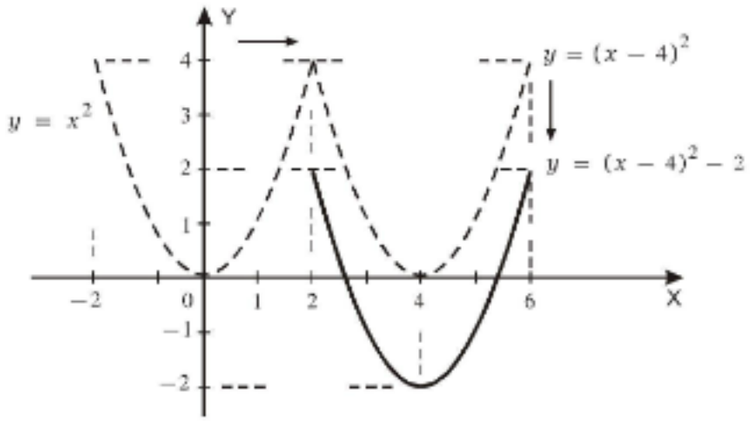
1.3 NOTA .- Si $k > 0$:

a) La gráfica de la ecuación $y = a(x - h)^2 + k$ tiene la misma forma que la de $y = ax^2$ pero desplazada k unidades **HORIZONTALMENTE HACIA ARRIBA**.

a) La gráfica de la ecuación $y = a(x - h)^2 - k$ tiene la misma forma que la de $y = ax^2$ pero desplazada k unidades **HORIZONTALMENTE HACIA ABAJO**.

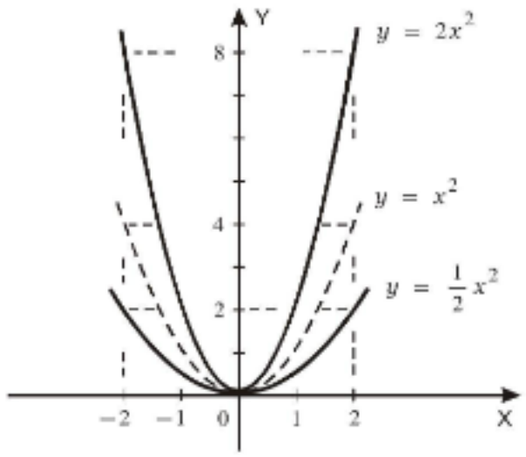
Combinando las NOTAS (1.1) y (1. 3) se puede graficar la parábola $y = (x-4)^2 - 2$, donde $h = 4$ y $k = 2$, partiendo de la gráfica

de $y = x^2$, a la que se le desplaza $h = 4$ unidades HACIA LA DERECHA y luego $k = 2$ unidades HACIA ABAJO .



Analicemos ahora la mayor o menor abertura de las parábolas, mediante las gráficas de:

$$y = x^2 \quad , \qquad y = \frac{1}{2}x^2 \quad , \qquad y = 2x^2$$



1.4 NOTA .- La gráfica de $y = ax^2$ es :

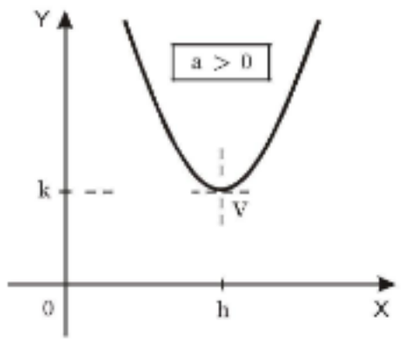
a) MAS ANGOSTA que la de $y = x^2$ si $|a| > 1$

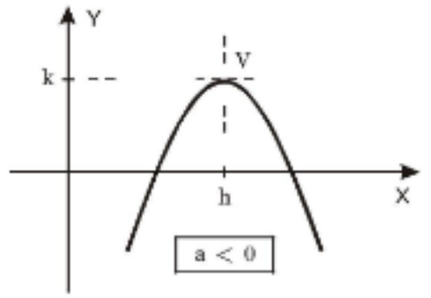
b) MAS ANCHA que la de $y = x^2$ si $0 < |a| < 1$.

1.5 VÉRTICE Y EJE DE LA PARÁBOLA

Con respecto a la parábola $y = ax^2 + bx + c$, que al completar cuadrados se transforma en $y = a(x-h)^2 + k \qquad (*)$

al punto $V = (h, k)$ se le llama el VÉRTICE de la parábola. Así, tenemos el siguiente esquema para la gráfica de $(*)$:





A la recta vertical $x = h$ se le llama EJE DE LA PARÁBOLA. Además, se puede probar completando cuadrados en $y = ax^2 + bx + c$ que las coordenadas del vértice son: $h = -\frac{b}{2a}$, $k = -\frac{b^2 - 4ac}{4a}$.

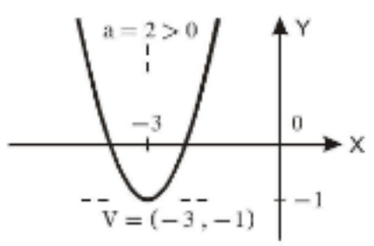
1.6 EJEMPLOS .- Bosqueje las gráficas de las parábolas:

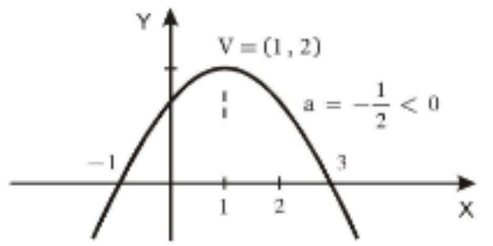
a) $y = 2x^2 + 12x + 17$, b) $2y = 2x - x^2 + 3$

Completando cuadrados:

a) $y = 2(x+3)^2 - 1 \quad \Rightarrow$ VÉRTICE $V = (h, k) = (-3, -1)$, $a = 2 > 0$

b) $y = -\frac{1}{2}(x-1)^2 + 2 \quad \Rightarrow$ VÉRTICE $V = (h, k) = (1, 2)$, $a = -\frac{1}{2} < 0$





2. GRÁFICAS QUE INVOLUCRAN EL VALOR ABSOLUTO

Aquí bosquejaremos las gráficas de las ecuaciones del tipo:

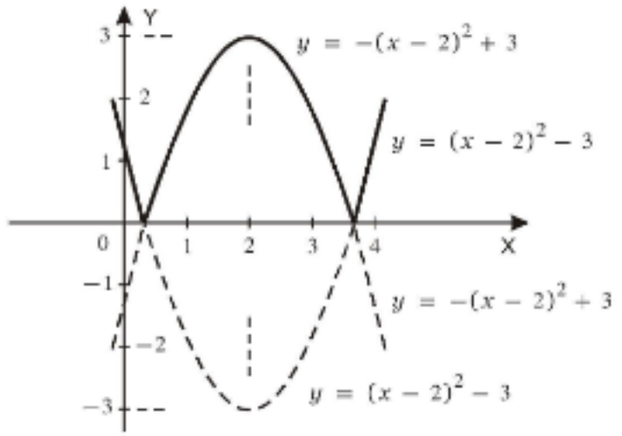
$$y = \left| a(x - h)^2 + k \right|$$

Por ejemplo,

$$y = \left| -x^2 + 4x - 1 \right| = \left| -(x-2)^2 + 3 \right| = \left| (x-2)^2 - 3 \right| \quad \Leftrightarrow$$

$$y \geq 0 \quad \wedge \quad [\, y = (x-2)^2 - 3 \quad \vee \quad y = -(x-2)^2 + 3 \,]$$

donde los puntos de la gráfica son aquellos de cada parábola pero que se encuentran en el semiplano superior $y \geq 0$:

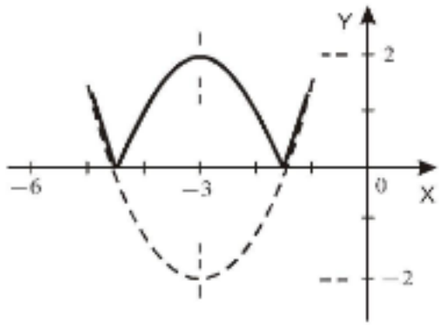


La gráfica resultante (línea continua), como vemos, se obtiene también considerando al EJE X como un ESPEJO, y donde la parte de la parábola $y = (x-2)^2 - 3$ que se encuentra en el semiplano inferior $y \leq 0$ $(*)$ se ha reflejado hacia el semiplano superior $y \geq 0$ como si hubiese girado en 180° alrededor del EJE X .

2.1 MÉTODO PRÁCTICO

Para graficar la ecuación $y = |\, a(x-h)^2 + k \,|$ donde se ha acomodado de manera que $a > 0$, se grafica $y = a(x-h)^2 + k$, y si alguna parte de esta parábola cae en el semiplano inferior $y \leq 0$, esta parte se ha de reflejar en el ESPEJO (EJE X) "girando" hacia el semiplano superior.

Por ejemplo, para graficar $y = |-(x+3)^2 + 2| = |(x+3)^2 - 2|$ se grafica la parábola $y = (x+3)^2 - 2$, y lo que esté en la zona $y \leq 0$ lo reflejamos (respecto al EJE X) HACIA LA PARTE SUPERIOR $y \geq 0$, como sigue:



Línea punteada: $y = (x+3)^2 - 2$

Línea continua: $y = \left| (x+3)^2 - 2 \right|$

Esta misma técnica se generaliza a ecuaciones del tipo:

$$y = |\, (\text{Expresión en } x) \,|$$

3. LA CIRCUNFERENCIA

Una CIRCUNFERENCIA es el conjunto de todos los puntos $P(x, y)$ del plano, que equidistan de un punto fijo $C = (h, k)$ llamado el CENTRO. Al valor de dicha distancia constante (positiva) se le llama RADIO de la circunferencia, y se le denota

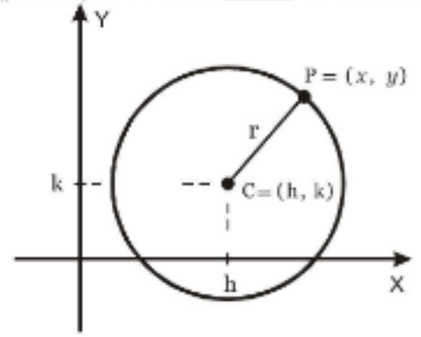
$$r = d(P, C) > 0$$

$$= \sqrt{(x-h)^2 + (y-k)^2}$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\boxed{(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2}$$

ECUACIÓN DE LA CIRCUNFERENCIA



EJEMPLOS .-

1. La ecuación $(x-2)^2 + (y-3)^2 = 25$ $(= 5^2)$ corresponde a una circunferencia con centro $C = (h, k) = (2, 3)$, y radio $r = 5$.
2. La ecuación: $(x+1)^2 + (y-4)^2 = 6$ corresponde a una circunferencia con centro $C = (h, k) = (-1, 4)$, y radio $\sqrt{6}$.

3.1 EJERCICIO .- Especificar qué tipo de gráfica tiene la ecuación:

$$12x - 4y + 2x^2 + 2y^2 + 13 = 0 \ .$$

SOLUCIÓN.- Completando cuadrados en cada variable:

$$2(x+3)^2 - 18 + 2(y-1)^2 - 2 + 13 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x+3)^2 + (y-1)^2 = 7/2$$

que corresponde a una circunferencia de centro $C = (-3, 1)$ y radio $\sqrt{7/2}$.

3.2 NOTA .- I) De la relación $a^2 + b^2 = 0 \Leftrightarrow a = 0 \wedge b = 0$ se sigue que:

$$(*):\ (x-h)^2 + (y-k)^2 = 0 \Leftrightarrow x - h = 0 \wedge y - k = 0 \Leftrightarrow x = h \wedge y = k$$

que tiene como única solución la intersección de las rectas $x = h$ y $y = k$, es decir el punto de coordenadas (h, k) es el único punto que satisface la ecuación $(*)$ dada.

II) Una ecuación del tipo $(x-h)^2 + (y-k)^2 = -r^2$, con $r > 0$, no tiene representación gráfica en el plano X Y pues una suma de cuadrados de números reales nunca puede ser negativa en $\mathbb{R}$; su conjunto solución es ***vacío***.

Ambos casos (I) y (II) son considerados "***casos especiales***" de circunferencias.

3.3 TEOREMA .- Toda ecuación de la forma: $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$ representa una circunferencia ó uno de sus casos especiales.

3.4 EJERCICIO .- Halle el Centro y el radio de la circunferencia que pasa por $A = (3, 3)$, $B = (8, -2)$, y $C = (6, 2)$.

SOLUCIÓN .- Sea $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$ $(*)$, su ecuación. Como los puntos A, B y C pertenecen a esta circunferencia entonces satisface esta ecuación, y por lo tanto para:

$A = (3, 3)$: $9 + 9 + 3D + 3E + F = 0$ $\quad 3D + 3E + F = -18$

$B = (8, -2)$: $64 + 4 + 8D - 2E + F = 0$ $\Leftrightarrow$ $8D - 2E + F = -68$

$C = (6, 2)$: $36 + 4 + 6D + 2E + F = 0$ $\quad 6D + 2E + F = -40$

Resolviendo este sistema de ecuaciones simultáneas: $D = -6$, $E = 4$, $F = -12$, reemplazando en $(*)$ y completando cuadrados :

$$x^2 + y^2 - 6x + 4y - 12 = 0 \Leftrightarrow (x-3)^2 + (y+2)^2 = 25 ,$$

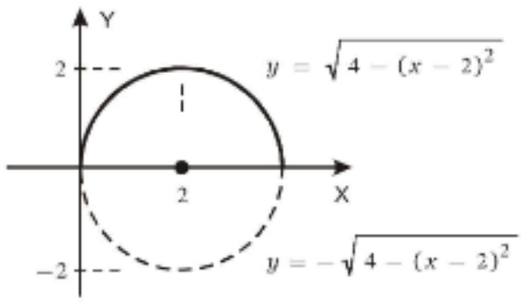
obteniendo así el CENTRO $C = (3, -2)$ y el radio $r = 5$.

3.5 EJERCICIO .- Grafique la ecuación : $y = \sqrt{4 - (x-2)^2}$.

SOLUCIÓN .- Esta ecuación considera que $y \geq 0$ (semiplano superior solamente), y así, en forma equivalente:

$$y^2 = 4 - (x-2)^2 , \ y \geq 0 \Leftrightarrow (x-2)^2 + y^2 = 4 , \ y \geq 0$$

cuya gráfica corresponde a la parte de la circunferencia de Centro $(2, 0)$ y radio $r = 2$ que se encuentra en el semiplano superior $y \geq 0$:

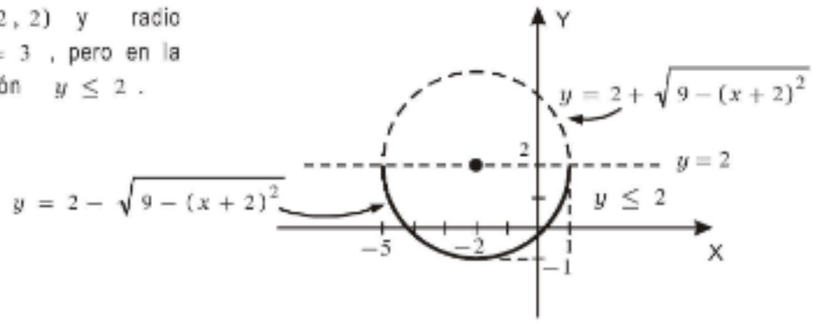


3.6 EJERCICIO .- Grafique la ecuación: $y = 2 - \sqrt{5 - 4x - x^2}$.

SOLUCIÓN .- Observemos que $y \leq 2$; además, se tiene que

$$(y-2)^2 = 9 - (x+2)^2 \Leftrightarrow (x+2)^2 + (y-2)^2 = 9$$

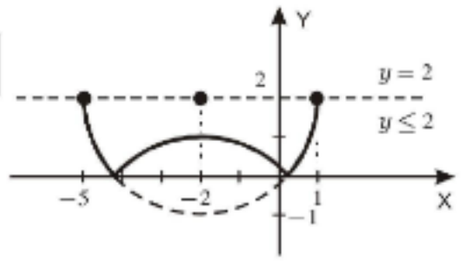
de modo que la gráfica buscada corresponde a la parte de la circunferencia de Centro $(-2, 2)$ y radio $r = 3$, pero en la región $y \leq 2$.



3.7 EJERCICIO .- Grafique $y = \left| 2 - \sqrt{9 - (x+2)^2} \right|$.

SOLUCIÓN .- Se sigue el mismo procedimiento que para $y = \left| a(x-h)^2 + k \right|$ en el que el EJE X hace el papel de un ESPEJO para reflejar hacia el semiplano superior $y \geq 0$ todo lo que está en el semiplano inferior $y \leq 0$.
Así, utilizando la gráfica del Ejercicio (3.6) previo, se tiene la gráfica siguiente:

Gráfica de: $y = \left| 2 - \sqrt{9 - (x+2)^2} \right|$
(curva gruesa continua)



3.8 EJERCICIO .- Grafique la relación definida por:

$$R = \{(x, y) / \quad 8 \le x^2 + y^2 \le 16 \quad \wedge \quad |x| + |y| \le 4 \quad \}.$$

SOLUCIÓN .- R es la intersección de las regiones (i) y (ii):

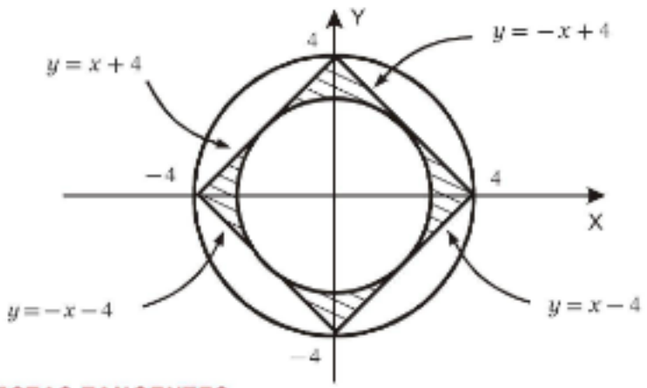
i) $8 \le x^2 + y^2 \le 16$ corresponde a la zona de barrido de la circunferencia $x^2 + y^2 = r^2$ desde $r^2 = 8$ hasta $r^2 = 16$, es decir, desde $r = 2\sqrt{2}$ hasta $r = 4$.

ii) $y \ge 0$: $|x| \le 4 - y \quad \Leftrightarrow \quad 0 \le y \le 4 \quad \wedge \quad y - 4 \le x \le 4 - y$

$\Leftrightarrow \quad 0 \le y \le 4 \quad \wedge \quad y \le x + 4 \quad \wedge \quad y \le -x + 4$,

$y < 0$: $|x| \le y + 4 \quad \Leftrightarrow \quad -4 \le y < 0 \quad \wedge \quad -4 - y \le x \le y + 4$

$\Leftrightarrow \quad -4 \le y \le 0 \quad \wedge \quad y \ge -x - 4 \quad \wedge \quad y \ge x - 4$



3.9 RECTAS TANGENTES

Sabemos que una Ecuación de 2^o grado en UNA VARIABLE:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

1) Tiene una única solución $\Leftrightarrow$ su **DISCRIMINANTE** $\Delta = b^2 - 4ac =$ **CERO**,
2) Tiene dos raíces reales distintas $\Leftrightarrow \quad b^2 - 4ac > 0$
3) No tiene ninguna solución real $\Leftrightarrow \quad b^2 - 4ac < 0$

Este criterio se utiliza cuando se desea hallar una recta L_T: $\boxed{y = mx + b}$ que sea **TANGENTE** a cualquier curva C cuya ecuación cuadrática tiene la forma:

$$C: \quad Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \qquad (*)$$

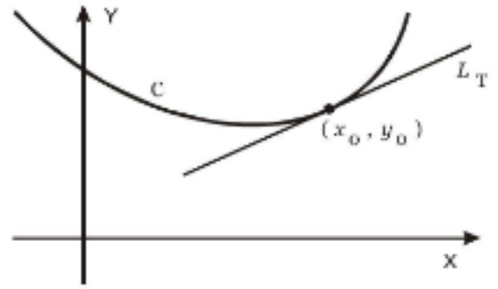
para lo cual se reemplaza en $(*)$ la relación $y = mx + b$ obteniéndose una ecuación de 2^o grado en una sola variable, digamos:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

y como esta ecuación **DEBE TENER UNA UNICA SOLUCIÓN** por la **CONDICIÓN DE TANGENCIA**, entonces debe cumplirse que su

DISCRIMINANTE $= 0$

$$b^2 - 4ac = 0$$



3.10 EJEMPLO .- En el punto $(3, 3)$ halle la ecuación de la recta tangente a la parábola $2y = x^2 - 2x + 3$.

SOLUCIÓN .- Recta Tang. L_T: $y = mx + b$. Como $(3, 3) \in L_T$ entonces $3 = (m)(3) + b \quad \Rightarrow \quad b = 3 - 3m \quad \Rightarrow \quad L_T: \ y = mx + 3(1 - m) \quad \ldots (*)$

Reemplazando en la parábola: $2(mx + 3 - 3m) = x^2 - 2x + 3$

$\Leftrightarrow \quad x^2 - 2(m + 1)x + 3(2m - 1) = 0$,

y por la Condición de Tangencia: **DISCRIMINANTE = CERO**

$\Rightarrow \quad 4(m + 1)^2 - 12(2m - 1) = 0 \quad \Rightarrow \quad (m - 2)^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad m = 2.$

$\therefore$ De $(*)$: $L_T: \ y = 2x - 3$.

3.11 EJEMPLO .- Halle el valor de la constante k para que la recta $y = 2x + k$ sea tangente a la parábola $P: \ y = 6x^2 - x + 3$.

SOLUCIÓN . Reemplazamos $y = 2x + k$ en $P: \ y = 6x^2 - x + 3 \quad \Rightarrow$

$6x^2 - 3x + (3 - k) = 0$, y como debe cumplirse la CONDICIÓN DE TANGENCIA entonces: **DISCRIMINANTE = CERO** :

$$b^2 - 4ac = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 9 - 4(6)(3 - k) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad k = 21/8 .$$

3.12 EJERCICIO .- Halle la ecuación de las dos rectas tangentes trazadas desde el punto $(2, 7)$ a la circunferencia $x^2 + y^2 = 6x + 16$.

SOLUCIÓN .- Sea $L_T: \ y = mx + b$ una ecuación genérica de la recta tangente.

Como $(2, 7) \in L_T: \quad 7 = 2m + b \quad \Rightarrow \quad b = 7 - 2m$

$\Rightarrow \quad L_T: \ y = mx + (7 - 2m)$, que al reemplazar en la ecuación de la circunferencia se tiene $x^2 + (mx + 7 - 2m)^2 = 6x + 16$

$\Rightarrow \quad (1 + m^2)x^2 - 2(2m^2 - 7m + 3)x + (4m^2 - 28m + 33) = 0.$

Aquí aplicamos la Condición de Tangencia DISCRIMINANTE = CERO :

$$12m^2 - 7m - 12 = (3m - 4)(4m + 3) = 0 \quad \Rightarrow \quad m_1 = \frac{4}{3}, \quad m_2 = \frac{-3}{4}.$$

Así, existen dos rectas TANGENTES que pasan por $(2, 7)$:

$$L_1: \quad y - 7 = \frac{4}{3}(x - 2) \quad , \qquad L_2: \quad y - 7 = (-\frac{3}{4})(x - 2) \quad .$$

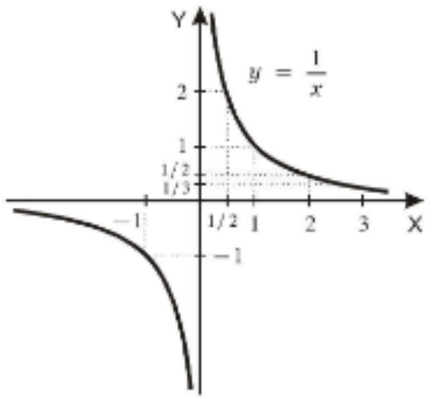
4. GRÁFICAS DE ALGUNAS HIPÉRBOLAS

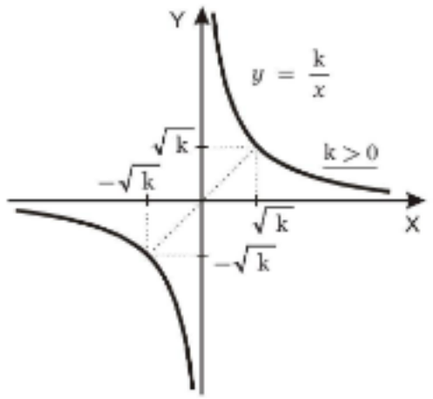
En esta sección presentamos las gráficas de las hipérbolas

$$y = \frac{1}{x} \quad , \qquad y = \frac{k}{x} \quad , \qquad y = \frac{k}{x - a} \qquad (k \neq 0).$$

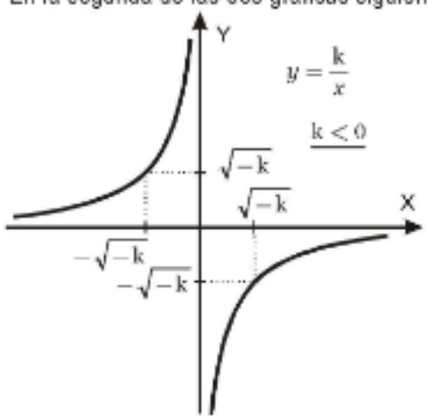
$y = \frac{1}{x}$:

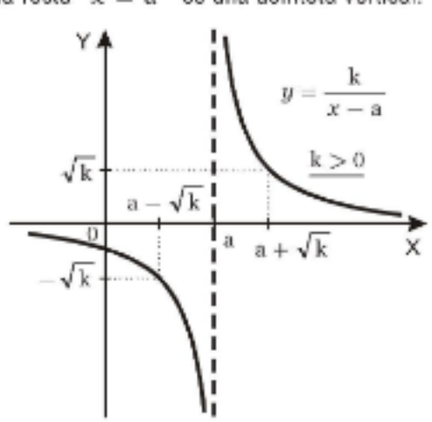
x	± 1	± 2	± 3	± 4	$\pm 1/2$	$\pm 1/3$	$\pm 1/4$
y	± 1	$\pm 1/2$	$\pm 1/3$	$\pm 1/4$	± 2	± 3	± 4





Note que el EJE Y $(x = 0)$ es una asíntota vertical.
En la segunda de las dos gráficas siguientes la recta $x = a$ es una asíntota vertical.



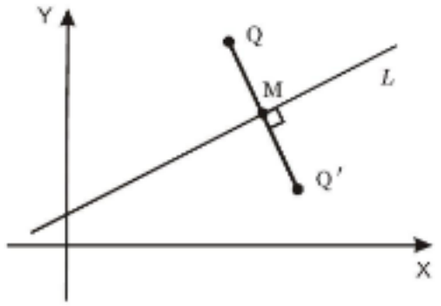


5. SIMETRÍA DE GRÁFICAS

Sea L una recta y Q un punto cualquiera, entonces se dice que el punto Q' es el SIMÉTRICO de Q con respecto a la recta L si

i) $L \perp \overline{QQ'}$, ($\overline{QQ'}$ es el segmento que va de Q a Q') y si

ii) L intercepta a $\overline{QQ'}$ en su punto medio M .



La recta L es llamada EJE DE SIMETRÍA de los dos puntos Q y Q', y actúa como un ESPEJO. Se dice además que dos puntos P y Q son SIMÉTRICOS (ENTRE SÍ) CON RESPECTO A UN PUNTO M si M es el punto medio del segmento $\overline{PQ}$.

Este punto M es llamado CENTRO DE SIMETRÍA.

5.1 SIMETRÍA RESPECTO AL EJE X

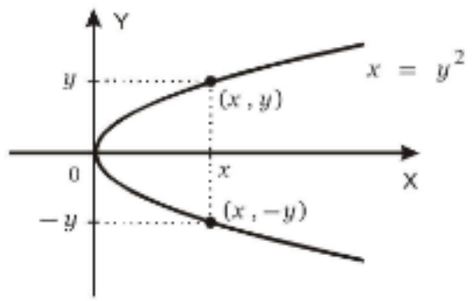
La gráfica de una relación R en el plano es SIMÉTRICA RESPECTO AL EJE X si: $(x, y) \in R \quad \Rightarrow \quad (x, -y) \in R$. Es decir, si la relación R está definida por una ecuación, entonces esta ecuación NO VARÍA al reemplazar y por $-y$.

Así en la ecuación $x = y^2$

si reemplazamos y por $-y$:

$$x = (-y)^2 = y^2$$

vemos que la ecuación original NO VARÍA. Luego, la gráfica es simétrica respecto al EJE X.



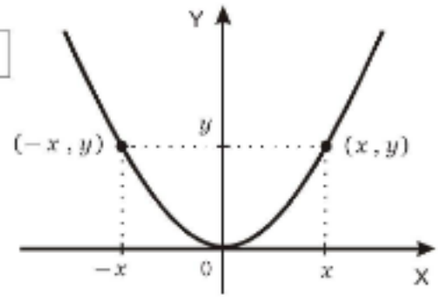
5.2 SIMETRÍA RESPECTO AL EJE Y

Esta simetría ocurre si: $(x, y) \in R \quad \Rightarrow \quad (-x, y) \in R$.

Esta definición significa que si la relación R estuviera definida por una ecuación, ésta **NO DEBE VARIAR** al reemplazar x por $-x$.

Así, si en la ecuación $y = x^2$ reemplazamos x por $-x$: $y = (-x)^2 = x^2$, obtenemos la ecuación original, y su gráfica resulta ser Simétrica respecto al EJE Y .

$y = x^2$



5.3 SIMETRÍA RESPECTO AL ORIGEN

Esto se presenta si: $(x\,,\,y) \in R \;\Rightarrow\; (-x\,,\,-y) \in R$

Es decir, si la relación R estuviera definida por una ecuación en la cual se sustituye simultáneamente

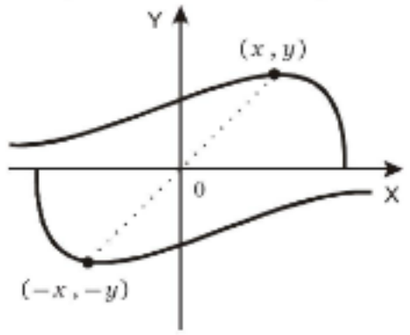
y $\begin{cases} x \text{ por } -x \\ y \text{ por } -y\,, \end{cases}$ ésta NO VARÍA.

Por ejemplo, en $x^2 + y^2 = 16$:

$(-x)^2 + (-y)^2 = 16$

$\Rightarrow \quad x^2 + y^2 = 16\,,$

la ecuación NO VARÍA.



SERIE DE EJERCICIOS

1. Bosqueje las gráficas de:
   a) $y = x^2 + 6x + 8$ c) $y = 2x^2 - 12x + 10$
   b) $y = 2x - x^2 + 6$ d) $y = 18 - 8x - 2x^2$.
2. Bosqueje las gráficas de (1) cuando se reemplazan los segundos miembros por sus valores absolutos.
3. Bosqueje las gráficas de:
   a) $x = y^2 - 6y - 8$ c) $x = 2y^2 - 12y + 10$
   b) $x = 2y - y^2 + 6$ d) $x = 18 - 8y - 2y^2$
4. Bosqueje la gráfica de: a) $x = |\, y^2 - 6y - 8\,|$. Grafique además (b), (c) y (d) del Problema [3] con esta modificación.
5. Bosqueje, si es posible, las gráficas de:

   a) $x^2 + y^2 - 6x + 4y - 12 = 0$ d) $x^2 + y^2 - 6 = 0$
   b) $2x^2 + 2y^2 + 16x - 8y = 0$ e) $x^2 + y^2 - 2|\,x\,| - 6y - 15 = 0$
   c) $x^2 + y^2 + 6x - 2y + 1 = 0$ f) $4(x+1)^2 + 4(y-1)^2 = 100$
6. Bosqueje las gráficas de:
   a) $y = -2 - \sqrt{16 - 6x - x^2}$ c) $y = 1 + \sqrt{-x^2 + 6x}$
   b) $x = -4 + \sqrt{16 + 4y - y^2}$ d) $x = -\sqrt{6y - y^2}$
   SUG: Las gráficas corresponden a una parte de una de las gráficas del Prob. [5] .
7. Bosqueje las gráficas del Problema [6] incluyendo el lado derecho dentro de un valor absoluto.
8. Bosqueje las gráficas de
   a) $y = -\sqrt{x - 2}$ c) $y = 3 + \sqrt{4 - 2x}$
   b) $y = -\sqrt{4 - x}$ d) $y = -4 - \sqrt{2x - 6}$
9. Halle el punto de tangencia de la circunferencia $x^2 + y^2 - 2x - 4y = 0$ con la recta $x + 2y = 10$, si existe. Rpta: $(2\,,4)$.
10. Se sabe que la recta $y = 2x - 5$ es tangente a la curva $y = x^2 - 2x + a$ en el punto $P = (b\,,c)$. Halle $a\,,b$ y c.
    Rpta.: $a = -1\,,\; b = 2\,,\; c = -1$.
11. La recta $4x - y + 2 = 0$ es tangente a la curva $y = x^2 + px + q$ en el punto $(1\,,6)$. Halle $p\,,q$. Rpta: $p = 2\,,\; q = 3$.
12. Hallando la ecuación de la recta tangente a la curva $y = kx^2 + 3(k-1)x + 3$ en el punto de abscisa $x = 1$, determine el valor de k de modo que dicha tangente pase por el origen. Rpta: $k = 3$.
13. Halle el punto Q que es simétrico al punto $P = (-5\,,7)$ con respecto a la recta $2x - y - 3 = 0$. Rpta: $Q = (11\,,-1)$.

6. LA PARÁBOLA

En esta sección estudiaremos el caso de la parábola definida por la ecuación $y = ax^2 + bx + c$, con $a \neq 0$, así como el caso de la parábola $x = ay^2 + by + c$.

6.1 PRIMER CASO. En la parábola $y = ax^2 + bx + c$, con $a \neq 0$,

$$\Rightarrow \qquad y = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right] \qquad (*)$$

a la expresión $\Delta = b^2 - 4ac$ se le llama DISCRIMINANTE del trinomio cua-

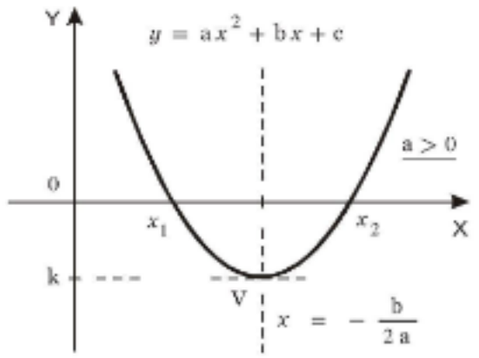
drático del segundo miembro.

Ya sabemos que la recta

$$x = -\frac{b}{2a}$$

viene a ser el EJE de esta parábola cuyo vértice es el punto $V = (h, k)$

$$V = (-\frac{b}{2a}, -\frac{b^2 - 4ac}{4a^2})$$



Los interceptos x_1 , x_2 , si existieran , de la parábola con el EJE X son los valores de x para los cuales $y = 0$, de modo que vienen a ser las raíces de la ecuación

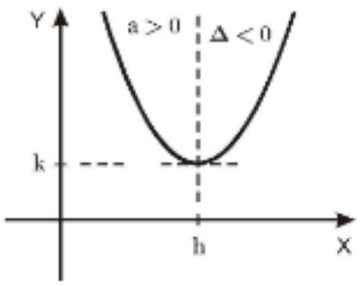
$$y = 0 \quad \Leftrightarrow \quad ax^2 + bx + c = 0 \qquad (\alpha)$$

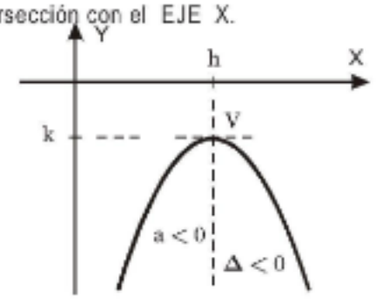
y como $\quad y = ax^2 + bx + c = a[(x + \frac{b}{2a})^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}] \qquad (*)$

entonces

1) Si $\Delta = b^2 - 4ac < 0$: No hay soluciones reales de (α), y
   - si $a > 0 \Rightarrow$ de $(*)$: $y = ax^2 + bx + c > 0$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$
   - si $a < 0 \Rightarrow$ de $(*)$: $y = ax^2 + bx + c < 0$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$

lo que implica que $ax^2 + bx + c$ nunca se hace CERO, para ningún número real x.
Esto implica que $y \neq 0$, y que no existe intersección con el EJE X.



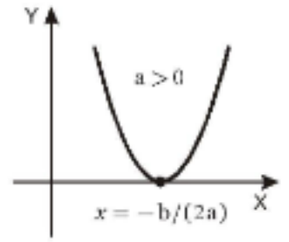


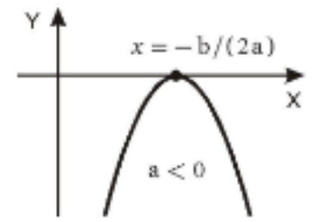
2) Si $\Delta = b^2 - 4ac = 0$, entonces $y = 0$ para un único valor de x, pues de $(*)$: $\quad y = a(x + \frac{b}{2a})^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = -\frac{b}{2a}$, [raíz doble].

Esto indica que existe un solo punto de intersección con el EJE X , el VÉRTICE $V = (-\frac{b}{2a}, 0)$, y por lo tanto , se puede factorizar como un cuadrado per-

fecto :

$$y = ax^2 + bx + c = a(x + \frac{b}{2a})^2 .$$



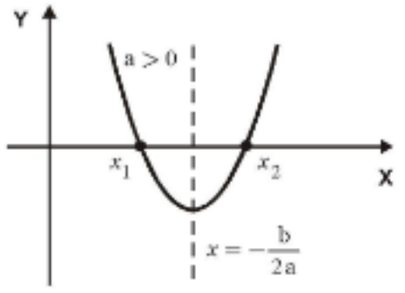


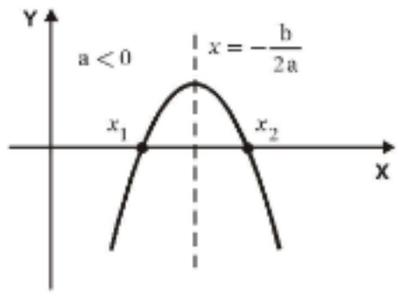
3) Si $\Delta = b^2 - 4ac > 0$, entonces la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$ **TIENE DOS RAÍCES REALES DISTINTAS:**

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad , \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

de donde resulta que $y = 0$ para dos valores reales distintos de x: x_1 y x_2.
Esto quiere decir que existen dos puntos de intersección de la parábola con el EJE X, y se puede factorizar en la forma:

$y = ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$, con x_1 , x_2 reales distintos





Por ejemplo $y = x^2 - 2x - 3$ tiene su DISCRIMINANTE

$\Delta = (-2)^2 - 4(1)(-3) = 16 > 0$,

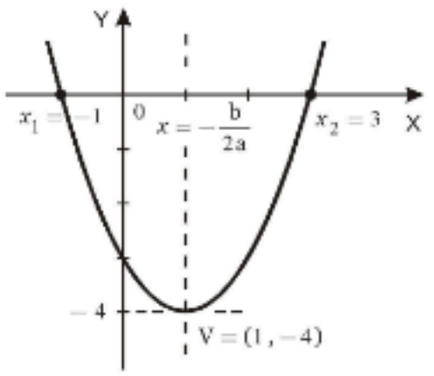
entonces hay dos puntos de intersección con el EJE X . En efecto

$y = x^2 - 2x - 3 = (x - 3)(x + 1)$

$\Rightarrow \quad y = 0$ para $x_1 = -1$, $x_2 = 3$

y el VÉRTICE resulta ser el punto

$V = (1, -4)$.



6.2 EJERCICIO .- Resolver el siguiente sistema de ecuaciones simultáneas e interpretarlo geométricamente:

$$\begin{cases} y = x^2 - 4x + 3 \\ x + y = 7 \end{cases}$$

SOLUCIÓN.-

Reemplazando $y = 7 - x$ en la primera de las ecuaciones:

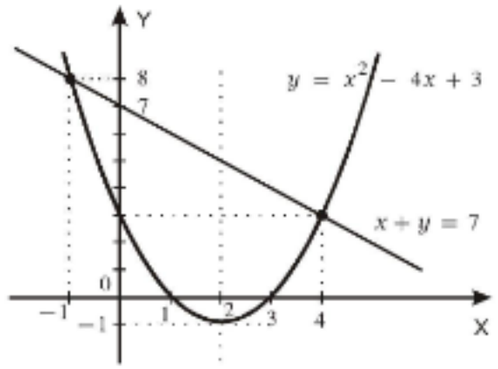
$$7 - x = x^2 - 4x + 3 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - 3x - 4 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x-4)(x+1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} x = 4 & \rightarrow & y = 3 \\ x = -1 & \rightarrow & y = 8 \end{bmatrix}$$

resultando así dos puntos:

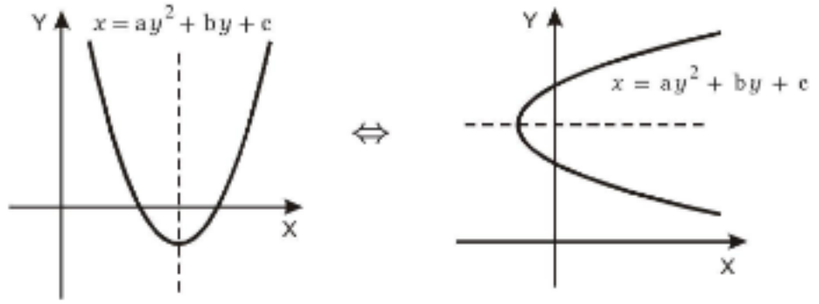
$$P = (4, 3), \; Q = (-1, 8)$$

Notemos que resolver este sistema equivale a intersectar la parábola $y = x^2 - 4x + 3$ con la recta $x + y = 7$, obteniendo los dos puntos P y Q de intersección.



6.3 SEGUNDO CASO. La parábola: $x = ay^2 + by + c, \quad (a \neq 0)$

La gráfica de esta parábola se consigue graficando la parábola de ecuación $y = ax^2 + bx + c$ y luego intercambiando entre sí los Ejes X y Y:



6.4 EJERCICIO .- Grafique: $y = 2 - \sqrt{x-1}$.

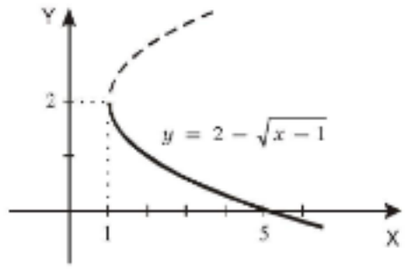
SOLUCIÓN .- Notemos que $x \geq 1$, $y \leq 2$.

La gráfica de $y = 2 - \sqrt{x-1}$ corresponde a una parte de la gráfica de:

$$(y-2)^2 = x - 1$$

$$\Leftrightarrow \quad x = (y-2)^2 + 1 \; ,$$

es decir, es aquella parte de esta parábola que se encuentra en la zona $y \leq 2$.



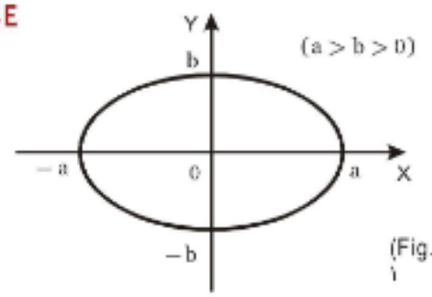
7. ECUACIÓN DE LA ELIPSE

La ecuación (estándar) de una elipse tiene la forma general:

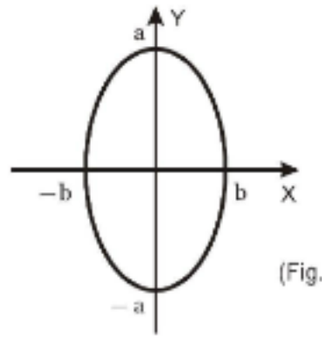
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad \text{(Fig.1)}$$

ó

$$\frac{y^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} = 1 \qquad \text{(Fig.2)}$$



(Fig.1



(Fig.2)

AL ORIGEN se le llama el CENTRO de estas elipses. Al segmento $[-a, a]$ se le llama EJE MAYOR, y al segmento $[-b, b]$ EJE MENOR. Cuando la elipse es trasladada de forma que su CENTRO se ubique en el punto de coordenadas $C = (h, k)$, las ecuaciones se transforman respectivamente en:

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1 \quad , \qquad \frac{(y-k)^2}{a^2} + \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1 \; .$$

7.1 EJERCICIO .- Halle el centro de la elipse:

$$9x^2 + 4y^2 - 36x + 8y + 4 = 0 \; .$$

SOLUCIÓN .- Completando cuadrados en cada variable:

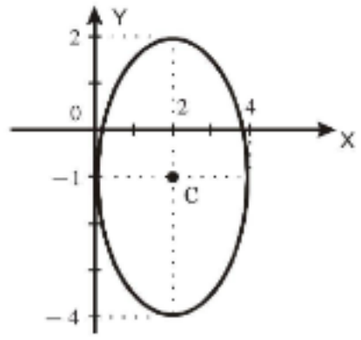
$$9(x-2)^2 + 4(y+1)^2 = 36 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{(x-2)^2}{4} + \frac{(y+1)^2}{9} = 1$$

De la última ecuación tenemos que:

$$a = 3 \; , \quad b = 2 \; ,$$

y el CENTRO corresponde al punto

$$C = (h, k) = (2, -1)$$



7.2 EJERCICIO .- Halle las rectas tangentes a la elipse: $9x^2 + 4y^2 = 36$ que sean paralelas a la recta $3x - 2y = 8$.

SOLUCIÓN .- Sea L_T tal recta tangente: $y = mx + b$, cuya pendiente debe ser igual a la pendiente de la recta $3x - 2y = 8$, es decir,

$m = 3/2$. Luego, L_T: $y = \frac{3}{2}x + b$; reemplazando en la elipse:

$9x^2 + 4(\frac{9}{4}x^2 + 3bx + b^2) = 36 \iff 9x^2 + 6bx - (18 - 2b^2) = 0$

y aplicando la Condición de Tangencia: **DISCRIMINANTE = CERO** $\iff$

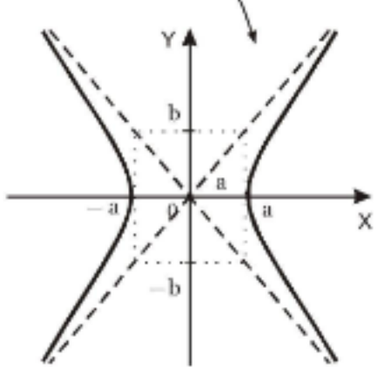
$36b^2 - 4(9)(2b^2 - 18) = 0 \iff b^2 = 18 \iff b = \pm 3\sqrt{2}$;

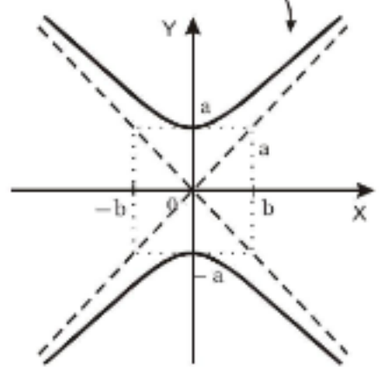
$\therefore$ Las rectas tangentes buscadas son L_T: $y = \frac{3}{2}x \pm 3\sqrt{2}$.

8. ECUACIÓN DE LA HIPÉRBOLA

Las ecuaciones estándar de una hipérbola, donde $a, b > 0$, son:

$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, ó $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$,





Las rectas $y = \pm \frac{b}{a}x$ se llaman **ASÍNTOTAS** de la primera hipérbola, y las rectas $y = \pm \frac{a}{b}x$ corresponden a las **ASÍNTOTAS** de la segunda hipérbola.

En el caso en que $a = b$ las hipérbolas se llaman EQUILÁTERAS.

Al origen de coordenadas O se le llama el CENTRO de la hipérbola. Cuando la hipérbola se traslada tal que su Centro se ubique en el punto $C = (h, k)$ entonces las ecuaciones anteriores se transforman respectivamente en :

$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$, $\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1$.

8.1 EJERCICIO .- Resolver el sistema de ecuaciones simultáneas siguiente e interpretarlo geométricamente: $\begin{cases} x^2 - y^2 + 8 = 0 \\ y^2 = 6x \end{cases}$.

SOLUCIÓN .- Reemplazando la segunda ecuación en la primera:

$x^2 - 6x + 8 = 0 \iff (x-4)(x-2) = 0 \iff$

$[x = 4,\ y^2 = 24 \to y = \pm 2\sqrt{6}\ ] \cup [x = 2,\ y^2 = 12 \to y = \pm 2\sqrt{3}\ ]$

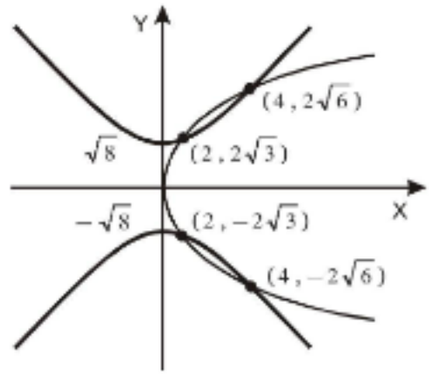
Así, existen 4 puntos solución:

$(4, \pm 2\sqrt{6})$ y $(2, \pm 2\sqrt{3})$.

Estos son los puntos de intersección entre la hipérbola:

$\frac{y^2}{8} - \frac{x^2}{8} = 1$

y la parábola: $y^2 = 6x$.



8.2 EJERCICIO .- La recta $x - y + 1 = 0$ es tangente a la hipérbola $(a > 0)$ $(x^2/a^2) - (y^2/4) = 1$ en el punto Q. Halle Q.

SOLUCIÓN : Reemplazando $y = x + 1$ (de la recta tangente) en la hipérbola:

$4x^2 - a^2(x+1)^2 = 4a^2 \iff (4 - a^2)x^2 - 2a^2x - 5a^2 = 0 \quad (*)$.

Aquí aplicamos la Condición de Tangencia: **DISCRIMINANTE = CERO**

$4a^2 + 20(4 - a^2) = 0 \iff a^2 = 5$.

En $(*)$: $0 = x^2 + 10x + 25 = (x+5)^2 \iff x = -5,\ y = -4$.

$\therefore$ El punto de tangencia es $Q = (-5, -4)$.

8.3 NOTA . En la sección (4) de este Capítulo presentamos la curva de ecuación: $y = \frac{1}{x}$ y la denominábamos también HIPÉRBOLA. De la gráfica siguiente veremos que esta ecuación no solamente representa una hipérbola sino que además representa a una HIPÉRBOLA EQUILÁTERA.

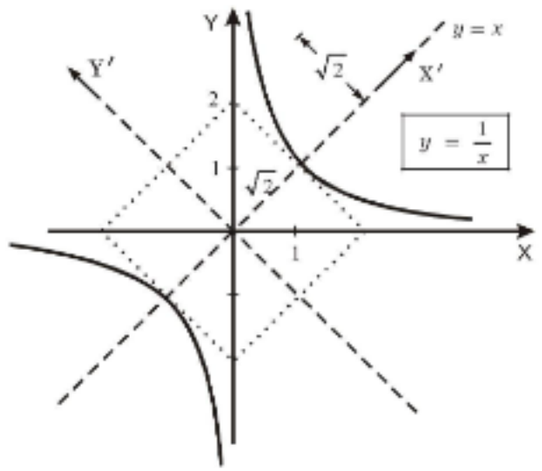
Observe que los EJES X y Y son sus asíntotas y que en el nuevo SISTEMA DE COORDENADAS X′Y′ esta curva $y = \frac{1}{x}$ tiene una ecuación cuya forma es:

$$\frac{x'^2}{(\sqrt{2})^2} - \frac{y'^2}{(\sqrt{2})^2} = 1 ,$$

es decir $\dfrac{x'^2}{2} - \dfrac{y'^2}{2} = 1$

pues corresponde a una hipérbola con Centro el Origen de coordenadas, y con semiejes

$$a = b = \sqrt{2} .$$



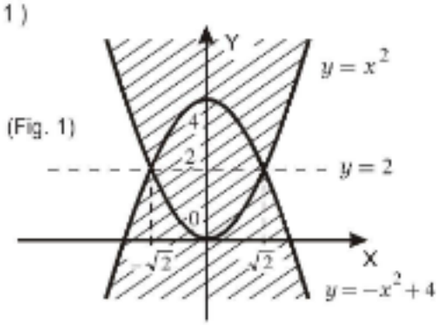
9. GRÁFICAS DE INECUACIONES (B)

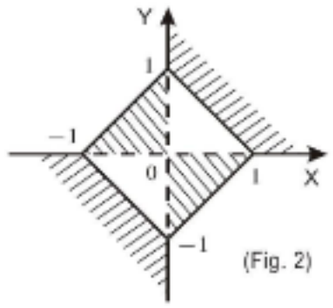
9.1 EJERCICIO .- Grafique la relación: $x^2 - 2 \leq |y - 2|$.

SOLUCIÓN .- $[\ y \geq 2 : \ x^2 - 2 \leq y - 2 \iff y \geq x^2\ ] \ \vee$

$\vee \ [\ y < 2 : \ x^2 - 2 \leq -(y - 2) \iff y \leq -x^2 + 4\ ]$

(Fig. 1)





9.2 EJERCICIO .- Grafique la relación: $\begin{cases} |x| + |y| \geq 1 \ , \text{ si } \ xy \geq 0 \\ |x| + |y| \leq 1 \ , \text{ si } \ xy < 0 . \end{cases}$

SOLUCIÓN .- $xy \geq 0$ corresponde a los cuadrantes I y III

$xy < 0$ corresponde a los cuadrantes II y IV. (Fig. 2)

9.3 EJERCICIO .- Grafique la intersección de las tres relaciones siguientes:

a) $x^2 - y^2 \leq 4$, b) $y^2 + x - 2 \geq 0$, c) $y^2 - 2 < x$.

SOLUCIÓN .-

a) $\dfrac{x^2}{4} - \dfrac{y^2}{4} \leq 1$,

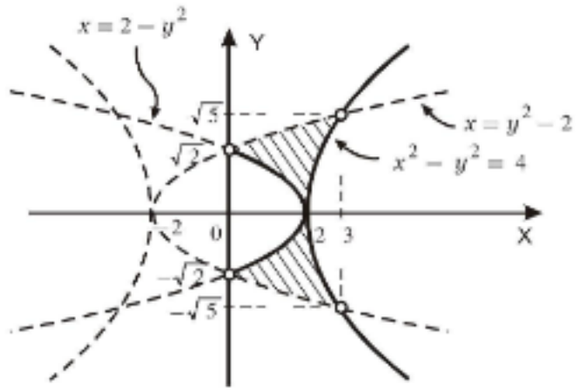
b) $x \geq -y^2 + 2$,

c) $x > y^2 - 2$.

De la gráfica vemos que:

Dom $= \langle 0 , 3 \rangle$,

Rang $= \left\langle -\sqrt{5} , \sqrt{5} \right\rangle$.

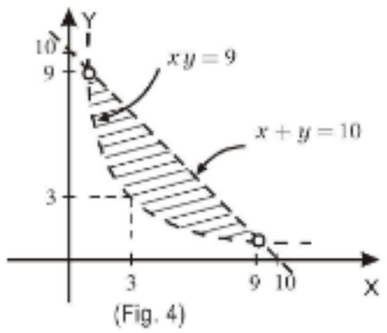


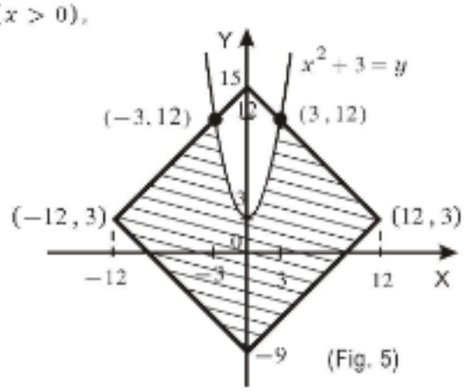
9.4 EJERCICIO .- Grafique la relación: $S = \{(x , y) \in \mathbb{R}^2 / \ x > 0 ,$

$xy > 9 , \ x + y < 10 \}$. (Fig. 4).

SOLUCIÓN .- Intersectando los bordes: $x + y = 10 \ \wedge \ xy = 9 \ \Rightarrow$

$(1 , 9)$ y $(9 , 1)$, $(x > 0)$.





9.5 EJERCICIO .- Grafique la relación: $S = \{(x , y) \in \mathbb{R}^2 / \ x^2 + 3 \geq y ,$

$|x| + |y - 3| \leq 12 \ \}$, e indique su Dominio y Rango.

SOLUCIÓN .- Intersectando (en el primer cuadrante) los bordes:

$[\ x + y - 3 = 12 \ \wedge \ y = x^2 + 3\ ] \ \Rightarrow \ (x , y) = (3 , 12)$ (Fig. 5)

vemos que: $\text{Dom}\,(S) = [-12 , 12]$, $\text{Rang}\,(S) = [-9 , 12]$.

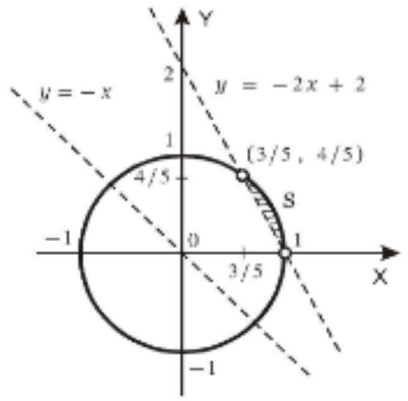
9.6 EJERCICIO .- Grafique la relación S , e indique su Dominio y su Rango.

$S = \{(x , y) \in \mathbb{R}^2 / \ |x + y| + x > 2 , \ x^2 + y^2 \leq 1 \}$

SOLUCIÓN .-

Si $y \geq -x$: $y > -2x + 2$; si $y < -x$: $y < -2$,

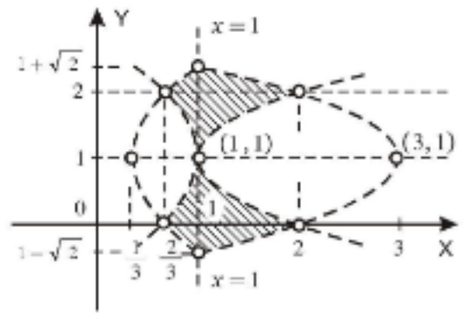
Intersectando la circunferencia
$x^2 + y^2 = 1$
con la recta $y = -2x + 2$
se obtienen los puntos
$(1, 0)$ y $(\frac{3}{5}, \frac{4}{5})$.
Además vemos que:
$\text{Dom}(S) = \langle 3/5, 1 \rangle$ y
$\text{Rang}(S) = \langle 0, 4/5 \rangle$.



SERIE DE EJERCICIOS

1. Grafique las relaciones definidas por las inecuaciones:
   a) $x^2 - 2 \geq |y - 2|$, b) $|y - 1| \geq 2 + x$
2. Grafique la relación $S = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 / \ y \geq x^2 - 4x + 3 , \ x + y < 7 \}$
3. Grafique la relación $R = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 / \ y \leq x^2 - 2x , \ x \geq y^2 - 2y \}$
4. Grafique la relación
   $T = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 / \ y - 2x + 6 \geq 0 \ \wedge \ 2y + x^2 < 0 \}$
5. Grafique la intersección de las relaciones definidas por:
   $|x| + |y| \leq 6$, $x^2 + y^2 \geq 9$, $y \leq x$.
   SUG: Los bordes de las dos primeras relaciones son tangentes en cuatro puntos.
6. Grafique la intersección de las relaciones determinadas por:
   $y \geq x^2 - 9$, $x^2 + y^2 \geq 4$, $y \leq \sqrt{2}$.
7. Grafique la relación definida por la inecuación:
   $(x + y - 2)(x - y) \leq 0$. SUG: Aplicar la Regla de los Signos:
   $[x + y - 2 \geq 0 \ \wedge \ x - y \leq 0] \vee [x + y - 2 \leq 0 \ \wedge \ x - y \geq 0]$
8. Grafique la relación descrita por la inecuación: $x^2 - y^2 - 2x + 2y \leq 0$.
   SUG: Factorizando, se obtiene la desigualdad del Problema (7) anterior.
9. Grafique la relación descrita por la inecuación: $y^2 - 2xy - 2y + 2x + 1 \geq 0$.
   SUG: Factorizando, se obtiene: $(y - 2x - 1)(y - 1) \geq 0$.
10. Grafique la relación descrita por la inecuación: $2x^2 - y^2 + xy + x + y \geq 0$.
    SUG: Factorizando, $(y - 2x - 1)(x + y) \leq 0$.
11. Grafique la intersección de las relaciones:
    $\frac{|x| + 1}{|x| - 2} < 1$, $y \leq x$, $y \leq x^2 - 2$.
12. Grafique la relación: $y \leq \sqrt{9 - x^2}$. SUG: Note que la región también incluye toda la franja en el semiplano inferior $y < 0$, para los $x \in [-3, 3]$.

13. Grafique la relación descrita por: $y > \sqrt{x^2 - 4} \ \wedge \ y \leq \sqrt{14 - x^2}$.
    SUG: El borde de la primera relación es una parte de una hipérbola, y el borde de la segunda es una parte de una circunferencia.
14. Grafique la intersección de las relaciones:
    $|x| - |y| \leq 6$, $y - x^2 < 0$, $y + 5 \geq 0$.
15. Grafique la relación: $S = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 / \ x^2 + y^2 \leq 10 , \ xy > 3 \}$.
16. Grafique la intersección de las relaciones: $x^2 + 4y^2 \geq 16$, $x^2 + y^2 < 7$.
17. Grafique la relación definida por la inecuación: $y < \frac{1}{3}\sqrt{x^2 - 9}$.
    SUG: La región incluye también las dos franjas (no acotadas) en el semiplano inferior $y \leq 0$ para $x \in \langle -\infty, -3] \cup [3, \infty \rangle$.
18. Dados los conjuntos $A = \{ (x, y) / \ y^2 + 6y - 8x \leq 7 \}$, y
    $B = \{ (x, y) / \ x^2 - 3x^2 - x + 3 = 0 \}$, halle $\text{Rang}(A \cap B)$.
    RPTA: $[-3 - 2\sqrt{10} , -3 + 2\sqrt{10}]$.
19. Sea $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ y R una relación definida en $A \times A$ tal que cumple:
    i) $\forall \ x \in A$, $(x, x) \in R$,
    ii) Si $(x, y) \in R \ \Rightarrow \ (y, x) \in R$. Si R es la relación definida por
    $R = \{(1,1), (3,2), (2,2), (5,5), (4,2), (4,4), (3,4), (3,x), (y,x), (z,x), (z,y) \}$, ¿ es R una relación de Equivalencia ?.
    RPTA: $x = 3$, $y = 4$, $z = 2$. La relación R si es de Equivalencia.
20. Dadas las relaciones R y S de un conjunto A en un conjunto B, demuestre que $\text{Rang}(R) \ \Delta \ \text{Rang}(S) \subset \text{Rang}(R \ \Delta \ S)$.
21. Sea $A = \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$, y R una relación definida por $R = \{ (x, y) \in A \times A / \ x + 2y \leq 8 \}$, determine el conjunto $\text{Dom}(R) \ \Delta \ \text{Rang}(R)$.
    RPTA: $\{5, 6, 7, 8\}$.
22. Grafique la relación
    $x > 2|x - 1| + |y^2 - 2y|$
    SUG: Note que $y^2 - 2y \geq 0$
    $\Leftrightarrow \ y \in \langle -\infty, 0] \cup [2, \infty \rangle$.



Ω Ω Ω Ω Ω

12

FUNCIONES

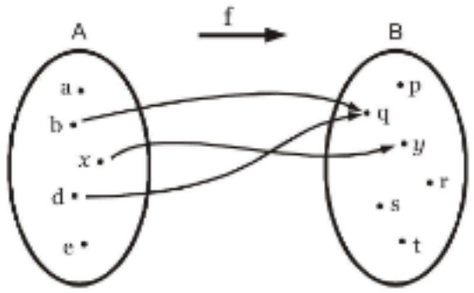
1. FUNCIONES: DOMINIO, RANGO Y GRÁFICA

Uno de los más importantes conceptos de la Matemática se refiere a un tipo especial de relaciones entre elementos de dos conjuntos A y B, llamadas **FUNCIONES DE A EN B**.

Una **FUNCIÓN** expresa la idea de una cantidad que depende de otra, o que está determinada por ésta. Por ejemplo, el área de un círculo depende de la medida de su radio; si se conoce la medida de la longitud del radio, su área está completamente determinada. Así, se dice que el ÁREA de un círculo es una ***función de la longitud de su radio***.

1.1 DEFINICIÓN .- Una función de A en B es una relación $f \subset A \times B$ que hace corresponder a cada elemento x del conjunto A a lo más un elemento y del conjunto B, denotado por $y = f(x) \in B$.

Al conjunto A se le llama el CONJUNTO de PARTIDA, y al conjunto B CONJUNTO DE LLEGADA.



1.2 DEFINICIÓN EQUIVALENTE. Un subconjunto de pares ordenados $f \subset A \times B$ es una FUNCIÓN DE A EN B si ***para todo*** $x \in A$, **existe a lo más un elemento** $y \in B$ tal que $(x, y) \in f$.

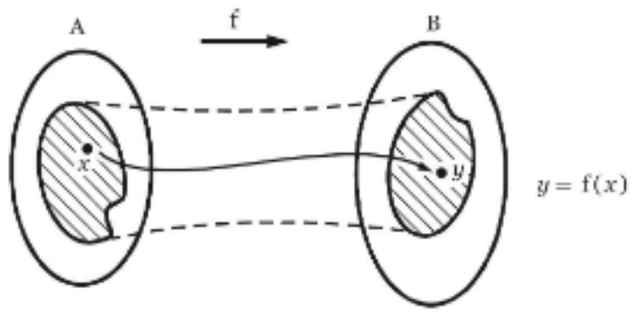
Cuando un par ordenado $(x, y) \in f$ a la segunda componente se le denota $y = f(x)$, y se le llama ***el valor de la función*** f en x.

En este caso también se denomina $y = f(x) =$ ***imagen de*** x ***vía*** f, y al elemento x se le llama ***contraimagen*** (***o antecedente***) ***de*** $y = f(x)$.

El valor $y = f(x)$ es único para cada valor x.

Un valor cualquiera $y \in B$ puede tener UNO o VARIOS antecedentes x en A, o NINGUNO, en cuyo caso se tiene que $(x, y) \notin f$, $\forall\ x \in A$.

Un valor cualquiera $x \in A$ puede tener A LO MÁS UNA IMAGEN $y = f(x)$ o ***ninguno***, en cuyo caso se tiene que $(x, y) \notin f$, $\forall\ y \in B$.



1.3 DOMINIO Y RANGO DE UNA FUNCIÓN

Se llama **DOMINIO** de una función f al conjunto de todos sus antecedentes (primeras componentes) y se le denota por

$$\text{Dom } f = \{ x \in A \ / \ [\ \textit{Existe}\ \ y \in B\ \ \textit{talque}\ \ (x, y) \in f\ ]\ \} \subset A$$

$$= \{ x \in A \ / \ [\ \textit{Existe}\ \ y \in B\ \ \textit{talque}\ \ y = f(x)\ ]\ \} \subset A$$

Se llama **RANGO** o RECORRIDO de la función f al conjunto de las imágenes de todos los elementos de A, vía f; y se le dencta $\text{Ran}(f)$ o R_f,

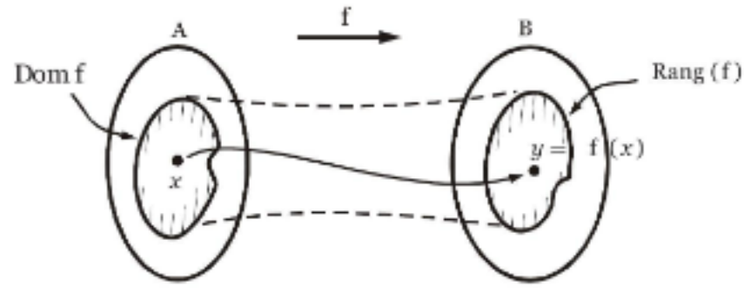
$$R_f = \{\ y \in B \ / \ [\ \textit{Existe (al menos un)}\ x \in A\ \ \textit{talque}\ \ y = f(x)\ ]\ \}$$

$$= \{\ f(x) \in B \ / \ x \in \text{Dom } f \subset A\ \} \subset B\ .$$

Así, a una función f se le puede representar por el conjunto de pares ordenados

$$f = \{\ (x, f(x)) \in A \times B \ / \ x \in \text{Dom } f \subset A\ \}\ .$$

Así, el DOMINIO de f viene a ser el conjunto de todas las primeras componentes de los pares ordenados de f, mientras que el RANGO de f viene a ser el conjunto de todas las segundas componentes.



El rango de f, que es el conjunto de todas las imágenes de f, no necesariamente cubre a todo B.

El conjunto de llegada B también es denominado CODOMINIO de f.

1.4 EJEMPLO.- Sean $A = \{1,2,3,4\}$ y $B = \{a,b,c,d\}$. Sea la función $f = \{(1,a),(2,b),(3,b)\}$ de A en B, entonces $\text{Dom } f = \{1,2,3\}$, $R_f = \{a,b\}$.

1.5 EJEMPLO.- Si A es el conjunto de todas las ciudades de América del Sur, y B el conjunto de todos los países del mundo, definimos una función f de A en B como aquella que asigna a cada ciudad x de A el país $f(x)$ [en B] del cual la ciudad x es su ciudad capital. Así, tenemos que, por ejemplo

- si x = Lima, entonces $f(x) = f(\text{Lima}) =$ PERÚ
- si x = Caracas, entonces $f(x) = f(\text{Caracas}) =$ VENEZUELA
- si x = Trujillo, " $f(x) = f(\text{Trujillo}) =$ *NO EXISTE* (no está definido),

de modo que algunos pares ordenados de f son: (Lima, PERÚ) $\in$ f, (Caracas, VENEZUELA) $\in$ f; mientras que (Trujillo, y) $\notin$ f, $\forall$ país $y \in B$.
Con ayuda de un mapa geográfico de AMÉRICA DEL SUR, se puede verificar que:

Dom f	f	Rango de f (R_f)
1. Asunción		Paraguay
2. Bogotá		Colombia
3. Brasilia		Brasil
4. Buenos Aires		Argentina
5. Caracas		Venezuela
6. Georgetown		Guyana
7. Lima		Perú
8. Montevideo		Uruguay
9. Paramaribo		Surinam
10. Quito		Ecuador
11. Santiago		Chile
12. Sucre		Bolivia

1.6 APLICACIONES DE A EN B

Una **APLICACIÓN** es un caso particular de FUNCIÓN, y se define como sigue:

> Una función f se llama **APLICACIÓN** de A en B *si y sólo si* $\text{Dom } f = A$.

Simbólicamente,

> Un subconjunto $f \subset A \times B$ es una **APLICACIÓN** de A en B *si y sólo si*
> $\forall\, x \in A,\ \exists!\ y \in B\ /\ y = f(x)$.

se lee " Para todo $x \in A$, *existe un único elemento* $y \in B$ tal que $y = f(x)$ "

En forma equivalente,

> Un subconjunto $f \subset A \times B$ es una **APLICACIÓN** de A en B *si y sólo si*
> $\forall\, x \in A,\ \exists!\ y \in B\ /\ (x,y) \in f$.

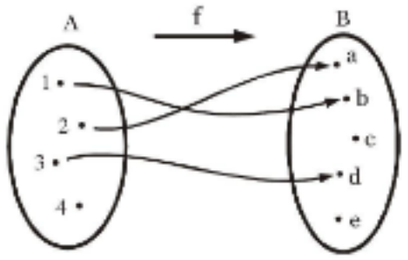
1.7 NOTACIÓN.- Si f es una APLICACIÓN de A en B, $\text{Dom } f = A$ se denota

$$f: A \to B,\ x \mapsto f(x) \qquad \text{o} \qquad A \xrightarrow{f} B,\ x \mapsto f(x)$$

1.8 NOTA.- Es importante hacer notar aquí que una parte de los autores considera como sinónimos a FUNCIÓN y APLICACIÓN. En este texto, presentaremos a las Aplicaciones como casos particulares de Funciones.

1.9 EJEMPLOS.- Dados $A = \{1,2,3,4\}$, $B = \{a,b,c,d,e\}$,

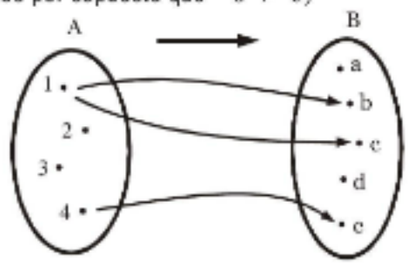
(1) El conjunto $f = \{(1,b),(2,a),(3,d)\}$ es una FUNCIÓN de A en B pues cada elemento de A está asignado a lo más a un elemento de B:



$f(1) = b$
$f(2) = a$
$f(3) = d$
$\text{Dom } f = \{1,2,3\}$
$R_f = \{a,b,d\}$

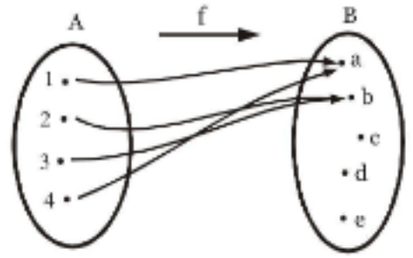
Sin embargo, esta función **no** es una Aplicación de A en B pues $\text{Dom } f \neq A$.

(2) El conjunto $f = \{(1,b),(1,c),(3,e)\}$ NO ES una función de A en B (asumiendo por supuesto que $b \neq c$)



pues no satisface la definición: " Para cada $x \in A$, debe existir a lo más un $y \in B$ tal que $y = f(x)$ ", ya que para $x = 1$ (en A) existen ***dos elementos*** $y_1 = b$, $y_2 = c$ en el conjunto de llegada B tales que $f(1) = b$ y $f(1) = c$; es decir, tales que $(1,b) \in f$ y $(1,c) \in f$.

(3) El conjunto $f = \{(1,a),(2,b),(3,b),(4,a)\}$ si es una función de A en B, pues cada elemento x de A tiene asignado un único elemento $y \in B$. Asimismo, vemos que f es también una APLICACIÓN de A en B pues: $\text{Dom } f = A = \{1,2,3,4\}$



1.10 OBSERVACIONES .- Dada una función f de A en B :

1. No puede haber dos pares ordenados ***distintos*** en f con la misma primera componente [Caso (2) de (1.9)] .
2. Puede existir en f varios pares ordenados con la misma segunda componente [Caso (3) de (1.9)] .

1.11 EJERCICIO .- Halle el valor de k para que el conjunto de pares ordenados $f = \{(4,k),(2,5k),(7,2k^2+1),(4,2k-1)\}$ sea una función. Halle el rango R_f .

SOLUCIÓN . Como no debe haber dos pares ordenados distintos con la misma primera componente, para que f sea una función deben coincidir los puntos

$$(4,k) = (4,2k-1) \quad \Rightarrow \quad k = 2k-1 \quad \Rightarrow \quad k = 1 .$$

Por lo tanto, $f = \{(4,1),(2,5),(7,3)\}$, $R_f = \{1,3,5\}$.

1.12 EJERCICIO. Dado el conjunto de pares ordenados $f = \{(5,7),(-1,a+b),(a^2-b,2b-a^2),(5,a-2b),(-1,-2)\}$, calcule los valores de a y b para que f sea una función. Determine f , Dom f y R_f .

SOLUCIÓN .- Como: $(-1,a+b) = (-1,-2)$ y $(5,7) = (5,a-2b)$ $\Rightarrow [\ a+b=-2\ ,\ a-2b=7\ ]$, resolviendo el sistema : $a = 1$, $b = -3$. Por lo tanto $f = \{(5,7),(-1,-2),(4,-7)\}$, $\text{Dom } f = \{5,-1,4\}$, $R_f = \{7,-2,-7\}$.

1.13 REGLA DE CORRESPONDENCIA

Con frecuencia una función se define mediante una regla o una ecuación que permite calcular para cualquier $x \in \text{Dom } f$ su correspondiente imagen $y = f(x)$ en el conjunto de llegada.

Por ejemplo, $y = f(x) = x^2 + 1$, para $x \in \langle -\infty , \infty \rangle$, es una regla que indica el proceso que sufre la variable independiente x para transformarse en su imagen $f(x) = x^2 + 1$.

En este caso, la función f toma al elemento $x \in \text{Dom } f = \langle -\infty , \infty \rangle$, lo eleva al cuadrado, y al resultado x^2 le suma 1 obteniéndose así el valor de la imagen correspondiente $y = f(x) = x^2 + 1$.

A esta regla $y = f(x) = x^2 + 1$ se le llama **REGLA DE CORRESPONDENCIA** de f . Al valor x se le llama **VARIABLE INDEPENDIENTE**, y al valor $y = f(x)$ se le llama **VARIABLE DEPENDIENTE** .

Más aún, una FUNCIÓN también está completamente determinada cuando se especifica su DOMINIO y su REGLA DE CORRESPONDENCIA.

Por ejemplo, el volumen V de una esfera de radio $R > 0$ está dado por la fórmula (o regla de correspondencia): $V = \frac{4}{3}\pi R^3$ determinándose de esta forma el volumen V de la esfera como una función de su radio R :

$$V = V(R) = f(R) = \frac{4}{3}\pi R^3 .$$

2. GRÁFICA DE UNA FUNCIÓN

Cuando los conjuntos de partida y de llegada A y B de función f son conjuntos de números reales, esta función es llamada una FUNCIÓN , de valor REAL , DE UNA VARIABLE REAL .

Así, una Función Real de una Variable Real es un conjunto de pares ordenados de números reales, y por lo tanto tiene una representación gráfica como conjunto de puntos en el plano $\mathbb{R}^2$ ó plano XY, por el hecho de ser f una relación en $\mathbb{R}$

$$f = \{ (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \ / \ x \in \text{Dom } f, \ y = f(x) \}$$

2.1 DEFINICIÓN .-

> Si f es una función (de valor) real de una variable real, se llama **GRÁFICA DE** f al conjunto de pares ordenados de f cuando se le considera como un conjunto de puntos del plano $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

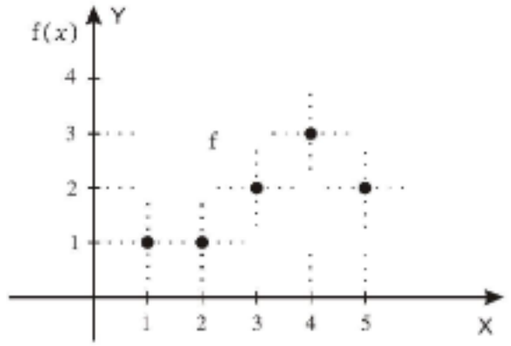
La variable x es representada en el EJE X (Eje de abscisas), mientras que la variable dependiente $y = f(x)$ está representada en el Eje Y (Eje de ordenadas). Así, la gráfica de la función $f = \{(1,1),(2,1),(3,2),(4,3),(5,2)\}$

está ilustrada en la figura.

$\text{Dom } f = \{1,2,3,4,5\}$
$\text{Ran } f = \{1,2,3\}$.

El dominio Dom f se lee en el Eje X.

El rango Ran f se lee en el Eje Y.



En general estudiaremos funciones cuyo dominio tiene una cantidad infinita de elementos, como por ejemplo, la función

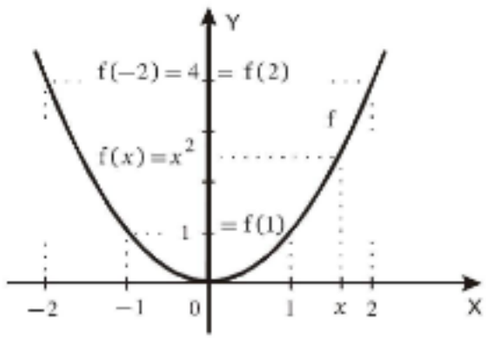
$$y = f(x) = x^2 , \quad x \in \langle -\infty, \infty \rangle = \text{Dom } f$$

cuya gráfica vemos abajo.

$\text{Dom } f = \langle -\infty, \infty \rangle$, (Eje X)

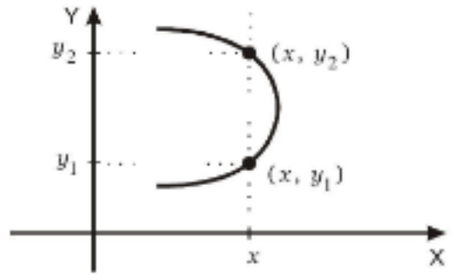
El rango Ran f se lee en el Eje Y:

$\text{Ran } f = [0, \infty \rangle$.

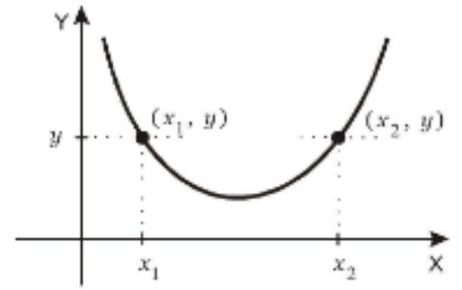


Por su definición, una FUNCIÓN ***no debe tener dos pares ordenados distintos con la misma primera componente.***

Así, la primera de las gráficas adyacentes no corresponde a la de una función, pues tiene dos pares ordenados distintos (x, y_1) y (x, y_2) con la misma primera componente.



En cambio esta segunda gráfica sí corresponde a una FUNCIÓN real y de una variable real x.

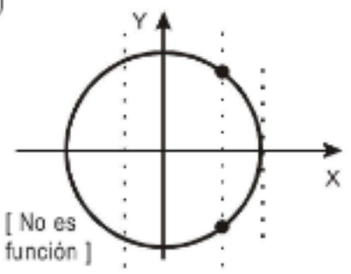


2.2 PROPIEDAD FUNDAMENTAL DE LAS FUNCIONES REALES DE UNA VARIABLE REAL

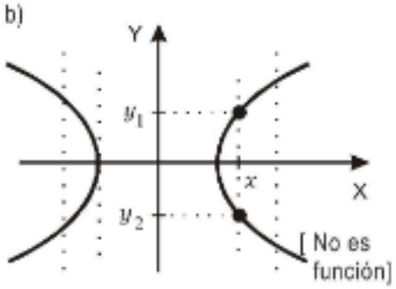
> Una relación $f \subset \mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ es una FUNCIÓN REAL DE VARIABLE REAL $y = f(x)$ *si y sólo si* toda recta vertical corta a la gráfica de f a lo más en un punto.

Debido a esta propiedad, las gráficas de las rectas verticales, de hipérbolas o de circunferencias, no corresponden a funciones $y = f(x)$:

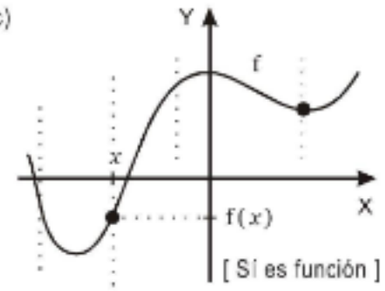
a)



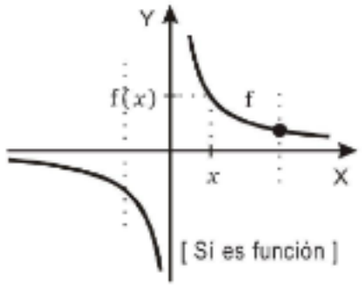
b)



c)

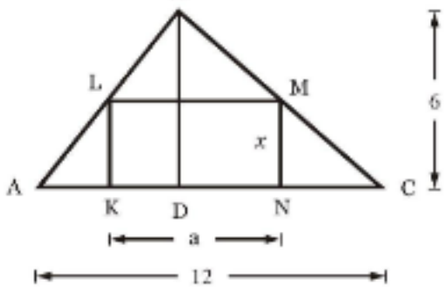


d)



Así, vemos que toda función f se caracteriza por no tener dos pares ordenados distintos con la misma primera componente.

2.3 EJERCICIO.- En el triángulo ABC de la figura cuya base es $AC = 12$ y su altura $BD = 6$ está inscrito un rectángulo $KLMN$ de altura x. Si S es el área del rectángulo, exprese $S = S(x)$ como función de x, e indique su dominio y rango. Halle el valor x_0 tal que $S(x_0)$ sea el máximo valor de $S(x)$. Grafique $S(x)$.



SOLUCIÓN.- $S = ax$, $0 < x < 6$

Como los triángulos BLM y BAC son semejantes:

$$\frac{6 - x}{6} = \frac{a}{12}$$

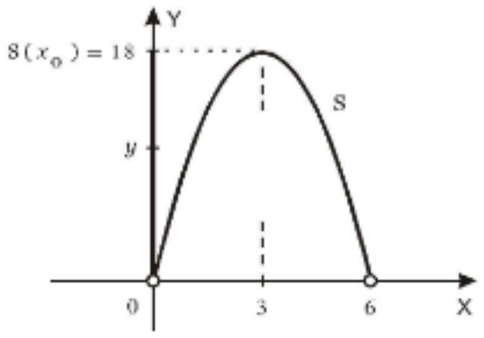
$$\Rightarrow \quad a = 2(6 - x) \quad \Rightarrow$$

$$S = S(x) = ax = 2(6 - x)x\,,$$

$$\forall\ x \in \text{Dom}\, S = \langle 0, 6 \rangle\,.$$

Y completando cuadrados: $S(x) = -2(x^2 - 6x) = 18 - 2(x - 3)^2$ vemos que S toma su máximo valor $S(x_0)$ para $x_0 = 3 \in \langle 0, 6 \rangle$:

$$S(x_0) = S(3) = 18$$



Asimismo, de la gráfica de $S(x)$ adyacente, vemos que

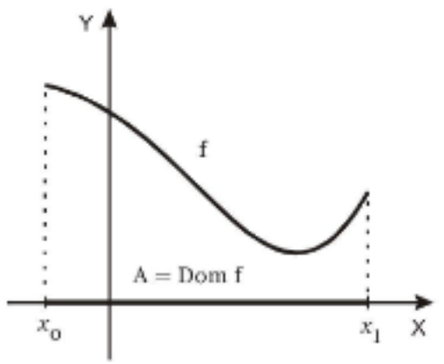
$$\text{Ran}\,(S) = \langle 0, 18 \rangle\,.$$

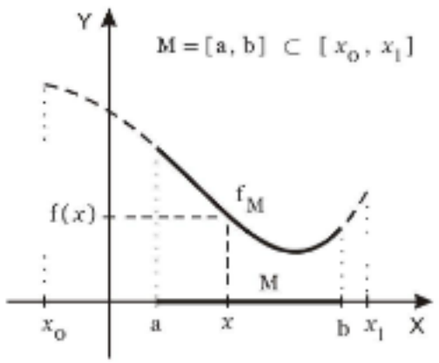
3. CONJUNTO IMAGEN. CONJUNTO IMAGEN INVERSA

Dada una función $f: A \to Y$, para todo subconjunto $M \subset A$ se llama ***RESTRICCIÓN DE*** f ***SOBRE EL CONJUNTO*** M a la función $f_M: M \to Y$ cuya regla de correspondencia es:

$$f_M(x) = f(x)\,, \quad \text{para cada } x \in \text{Dom}\,(f_M) = M\,.$$

A esta función también se le denota $f_M = f|_M$.





$f: A \to \mathbb{R}$ $\qquad$ $f_M: M \to \mathbb{R}$

$$\text{Rang}\,(f_M) = \{\, f(x) \;/\; x \in \text{Dom}\, f_M = M \,\} \quad (\text{donde } M \subset \text{Dom}\, f = A)$$
$$\subset \{\, f(x) \;/\; x \in \text{Dom}\, f = A \,\} = \text{Rang}\,(f)\,.$$

Note que: $\text{Dom}\,(f_M) = M$.

3.1 EJEMPLO.- Sea $f = \{(1, 8), (2, 6), (3, -1), (4, 7), (5, -1)\}$ tal que $\text{Dom}\, f = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, y sea $M = \{1, 2, 5\}$, entonces $M \subset \text{Dom}\, f$, y $f_M = \{(1, 8), (2, 6), (5, 0)\}$.

3.2 CONJUNTO IMAGEN

Dada una función $f: A \to Y$, y un subconjunto $M \subset A$, se define el ***CONJUNTO IMAGEN DE*** M (vía f) como el conjunto denotado por $f(M)$ y descrito por $f(M) = \{\, f(x) \;/\; x \in M \,\} \subset Y$ y viene a ser el conjunto de todas las imágenes correspondientes a elementos del conjunto $M \subset \text{Dom}\, f = A$.

Por ejemplo, si $f_M = \{(1, 8), (2, 6), (3, -1), (4, 7), (5, -1)\}$, donde $\text{Dom}\, f = A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, y si tenemos el conjunto

$M = \{1,3,5\} \subset \text{Dom}\, f$, entonces $f(1) = 8$, $f(3) = -1$, $f(5) = -1$,
y por lo tanto, $f(M) = \{ f(x) / x \in M = \{1,3,5\} = \{ f(1), f(3), f(5) \} \}$
$= \{ 8, -1, -1 \} = \{ 8, -1 \}$.

3.3 PROPIEDADES DEL CONJUNTO IMAGEN

Sean $f : A \to Y$, $M \subset A$, $N \subset A$:

1) $f(A) = \text{Rang}(f)$, pues $A = \text{Dom}\, f$
2) $f(M) = \text{Rang}(f_M)$
3) $f(M) \subset f(A) = \text{Rang}(f)$
4) $f(\varnothing) = \varnothing$
5) Si $M \subset N$ entonces $f(M) \subset f(N)$.
6) $f(M \cup N) = f(M) \cup f(N)$,
7) $f(M \cap N) \subseteq f(M) \cap f(N)$, 8) $f(A) - f(M) \subset f(A - M)$.

PRUEBA DE ⟨7⟩:

i) Si $M \cap N = \varnothing \Rightarrow f(M \cap N) = \varnothing \subset f(M) \cap f(N)$ [pues $\varnothing \subset V$]
ii) Si $M \cap N \neq \varnothing \Rightarrow \forall\, y \in f(M \cap N) \Rightarrow y = f(x_0)$ para algún
$x_0 \in M \cap N \Rightarrow x_0 \in M \wedge x_0 \in N \Rightarrow$
$y = f(x_0) \in f(M) \wedge y = f(x_0) \in f(N) \Rightarrow$
$y = f(x_0) \in f(M) \cap f(N)$

Por lo tanto, $f(M \cap N) \subset f(M) \cap f(N)$.

7′) Daremos un ejemplo en que se cumpla la inclusión propia en [7]:

Sea $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, tal que $f(n) = n^2$, $\forall\, n \in \mathbb{Z}$; si
$M = \{-2,0,1\}$, $N = \{0,1,2\}$ entonces $M \cap N = \{0,1\}$
y $f(M \cap N) = \{f(0) = 0, f(1) = 1\} = \{0,1\}$
$f(M) = \{ f(-2) = 4, f(0) = 0, f(1) = 1 \} = \{4,0,1\}$
$f(N) = \{ f(0) = 0, f(1) = 1, f(2) = 4 \} = \{0,1,4\}$
$f(M) \cap f(N) = \{0,1,4\}$

Así, $f(M \cap N) \subsetneq f(M) \cap f(N)$ [inclusión propia, en este caso].

3.4 EJEMPLO.- Si $M = \langle -1, 2]$, hallaremos $f(M)$ para la función
$f(x) = x^2 + 1$, $x \in \mathbb{R} = \text{Dom}\, f$:

$\forall\, x \in M$, $-1 < x \leq 2 \Leftrightarrow 0 \leq x^2 \leq 4$
$\Leftrightarrow 1 \leq x^2 + 1 \leq 5 \Leftrightarrow 1 \leq f(x) \leq 5$

Por lo tanto, $f(x) \in [1, 5] \Leftrightarrow x \in M = \langle -1, 2]$
Así, $f(M) = \{ f(x) / x \in M = \langle -1, 2] \} = [1, 5]$.

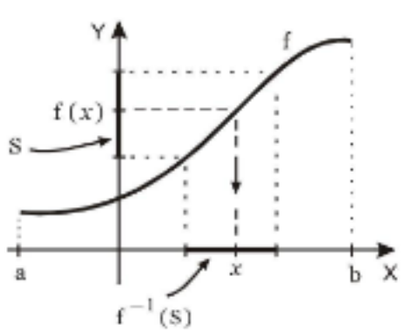
A continuación presentaremos otro de los conjuntos característicos dentro del estudio de las funciones, llamado CONJUNTO IMAGEN INVER-SA, y veremos algunas de sus propiedades más importantes.

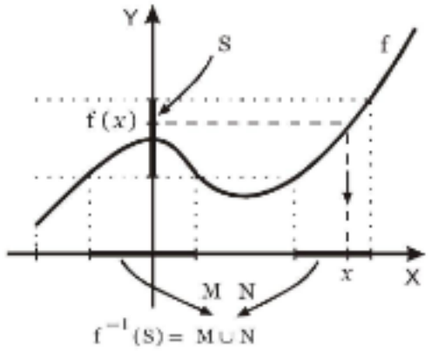
3.5 CONJUNTO IMAGEN INVERSA

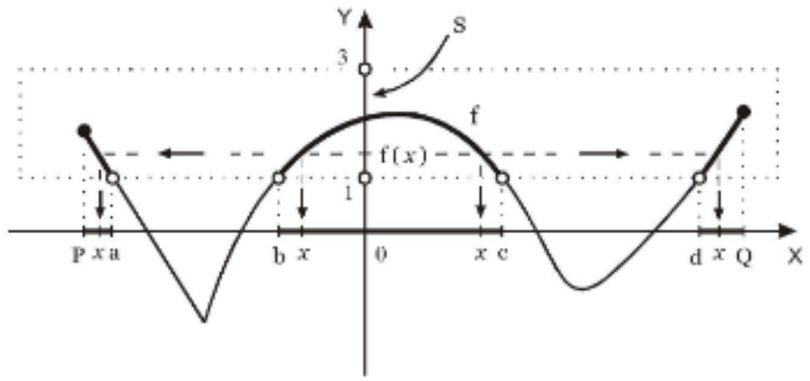
Dada una función $f : A \to Y$, para cada subconjunto $S \subset Y$, se llama **CONJUNTO IMAGEN INVERSA de S, vía la función f**, al conjunto denotado por $f^{-1}(S) = \{ x \in \text{Dom}\, f / f(x) \in S \}$.

También se le llama el conjunto **PREIMAGEN DEL CONJUNTO S, vía la función f**, y viene a ser el conjunto de contraimágenes correspondientes a elementos del conjunto $S \subset Y$.

Dado $S \subset Y$, se pueden presentar algunos casos posibles para $f^{-1}(S)$ como se ilustra a continuación:







Vemos que $\text{Dom } f = [P, Q]$, $S = \langle 1, 3 \rangle$; entonces

$$f^{-1}(S) = [P, a\rangle \cup (b, c) \cup \langle d, Q], \quad \text{de la figura previa.}$$

3.6 EJEMPLO.- Dada la función $f(x) = x^2 - 2x + 4$, $x \in [-1, \infty\rangle = \text{Dom } f$

halle: a) $f^{-1}(\{7, 14\})$, b) $f^{-1}(\langle 4, 8])$, c) $f^{-1}(\langle -5, 12])$.

SOLUCIÓN.- $f(x) = x^2 - 2x + 4 = (x-1)^2 + 3$, $x \in \text{Dom } f = [-1, \infty\rangle$

a) $f^{-1}(\{7, 14\}) = \{ x \in \text{Dom } f = [-1, \infty\rangle \ / \ f(x) \in \{7, 14\} \}$

$= \{ x \in [-1, \infty\rangle \ / \ f(x) = 7 \ \vee \ f(x) = 14 \}$

$(*) \ldots = \{ x \in [-1, \infty\rangle \ / \ (x-1)^2 + 3 = 7 \ \vee \ (x-1)^2 + 3 = 14 \}$

y como $(x-1)^2 + 3 = 7 \iff x - 1 = \pm 2 \iff x = 3, \ x = -1$

y $(x-1)^2 + 3 = 14 \iff x - 1 = \pm\sqrt{11} \iff x = 1 \pm \sqrt{11}$

En $(*)$: $f^{-1}(\{7, 14\}) = \{ x \in [-1, \infty\rangle \ / \ x \in \{3, -1, 1 \pm \sqrt{11}\} \}$

$= [-1, \infty\rangle \cap \{3, -1, 1 \pm \sqrt{11}\} = \{3, -1, 1 \pm \sqrt{11}\}$

b) $f^{-1}(\langle 4, 8]) = \{ x \in \text{Dom } f = [-1, \infty\rangle \ / \ f(x) \in \langle 4, 8] \}$

$= \{ x \in [-1, \infty\rangle \ / \ (x-1)^2 + 3 \in \langle 4, 8] \} \quad \ldots (*)$

donde $(x-1)^2 + 3 \in \langle 4, 8] \iff 4 < (x-1)^2 + 3 \leq 8$

$\iff 1 < (x-1)^2 \leq 5 \iff (x-1) \in [-\sqrt{5}, -1\rangle \cup \langle 1, \sqrt{5}\,]$

$\iff x \in [1-\sqrt{5}, 0\rangle \cup \langle 2, 1+\sqrt{5}\,]$

Por lo tanto, en $(*)$:

$f^{-1}(\langle 4, 8]) = \{ x \in [-1, \infty\rangle \ / \ x \in [1-\sqrt{5}, 0\rangle \cup \langle 2, 1+\sqrt{5}\,] \}$

$= [-1, \infty\rangle \cap \left([1-\sqrt{5}, 0\rangle \cup \langle 2, 1+\sqrt{5}\,] \right)$

$= [-1, 0\rangle \cup \langle 2, 1+\sqrt{5}\,]$.

c) $f^{-1}(\langle -5, 12]) = \{ x \in \text{Dom } f = [-1, \infty\rangle \ / \ f(x) \in \langle -5, 12] \}$

$= \{ x \in [-1, \infty\rangle \ / \ (x-1)^2 + 3 \in \langle -5, 12] \} \quad (*)$

donde $(x-1)^2 + 3 \in \langle -5, 12] \iff -5 < (x-1)^2 + 3 \leq 12$

$\iff -8 < (x-1)^2 \leq 9 \iff 0 \leq (x-1)^2 \leq 9$

$\iff -3 \leq x - 1 \leq 3 \iff -2 \leq x \leq 4.$

Así, de $(*)$: $f^{-1}(\langle -5, 12]) = \{ x \in [-1, \infty\rangle \ / \ x \in [-2, 4] \}$

$= [-1, \infty\rangle \cap [-2, 4] = [-1, 4]$.

d) Pruebe que: $f^{-1}(\langle -\infty, 2\rangle) = \varnothing$.

3.7 PROPIEDADES DE LA IMAGEN INVERSA

Sean $f: X \to Y$, $A \subset Y$, $B \subset Y$, entonces

1) $f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$
2) $f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$
3) $f^{-1}(A - B) = f^{-1}(A) - f^{-1}(B)$
4) $f^{-1}(\complement_Y B) = \complement_X f^{-1}(B)$
5) $A \subset B \Rightarrow f^{-1}(A) \subset f^{-1}(B)$
6) $f[f^{-1}(B)] \subset B, \quad \forall B \subset Y$.
7) $\forall S \subset X, \quad S \subset f^{-1}[f(S)]$.

PRUEBA DE (5): Sea $x \in f^{-1}(A) \Rightarrow f(x) \in A \Rightarrow f(x) \in B$

[pues $A \subset B$], $\Rightarrow x \in f^{-1}(B)$.

Por lo tanto, $f^{-1}(A) \subset f^{-1}(B)$.

PRUEBA DE (6): Sea $y \in f[f^{-1}(B)]$, entonces $y = f(z)$ para algún $z \in f^{-1}(B) \Rightarrow f(z) \in B$, y como $y = f(z) \Rightarrow y \in B$. Por lo tanto, $f[f^{-1}(B)] \subset B$.

PRUEBA DE (7): Sea $x \in S \subset X \Rightarrow f(x) \in f(S) = W$

$\Rightarrow x \in f^{-1}(W) = f^{-1}[f(S)]$

Por lo tanto, $S \subset f^{-1}[f(S)]$.

3.8 EJERCICIO.- Sea $f(x) = |x^2 - 2x|^2 - 13|x^2 - 2x| - 27$, para $x \in \text{Dom } f = \langle -2, \infty\rangle$. Halle $f^{-1}(\langle -\infty, 3])$.

SOLUCIÓN.-

$f^{-1}(\langle -\infty, 3]) = \{ x \in \text{Dom } f = \langle -2, \infty\rangle \ / \ f(x) \in \langle -\infty, 3] \}$

$= \{ x \in \langle -2, \infty\rangle \ / \ f(x) \leq 3 \}$

$(*) \ldots = \{ x \in \langle -2, \infty\rangle \ / \ |x^2 - 2x|^2 - 13|x^2 - 2x| - 27 \leq 3 \}$

donde: $|x^2 - 2x|^2 - 13|x^2 - 2x| - 27 \leq 3 \iff z^2 - 13z - 30 \leq 0$

(haciendo $z = |x^2 - 2x|$) $\iff (z - 15)(z + 2) \leq 0$

$\Leftrightarrow \quad z - 15 \leq 0 \quad [\text{pues} \quad (z+2) = |x^2 - 2x| + 2 > 0 \ , \ \forall \ x \in \mathbb{R}\ ]$

$\Leftrightarrow \quad z \leq 15 \quad \Leftrightarrow \quad |x^2 - 2x| \leq 15 \quad \Leftrightarrow \quad -15 \leq x^2 - 2x \leq 15$

$\Leftrightarrow \quad x^2 - 2x + 15 \geq 0 \quad \wedge \quad x^2 - 2x - 15 \leq 0 \quad \Leftrightarrow$

$(x-1)^2 + 14 \geq 0$ (VERDADERO, $\forall \ x \in \mathbb{R}$) $\wedge \quad (x-5)(x+3) \leq 0$

$\Leftrightarrow \quad x \in \mathbb{R} \quad \wedge \quad x \in [-3, 5] \quad \Leftrightarrow \quad x \in [-3, 5]$.

Por lo tanto, en $(*)$: $f^{-1}(\langle -\infty, 3]) = \{ \ x \in \langle -2, \infty \rangle \ / \ x \in [-3, 5] \}$

$= \langle -2, \infty \rangle \cap [-3, 5] = \langle -2, 5]$.

4. EVALUACIÓN DE UNA FUNCIÓN EN UN PUNTO

Dada una función f con regla de correspondencia especificada, por ejemplo $f(x) = x^2 + 2x + 5 \ , \quad x \in \text{Dom } f \qquad (*)$

entonces ya sabemos que esta regla indica la transformación que sufre la variable x para convertirse en $f(x) = x^2 + 2x + 5$, y así obtener el valor de $f(x)$. En este caso, a la variable x se le eleva al cuadrado, luego al valor obtenido se le suma el doble de x, y al resultado se le suma 5. De esta manera se puede evaluar:

$f(4) = 4^2 + 2(4) + 5 = 29$

$f(-3) = (-3)^2 + 2(-3) + 5 = 8$

$f(a) = a^2 + 2a - 5$

$f(\sqrt{z}) = (\sqrt{z})^2 + 2(\sqrt{z}) + 5$, haciendo $x = \sqrt{z}$

$f(u) = u^2 + 2u + 5$

$f(w+1) = (w+1)^2 + 2(w+1) + 5$, haciendo $x = w + 1$

$f(6x) = (6x)^2 + 2(6x) + 5 = 36x^2 + 12x + 5$

lo cual indica que si en $f(x)$ la variable es reemplazada por cualquier otro símbolo, entonces en el 2º miembro de $(*)$ también debe reemplazarse (donde aparezca) x por el nuevo símbolo, siempre que este nuevo símbolo represente un valor que se encuentre en el Dominio de f, claro está.

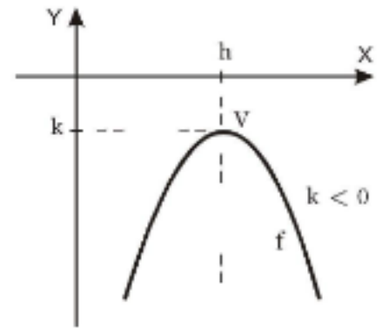
4.1 EJEMPLO .- Si $f(x+2) = x^2 - 3x + 4$, halle la regla de correspondencia de f, es decir $f(x)$.

SOLUCIÓN .- Sea $z = (x+2) \quad \Rightarrow \quad x = z - 2 \quad \Rightarrow$

$f(z) = (z-2)^2 - 3(z-2) + 4 = z^2 - 7z + 14 \quad \ldots (\alpha)$

Ahora, consideramos nuevamente el símbolo x como otro símbolo en (α), y por lo tanto $f(x) = x^2 - 7x + 14$.

4.2 EJERCICIO .- Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax^2 + bx + c$, cuya gráfica es la que sigue. Halle el conjunto solución de $(9 - x^2) f(x) < 0$.



SOLUCIÓN .- De la gráfica vemos que: $f(x) < 0$, $x \in \mathbb{R}$, y por lo tanto,

$(9 - x^2) f(x) < 0$

$\Leftrightarrow \quad 9 - x^2 > 0$

$\Leftrightarrow \quad x^2 < 9$

$\Leftrightarrow \quad x \in \langle -3, 3 \rangle$.

4.3 EJERCICIO .- Dada la función $f(x) = \begin{cases} 2x/(x+4) \ , & x > 0 \\ -4 \ , & x \leq 0 \end{cases}$

a) Halle $f^{-1}(\langle 1, 3])$.

b) Halle el conjunto M de los x tales que: $x - 2 \leq f(x)$.

SOLUCIÓN .- Note que $\text{Dom } f = \mathbb{R}$

a) $f^{-1}(\langle 1, 3]) = \{ \ x \in \text{Dom } f = \mathbb{R} \ / \ f(x) \in \langle 1, 3] \ \} =$

$= \{ \ x \in \langle -\infty, 0] \ / \ f(x) = -4 \in \langle 1, 3] \ \} \cup$

$\cup \ \{ \ x \in \langle 0, \infty \rangle \ / \ f(x) = \dfrac{2x}{x+4} \in \langle 1, 3] \ \}$

$= \varnothing \cup \{ \ x \in \langle 0, \infty \rangle \ / \ \dfrac{2x}{x+4} \in \langle 1, 3] \ \}$, pues $-4 \notin \langle 1, 3] \ \ldots (*)$

donde $1 < \dfrac{2x}{x+4} \leq 3 \quad \Leftrightarrow \quad \dfrac{2x}{x+4} - 1 > 0 \quad \wedge \quad 3 - \dfrac{2x}{x+4} \geq 0$

$\Leftrightarrow \quad \dfrac{x-4}{x+4} > 0 \quad \wedge \quad \dfrac{x+12}{x+4} \geq 0$

$\Leftrightarrow \quad x \in (\langle -\infty, -4 \rangle \cup \langle 4, \infty \rangle) \cap (\langle -\infty, -12] \cup \langle -4, \infty \rangle)$

$\Leftrightarrow \quad x \in \langle -\infty, -12] \cup \langle 4, \infty \rangle$. Luego, $\{ \ x \in \langle 0, \infty \rangle \ / \ \dfrac{2x}{x+4} \in \langle 1, 3] \ \}$

$= \{ \ x \in \langle 0, \infty \rangle \ / \ x \in \langle -\infty, -12] \cup \langle 4, 8 \rangle \ \}$

$= \langle 0, \infty \rangle \cap (\langle -\infty, -12] \cup \langle 4, \infty \rangle) = \langle 4, \infty \rangle$;

Y reemplazando en $(*)$: $f^{-1}(\langle 1, 3]) = \varnothing \cup \langle 4, \infty \rangle = \langle 4, \infty \rangle$.

b) $\text{Dom } f = \langle -\infty, 0] \cup \langle 0, \infty \rangle = U_1 \cup U_2$:

b1) $\forall\ x \in U_1 = \langle -\infty, 0]\ ,\ x \le 0 \ \Rightarrow\ f(x) = -4\ ,$ entonces

$$x - 2 \le f(x) = -4\ ,\ x \in U_1 \ \Leftrightarrow\ x \le -2\ ,\ x \in U_1$$

$$\Leftrightarrow\ x \in \langle -\infty, -2] \cap U_1 = \langle -\infty, -2]$$

b2) $\forall\ x \in U_2 = \langle 0, \infty \rangle\ ,\ x > 0 \ \Rightarrow\ f(x) = 2x/(x+4)\ ,$ entonces

$$x - 2 \le f(x),\ x \in U_2 \ \Leftrightarrow\ x - 2 \le \frac{2x}{x+4}\ ,\ x \in U_2 \ \Leftrightarrow$$

$$x - 2 - \frac{2x}{x+4} \le 0\ ,\ x \in U_2 \ \Leftrightarrow\ \frac{(x-\sqrt{8})(x+\sqrt{8})}{x+4} \le 0,\ x \in U_2$$

$$\Leftrightarrow\ x \in \left(\langle -\infty, -4] \cup [-\sqrt{8}\ ,\ \sqrt{8}\ ] \right) \cap U_2 = \langle 0, \sqrt{8}\ ]$$

Así, de $(b1) \vee (b2)$: $M = \langle -\infty, -2] \cup \langle 0, \sqrt{8}\ ]$.

SERIE DE EJERCICIOS

1. Indique cuáles de las siguientes relaciones son funciones. En cada caso, obtenga la gráfica, su dominio y su recorrido (rango):

   $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / \ y^2 = 36x\ \}$, $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / \ x = \sqrt{y}\ \}$

   $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / \ y = -2x+1\ \}$, $F = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 / \ u = v^2\ \}$

   $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / \ y = 4/x\ \}$, $G = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / \ y = \sqrt{4-x}\ \}$

   $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / \ x^2 + y^2 = 16\ \}$, $H = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / \ y^2 = 4x^2\ \}$

2. Sea $A = \{x \in \mathbb{N} / \ 0 < x \le 5\ \}$, ¿Cuántos de los siguientes conjuntos son funciones de A en A? , ¿ Cuántos son Aplicaciones de A en A ?

   $R_1 = \{(x, y) \in A \times A / \ x = 2\ \}$, $R_2 = \{(x, y) \in A \times A / \ y = 2\ \}$

   $R_3 = \{(x, y) \in A \times A / \ x + y = 5\ \}$, $R_4 = \{(x, y) \in A \times A / \ x = y^2\ \}$

3. Para $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{3, 4, 5\}$, sean f y g dos aplicaciones de A en B tales que: $f = \{(1,3), (2,4), (a,b)\}$, y $g = \{(3,3), (2,4), (c,d)\}$ Si $\forall\ x \in A$, $f(x) \ne x$, Rang (f) $\ne$ B y $g(1) = 3$, halle el valor de $(b - a) + (c - d)$.

4. Sea $f : \mathbb{N} \to \{0, 1\}$ / $f(x) = \begin{cases} 0\ , & \text{si } x \text{ es par} \\ 1\ , & \text{si } x \text{ es impar} \end{cases}$

   demuestre que :

   I) $\forall\ x \in \mathbb{N},\ \exists\ y \in \mathbb{N} / \ f(x + y) = f(x) + f(y)$

   II) $\forall\ x \in \mathbb{N},\ \forall\ y \in \mathbb{N}\ ,\ f(x) f(y) = f(xy)$

   III) $\exists\ x \in \mathbb{N} / \ f(x) = f(x + 2)$

   IV) $\forall\ x \in \mathbb{N}\ ,\ f(x) = f(x + 2)$

5. Sea $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ / $f(x) = \begin{cases} 1\ , & \text{si } x \text{ es par} \\ -1\ , & \text{si } x \text{ es impar} \end{cases}$

   ¿Cuáles son verdaderas? :

   I) $f(2x) + f(3y) = 0 \ \Rightarrow\ x$ es par $\wedge$ y es impar .

   II) $f(x) f(y) = -1\ ,\ \forall\ x, y \in \mathbb{N}$.

   III) $\exists!\ \alpha \in \mathbb{N} / \ f(\alpha x) = \alpha f(x)\ ,\ \forall\ x \in \mathbb{N}$.

6. Halle los valores de a y b para que cada uno de los conjuntos de pares ordenados sea una función, y determine la función en cada caso:

   $f = \{(1,8), (2,-3), (1, a^2 + b^2), (-1, a + b), (a^2 - b, a), (b + a^2, b)\}$

   $g = \{(4,3), (-5,-3), (4, a^2 - b^2), (-5, a + b), (a^2 + b, a), (a^2 + b^2, b)\}$

7. Dado el polinomio $P(x) = x^3 + (a+1)x^2 + x$, se define la función f con dominio $\{0, 1, 2, 3, 5\}$, por: $f(a) =$ ***Resto de la división de*** $P(x)$ ***entre*** $(x + a)$. Calcule $f(2) + f(3)$.

8. Si f es una función, ¿Cuáles son verdaderas?

   I) Si $a = b$ entonces $f(a) = f(b)$

   II) Si $a \ne b$ entonces $f(a) \ne f(b)$

   III) Si $f(a) = f(b)$ entonces $a = b$.

9. ¿Cuáles de los siguientes conjuntos determinan funciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$? :

   $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / \ x = |y|\ \}$, $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / \ y = -5\ \}$

   $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / \ x^2 + y^2 = 49\ \}$, $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / \ y > x^2\ \}$

   $E = \{(0,0), (1,2), (2,2), (4,5)\}$.

10. Dada la función $f(x) = ax + b$, $x \in \mathbb{R}$, halle las constantes a y b , si $f(x + y) = f(x) + f(y)$, $\forall\ x, y \in \mathbb{R}$, y si $f(-2) = -6$.

11. Si f es una función tal que $f(x + 5) = f(x) + f(5)$, $\forall\ x \in \mathbb{R}$, ¿Cuáles son verdaderas? :

    a) $f(0) = 0$, b) $f(-5) = -f(5)$, c) $f(15) = 3f(5)$.

12. Dada la función $f(x) = mx + b$, $\forall\ x \in \mathbb{R}$, si se sabe que $f(3) = 1$, $f(-3) = 6$, halle $m + b$.

13. Sea $A = \{p / \ p$ es una proposición lógica $\}$. Se define una función β , $\beta : A \to \mathbb{R}$ mediante $\beta(p) = \begin{cases} 1\ , & \text{si } p \text{ es Verdadera} \\ 0\ , & \text{si } p \text{ es Falsa} \end{cases}$

    Pruebe que:

    a) $\beta(p \vee q) = \beta(p) + \beta(q) - \beta(p)\beta(q)$, b) $\beta(\sim p) = 1 - \beta(p)$

    c) $\beta([\sim p] \vee q) = 1 - \beta(p)\beta(\sim q) = 1 - \beta(p) + \beta(p)\beta(q)$

14. La gráfica de la función $y = f(x) = \frac{2}{3}x^2 + bx + c$ intersecta al Eje X en los puntos: $(-2,0)$ y $(5,0)$, y al Eje Y en el punto $(0,k)$. Halle el valor de $(b + c + k)$.

15. Dadas las funciones f y g definidas por las fórmulas $4f(x) = 3x^2 - 6x - 9$, $-2g(x) = x^2 - 4x$, y sean los conjuntos: $A = \{x \in \mathbb{R} / \ f(x) > 0\}$, $B = \{x \in \mathbb{R} / \ g(x) \geq 0\}$, halle $A - B$.

16. Halle el complemento del dominio de la función f descrita por:
$f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / \ y = 3x^3 - 9x^2 + 11x \ , \ y \leq 5\}$.

17. En la ecuación $(x^2/a^2) + (y^2/b^2) = 1$, donde a y b son constantes positivas, ¿es "y" una función de x ?
A) Sí, B) Sólo si $x > a$, C) No,
D) Sólo si $x > a$ ó $x < -a$, E) Sólo si $x < a$.

18. Sean $A = \{2,4,6,8,10\}$, $B = \{a,b,c,d,e\}$, ¿Cuáles de los siguientes conjuntos definen aplicaciones de A en B ? :
$C = \{(2,a),(4,c),(10,c),(8,e),(6,e)\}$
$D = \{(10,a),(6,b),(2,a),(6,e),(4,d)\}$
$E = \{(6,b),(4,a),(8,d),(10,e)\}$
$F = \{(2,b),(4,e),(6,a)\}$
$G = \{(10,b),(8,b),(4,b),(2,b),(6,b)\}$

19. Sea $f : X \to \mathbb{R}$, $f(x) = (x+2)/(x+1)$, $x \in \mathbb{R}$, ¿Cuáles son ciertas? a) $\complement X = \{1\}$, b) $R_f = \complement\{-1\}$, c) X y R_f son disjuntos.

20. Dé un ejemplo de una función f (como conjunto de pares ordenados) que cumpla los siguientes 4 requisitos: f tiene 8 elementos, $f(x) = x^2$, $\text{Dom } f \subset \mathbb{Z}$, $\text{Rang}(f) \subset B = \{2m / \ 0 \leq m \leq 36 \ , \ m \in \mathbb{Z}\}$ ¿Cuántas de estas funciones existen? .

21. Dé un ejemplo de una función f tal que $f(A) \cap f(B) \neq f(A \cap B)$ para dos subconjuntos no vacíos A y B del Dominio de f. Grafique f.

22. Dado un conjunto de 4 elementos $A = \{1,2,3,4\}$, halle todas las funciones f tales que $f = A \times B$, eligiendo como B un subconjunto no vacío particular de A para cada función. Grafíquelas.
SUG: Si B tuviera más de dos elementos, $A \times B$ no sería función. (¿?)

23. Para cada $n \in \mathbb{Z}$ (fijo), sea $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f_n(x) = x + n$. Dada la relación $S \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ definida por:
$(x,y) \in S \iff \exists\, f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R} / \ f_n(x) = y$, para algún $n \in \mathbb{Z}$.
Demuestre que S es una relación de equivalencia.

SUG: $S = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} / \ f_n(x) = y$, para algún $n \in \mathbb{Z}\}$
$= \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} / \ y = x + n$, para algún $n \in \mathbb{Z}\}$

24. Una esfera de radio $R > 0$ lleva inscrito un cilindro cuyo eje central pasa por el Centro de la esfera. Exprese el volumen V del cilindro como una función de su altura x. Indique su Dominio.

25. Si $f(x) = ax^2 + bx + c$, $f(-1) = 0$, $f(1) = 8$, $f(-1) + f(1/2) = 15/4$, halle $f(5)$.

26. En las siguientes funciones, halle los intervalos (si existen) en los que las funciones no son negativas $(y \geq 0)$:
a) $f(x) = x^2 - 5x + 4$, b) $f(x) = -x^4 + 2x^3 - x^2$,
c) $f(x) = -(x+1)(x-2)(x^2-9)$, d) $f(x) = \frac{x-8}{x+6}$,
e) $f(x) = \frac{x^2+6x+5}{3-3x^2}$, f) $f(x) = \frac{x^2-9}{4-x^2}$.

27. Sea $f(x) = x^2 + 1$, $x \in \text{Dom } f = [-1, \infty\rangle$, halle los conjuntos $f(A)$ y $f^{-1}(M)$, para a) $A = [1,3] = M$, b) $A = [-2,10\rangle = M$
c) $A = [-1,1\rangle = M$, d) $A = \langle -\infty, 5\rangle = M$.

CLAVE DE RESPUESTAS

1. Son funciones: B, $\text{Dom } B = \mathbb{R} = \text{Rang}(B)$; C, $\text{Dom}(C) = \mathbb{R} - \{0\} = \text{Rang}(C)$; E, $\text{Dom } E = \mathbb{R}^+ \cup \{0\} = \text{Rang}(E)$; y por último: G, $\text{Dom}(G) = \langle -\infty, 4]$, $\text{Rang}(G) = [0, \infty\rangle$.
2. Son funciones de A en A sólo R_2, R_3 y R_4. La única Aplicación de A en A es R_2.
3. (– 1), pues $a = 3$, $b = 4$, $c = 1$, $d = 3$. En efecto, como $\text{Dom } f = \{1,2,3\} \Rightarrow a = 3$. Sólo puede ocurrir que $b = 3$ ó $b = 4$ pues $\text{Rang}(f) \neq \{3,4,5\} = B$, pero si $b = 3 \Rightarrow (a,b) = (3,3) \Rightarrow 3 = f(3)$ lo cual no es posible pues $f(x) \neq x$, $\forall\, x \in A$.
Luego, $b = 4$. Además, de $g(1) = 3 \Rightarrow c = 1$, $d = 3$.
5. Sólo (III) : $\alpha = 1$.
6. (1) $a = 2$, $b = 2$, $f = \{(1,8),(2,-3),(-1,4),(6,2)\}$
(2) $a = -2$, $b = -1$, $g = \{(4,3),(-5,-3),(3,-2),(5,-1)\}$
7. Por el Teorema del Residuo: $f(a) = P(-a) = a^2 - a$,
$\Rightarrow f(2) + f(3) = [2^2 - 2] + [3^2 - 3] = 2 + 6 = 8$.
8. Sólo (I) ; 9. Sólo B y E.

10. Como $f(0) = f(0+0) = f(0) + f(0) = 2f(0) \Rightarrow f(0) = 0$, y como $f(0) = a(0) + b = b \Rightarrow b = 0$. Así, $f(x) = ax$, $f(-2) = -2a = -6 \Rightarrow a = 3$. Luego, $a = 3$, $b = 0$.
11. Todas. SUG: $f(5) = f(0+5) = f(0) + f(5) \Rightarrow f(0) = 0$. Además, $0 = f(0) = f(-5+5) = f(-5) + f(5)$.
12. $8/3$; 14. $-46/3$, pues $b = -2$, $c = k = -20/3$.
15. $A - B = \langle 3, 4 \rangle$; 16. $\langle 1, \infty \rangle$; 17. Sólo (C)
18. Sólo C y G ; 19. Ninguna.
20. Existen 9 de estas funciones, y dos de ellas son:

$f_1 = \{(2,4),(-2,4),(4,16),(-4,16),(6,36),(-6,36),(8,64),(-8,64)\}$

$f_2 = \{(2,4),(0,0),(4,16),(-4,16),(6,36),(-6,36),(8,64),(-8,64)\}$

21. $f(x) = x^2 + 1$, $\text{Dom}\, f = \mathbb{R}$, $A = [-1, 0]$, $B = [0, 1]$, $A \cap B = \{0\}$ $f(A \cap B) = \{1\} \neq f(A) = [0, 1] = f(B)$.
22. Sólo existen 4 funciones así, y todas constantes: $f_n(x) = n$, $\forall\, x \in A$, $n = 1, 2, 3, 4$.
24. $V = V(x) = \pi x [R^2 - (x^2/4)]$, $0 < x < 2R$.
25. $a = 3$, $b = 4$, $c = 1 \Rightarrow f(5) = 3(5)^2 + 4(5) + 1 = 96$.
26. a) $\langle -\infty, 1] \cup [4, \infty \rangle$; b) $\{0, 1\}$; c) $[-3, -1] \cup [2, 3]$;
    d) $\langle -\infty, -6 \rangle \cup [8, \infty \rangle$; e) $[-5, 1\rangle - \{-1\}$;
    f) $[-3, -2\rangle \cup \langle 2, 3]$.
27. a) $f([1, 3]) = [2, 10]$, $f^{-1}([1, 3]) = [-1, \sqrt{2}\,]$
    b) $f([-2, 10\rangle) = [1, 101\rangle$, $f^{-1}([-2, 10\rangle) = [-1, 3\rangle$
    c) $f([-1, 1\rangle) = [1, 2]$, $f^{-1}([-1, 1\rangle) = \varnothing$
    d) $f(\langle -\infty, 5\rangle) = [1, \infty \rangle$, $f^{-1}(\langle -\infty, 5\rangle) = [-1, 2\rangle$.

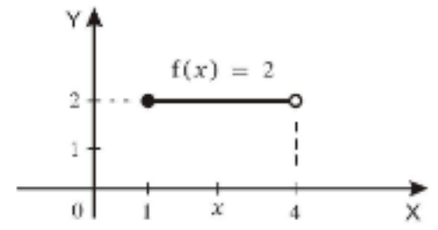
5. CÁLCULO DE DOMINIOS Y RANGOS DE FUNCIONES

El DOMINIO de una función f , en general, se halla ubicando el conjunto de todos los valores posibles que puede tomar la variable x , excepto en el caso en el que dicho dominio haya sido previamente especificado.

Asimismo, si el Dominio de f , es un conjunto A, entonces el RANGO de f se halla especificando el CONJUNTO IMAGEN $f(A)$, el cual ya sabemos cómo encontrar [partiendo de los $x \in \text{Dom}\, f = A$ y construyendo los valores $f(x)$ mediante las PROPIEDADES DE LOS NÚMEROS REALES y la regla de correspondencia de f] .

EJEMPLO .- En la función $y = f(x) = 2$, $x \in [1, 4\rangle$,

el Dominio ya está indicado: $\text{Dom}\, f = [1, 4\rangle$.



El Rango es el conjunto

$R_f = \{ f(x) / x \in \text{Dom}\, f \} = \{ f(x) = 2 / x \in [1, 4\rangle \} = \{2\}$

que consiste de un solo elemento, el cual se puede leer en el Eje Y. En este caso, la gráfica consiste del segmento de recta horizontal ubicada a la altura $y = 2$, correspondiente sólo a los valores de $x \in [1, 4\rangle$.

5.1 EJEMPLO .- Halle el rango y la gráfica de la función:

$$f(x) = \sqrt{x+2} \ , \quad x \in [-1, 23] \ .$$

SOLUCIÓN .- $\text{Dom}\, f = A = [-1, 23]$ ya está especificado. [Si no se hubiese dado, entonces se habría hallado en base a que la expresión subradical tiene que ser ≥ 0 :

$$x + 2 \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \geq -2 \quad \Leftrightarrow \quad x \in [-2, \infty\rangle$$

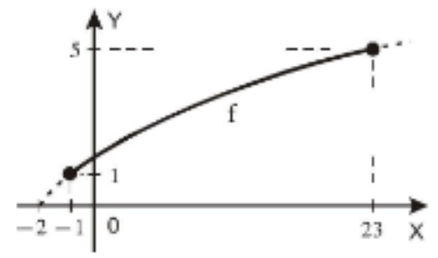
y que en general es más grande que el Dominio sobre el cual vamos a trabajar en este caso]. Construiremos el RANGO reconstruyendo la forma de las $y = f(x)$:

$$\forall\, x \in [-1, 23] \ , \quad -1 \leq x \leq 23 \quad \Leftrightarrow \quad 1 \leq x + 2 \leq 25 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad 1 \leq \sqrt{x+2} \leq 5 \quad \Leftrightarrow \quad 1 \leq f(x) \leq 5 \quad \Leftrightarrow \quad f(x) \in [1, 5] \ .$$

Por lo tanto,

$$R_f = f(A) = \{ f(x) / x \in \text{Dom}\, f \} = \{ f(x) / x \in [-1, 23] \} = [1, 5] \ .$$



5.2 EJEMPLO .- Halle el mayor Dominio admisible y el Rango de la función:

$$f(x) = \sqrt{x^2 + 2x - 8} = \sqrt{(x-2)(x+4)} = \sqrt{(x+1)^2 - 9} \ .$$

SOLUCIÓN .- a) El Dominio está constituido por todos aquellos x que hacen que la expresión subradical sea ≥ 0 :

$$(x-2)(x+4) \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \in \langle -\infty, -4] \cup [2, \infty\rangle = \text{Dom}\, f$$

b) Para evaluar el RANGO partimos de la condición dada para los x en el Dominio, y luego se construyen las cotas adecuadas para los valores de y como sigue

$[\, y = f(x)\,]$: $\forall\ x \in \langle -\infty, -4\,] \cup [\,2, \infty\rangle$, $\quad (x+4)(x-2) \geq 0$

$\Leftrightarrow \quad f(x) = \sqrt{(x-2)(x+4)} \ \geq\ 0 \quad \Leftrightarrow \quad y = f(x) \in [\,0, \infty\rangle$

Por lo tanto, $R_f = \{\, f(x) \,/\, x \in \text{Dom}\, f = \langle -\infty, -4\,] \cup [\,2, \infty\rangle \,\}$

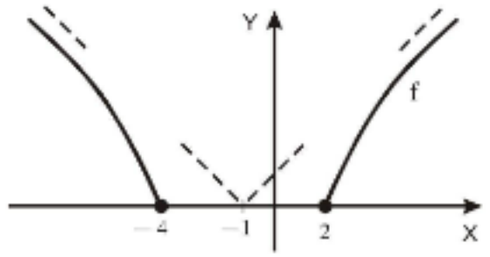
$= [\,0, \infty\rangle$.

c) Notamos que: $y = f(x) = \sqrt{(x+1)^2 - 9} \quad \Leftrightarrow \quad (x+1)^2 - y^2 = 9\ ,\ \underline{y \geq 0}$

donde reconocemos que la gráfica de f es una parte de la hipérbola equilátera:

$$\frac{(x+1)^2}{3^2} - \frac{y^2}{3^2} = 1$$

pero solamente para los valores de $y \geq 0$ (semiplano superior).



5.3 EJEMPLO .- Halle el dominio, el rango y la gráfica de la función

$$f(x) = \frac{x - |x|}{x} \quad , \quad x \neq 0$$

SOLUCIÓN .- $\text{Dom}\, f = \mathbb{R} - \{0\}$. Además,

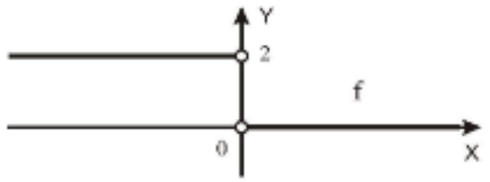
- $\forall\ x \in \langle -\infty, 0\rangle$: $\quad y = f(x) = \dfrac{x-(-x)}{x} = \dfrac{2x}{x} = 2 \qquad \ldots$ (a)

- $\forall\ x \in \langle 0, \infty\rangle$: $\quad y = f(x) = \dfrac{x-(x)}{x} = 0 \qquad \ldots$ (b)

$\Rightarrow \quad R_f = \{\, f(x) \,/\, x \in \langle -\infty, 0\rangle \cup \langle 0, \infty\rangle\,\} = \{0, 2\}$

De (a) y (b) obtenemos la gráfica de f :

$$f(x) = \begin{cases} 2\ , & \text{si} \quad x < 0 \\ 0\ , & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$$



5.4 EJERCICIO .- Halle el dominio, el rango y la gráfica de la función

$$f(x) = (x^2 - x - 2) \,/\, (x-2)$$

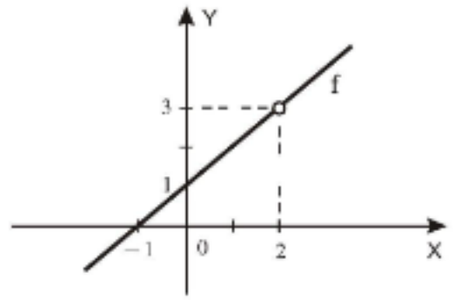
SOLUCIÓN . $\quad y = f(x) = (x+1)(x-2) \,/\, (x-2) = x+1$, PERO PARA $x \neq 2$, $\Rightarrow \quad \text{Dom}\, f = \mathbb{R} - \{2\}$.

Su gráfica corresponde a la de la recta $y = x + 1$ a la cual se le ha quitado UN PUNTO: el $(2, 3)$, correspondiente a $x = 2$, pues éste no se encuentra en el Dominio de f .

De la misma gráfica también vemos que

$R_f = \mathbb{R} - \{3\}$

$= \langle -\infty, 3\rangle \cup \langle 3, \infty\rangle$



5.5 EJERCICIO .- Halle el Dominio, el Rango y la gráfica de las funciones:

a) $\quad f(x) = x^2 - 6x + 5$,

b) $\quad g(x) = \dfrac{x^3 - 9x^2 + 23x - 15}{x-3}$, $\qquad$ c) $\quad h(x) = \dfrac{x^3 - 8x^2 + 17x - 10}{x-2}$

SOLUCIÓN.- Completando cuadrados: $y = f(x) = (x-3)^2 - 4 \geq -4$, PARA TODO $x \in \mathbb{R}$ [Propiedad de los Números Reales] .

$\Leftrightarrow \quad f(x) \geq -4\ ,\ \forall\ x \in \mathbb{R}$

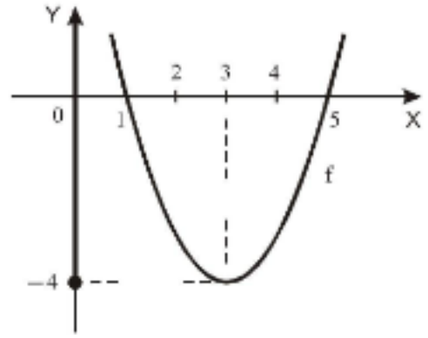
$\text{Dom}\, f = \mathbb{R}$

$R_f = [-4, \infty\rangle$

Además, (a) :

$y = f(x) = (x-5)(x-1)$

cuya gráfica corresponde a la parábola que corta al Eje X en $x = 5$ y $x = 1$.



b) Factorizando: $\quad g(x) = \dfrac{x^3 - 9x^2 + 23x - 15}{x-3} = \dfrac{(x-5)(x-1)(x-3)}{x-3}$

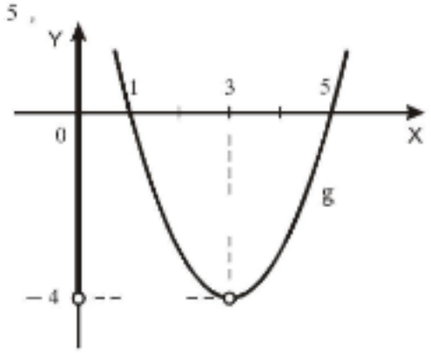
$\Rightarrow \quad g(x) = (x-5)(x-1) = x^2 - 6x + 5$,

$= (x-3)^2 - 4$

¡ pero para $x \neq 3$!

$\Rightarrow \quad \text{Dom}\, g = \mathbb{R} - \{3\}$.

La gráfica corresponde a la parábola de la parte (a) pero a la que se le ha quitado el punto $(x, y) = (3, -4)$, pues si $x = 3$, entonces $f(x)$ " habría sido " $= -4$.



c) Factorizando:

$$h(x) = \frac{x^3 - 8x^2 + 17x - 10}{x - 2}$$

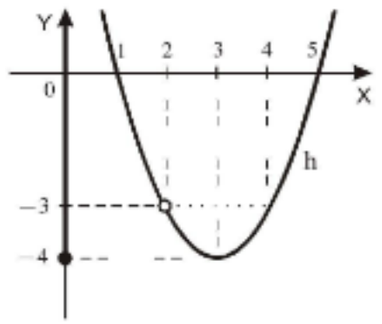
$$h(x) = \frac{(x-5)(x-1)(x-2)}{(x-2)}$$

$$= x^2 - 6x + 5 , \quad x \neq 2$$

$$h(x) = (x-3)^2 - 4 ,$$

¡ pero para $x \neq 2$!,

$\Rightarrow$ Dom h $= \mathbb{R} - \{2\}$.



La gráfica corresponde a la parábola de la parte [a] pero a la que se le ha quitado el punto $(x, y) = (2, -3)$ [pues si $x = 2$, entonces $f(x)$ "habria sido" $= -3$]. Además, vemos que Rang (h) $= [-4, \infty\rangle$ coincide con el Rang (f) de la parte [a], debido a que el punto $(4, -3) \in h$.

5.6 EJERCICIO .- Halle el Dominio de la función real:

$$f(x) = \sqrt{\frac{4}{(x+1)^2} + \frac{x-3}{x+1} - 49} \quad .$$

SOLUCIÓN .- $\frac{4}{(x+1)^2} + \frac{x-3}{x+1} - 49 \geq 0 \Leftrightarrow [\frac{x-1}{x+1}]^2 - 49 \geq 0$

$(\frac{x-1}{x+1} - 7)(\frac{x-1}{x+1} + 7) \geq 0 \Leftrightarrow (-6x-8)(8x-6) \geq 0 \wedge x \neq -1$

$\Leftrightarrow (x + \frac{4}{3})(x - \frac{3}{4}) \leq 0 \wedge x \neq -1 \Leftrightarrow x \in ([-\frac{4}{3}, \frac{3}{4}] - \{-1\}) =$ Dom f

5.7 EJERCICIO .- Halle el rango y la gráfica de la función

$$y = f(x) = -3 + \sqrt{x^2 - 4x + 5} \ , \ -2 \leq x < 6 \ .$$

SOLUCIÓN .- Completando cuadrados: $x^2 - 4x + 5 = (x-2)^2 + 1$, luego,

$\forall x \in$ Dom f $= [-2, 6\rangle$: $-2 \leq x < 6 \Leftrightarrow -4 \leq x - 2 < 4$

$\Rightarrow 0 \leq (x-2)^2 \leq 16 \Leftrightarrow 1 \leq (x-2)^2 + 1 \leq 17 \Leftrightarrow$

$1 \leq \sqrt{(x-2)^2+1} \leq \sqrt{17} \Leftrightarrow -2 \leq -3 + \sqrt{(x-2)^2+1} \leq \sqrt{17} - 3$

$\Leftrightarrow -2 \leq f(x) \leq \sqrt{17} - 3 \ (\cong 1.12) \Leftrightarrow$ Rang (f) $= [-2, \sqrt{17} - 3]$.

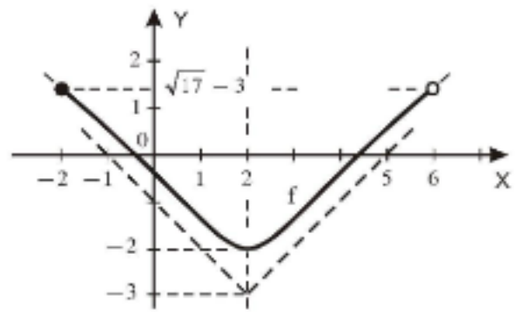
Como $y = -3 + \sqrt{(x-2)^2 + 1} \Leftrightarrow y + 3 = \sqrt{(x-2)^2 + 1}$

$\Leftrightarrow (y+3)^2 - (x-2)^2 = 1, \quad y \geq -3$.

La gráfica corresponde a una parte de la hipérbola equilátera de ecuación :

$(y+3)^2 - (x-2)^2 = 1$,
con $y \geq -3$,
para los valores $x \in [-2, 6\rangle$.

Rang (f) $= [-2, \sqrt{17} - 3]$



5.8 EJERCICIO .- Un cazador situado en el punto A(2, 5) dispara a un pato situado en B(−1, −4). La trayectoria del proyectil es una recta de pendiente m. Si la presión arterial "p" del pato depende de la distancia "d" (pequeña) con que lo roza el proyectil, según la relación

$$p = \begin{cases} 0 \ , & \text{si} \quad d = 0 \\ 12 + (1/d) \ , & \text{si} \quad d > 0 \ , \end{cases}$$

exprese la presión p del pato en función de la pendiente m , para $m \in \langle 0, 3\rangle$.

SOLUCION .- Pendiente de $\overline{AB} = m_1 = [5 - (-4)] / [2 - (-1)] = 3$;

Si L es la trayectoria del proyectil $L: \ y - 5 = m(x-2)$

$L: \ y - mx + 2m - 5 = 0 \Rightarrow d =$ Dist $[(-1, -4); L]$

$\Rightarrow d = |-4 + m + 2m - 5| / \sqrt{1 + m^2} = |3m - 9| / \sqrt{1 + m^2}$

$d = (9 - 3m) / \sqrt{1 + m^2}$, pues $m \in \langle 0, 3\rangle$

Puesto que

$$p = \begin{cases} 0 \ , & \text{si } d = 0 \\ 12 + \frac{1}{d} \ , & \text{si } d > 0 \end{cases}$$

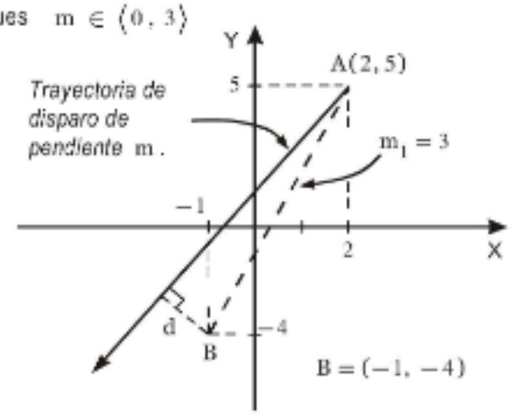
y como

$d = 0 \Leftrightarrow m = 3$,

lo cual no es permitido entonces sólo se cumple que $d > 0$,

y por lo tanto, para $m \in \langle 0, 3\rangle$:

$$p = p(m) = 12 + \frac{1}{d} = 12 + [\sqrt{1 + m^2} / (9 - 3m)] \ .$$



5.9 FUNCIONES CON VARIAS REGLAS DE CORRESPONDENCIA

Cuando una función está constituida por varias reglas de correspondencia (o funciones parciales) como

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x) , & x \in A = \text{Dom } f_1 \\ f_2(x) , & x \in B = \text{Dom } f_2 \end{cases} , \quad \text{donde} \quad A \cap B = \varnothing$$

entonces se prueba que

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{Dom } f = \text{Dom}(f_1) \cup \text{Dom}(f_2) = A \cup B \\ \text{Rang}(f) = \text{Rang}(f_1) \cup \text{Rang}(f_2) \end{array}}$$

pues $\text{Rang}(f) = f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$
$= f_1(A) \cup f_2(B) = \text{Rang}(f_1) \cup \text{Rang}(f_2)$

Estos resultados se extienden a funciones con tres o más funciones parciales.

5.10 EJEMPLO .- Halle el Dominio, el Rango y la gráfica de la función

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 + 4 , & x < 3 \quad (f_1) \\ -2x + 5 , & x > 3 \quad (f_2) \end{cases}$$

a) $f_1(x) = -x^2 + 4$, $\forall\, x \in \langle -\infty, 3 \rangle = \text{Dom } f_1$, entonces

$x < 3 \Leftrightarrow x^2 \geq 0 \Leftrightarrow -x^2 \leq 0 \Leftrightarrow 4 - x^2 \leq 4$

$\Leftrightarrow f_1(x) = (4 - x^2) \in \langle -\infty, 4] = \text{Rang}(f_1)$

b) $f_2(x) = -2x + 5$, $\forall\, x \in \langle 3, \infty \rangle = \text{Dom}(f_2)$, entonces

$x > 3 \Leftrightarrow -2x < -6 \Leftrightarrow f_2(x) = -2x + 5 < -1$

$\Leftrightarrow f_2(x) \in \langle -\infty, -1 \rangle \Leftrightarrow \text{Rang}(f_2) = \langle -\infty, -1 \rangle$.

De (a) y (b): $\text{Dom}(f) = \text{Dom } f_1 \cup \text{Dom } f_2 = \langle -\infty, 3 \rangle \cup \langle 3, \infty \rangle$

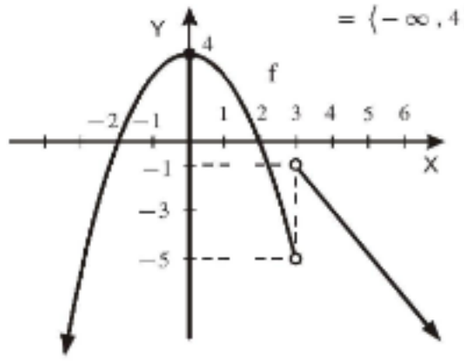
$\text{Rang}(f) = \text{Rang}(f_1) \cup \text{Rang}(f_2) = \langle -\infty, 4] \cup \langle -\infty, -1 \rangle$

$= \langle -\infty, 4]$;

Sobre $\text{Dom } f_1 = \langle -\infty, 3 \rangle$
se grafica la parábola
$y = f_1(x) = 4 - x^2$

Sobre $\text{Dom } f_2 = \langle 3, \infty \rangle$
se grafica la recta
$y = f_2(x) = -2x + 5$.

Así, $\text{Rang}(f) = \langle -\infty, 4]$.



5.11 EJERCICIO .- Halle el Dominio, el rango y la gráfica de la función

$$f(x) = \begin{cases} x - 1 , & x \in [-3, -1\rangle \quad \ldots (f_1) \\ 0 , & x \in \langle 1, 2\rangle \quad \ldots (f_2) \\ 2x - 3 , & x \in \langle 2, 4] \quad \ldots (f_3) \end{cases}$$

SOLUCIÓN .- $\text{Dom } f = [-3, -1\rangle \cup \langle 1, 2\rangle \cup \langle 2, 4]$,

a) $\forall\, x \in \text{Dom } f_1 = [-3, -1\rangle$, $-3 \leq x < -1 \Leftrightarrow$

$-4 \leq (x - 1) < -2 \Leftrightarrow f_1(x) = (x - 1) \in [-4, -2\rangle = R_{f_1}$

$\Leftrightarrow \text{Rang}(f_1) = [-4, -2\rangle$.

b) $\forall\, x \in \text{Dom } f_2 = \langle 1, 2\rangle$, $f_2(x) = 0 \Leftrightarrow \text{Rang}(f_2) = \{0\}$.

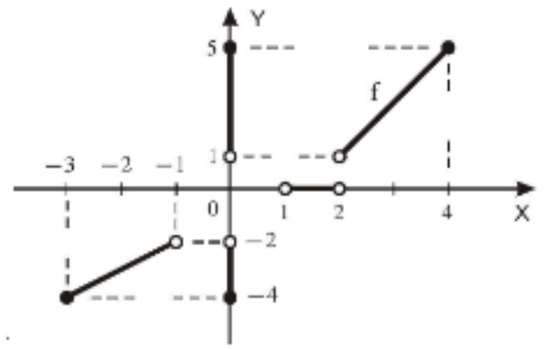
c) $\forall\, x \in \text{Dom } f_3 = \langle 2, 4]$,

$\Leftrightarrow 2 < x \leq 4$
$\Leftrightarrow 4 < 2x \leq 8$
$\Leftrightarrow 1 < (2x - 3) \leq 5$
$\Leftrightarrow 1 < f(x) \leq 5$
$\Leftrightarrow \text{Rang}(f_3) = \langle 1, 5]$

$\therefore$ De (a), (b) y (c):

$\text{Rang}(f) =$

$= [-4, -2\rangle \cup \{0\} \cup \langle 1, 5]$.



5.12 EJERCICIO .- Sea $f(x) = x^2 - 2|x| - 3$. Halle su dominio, su rango y la gráfica.

SOLUCIÓN .- $f(x) = (|x| - 1)^2 - 4$, $\text{Dom } f = \mathbb{R}$

y como $(|x| - 1)^2 - 4 \geq -4$
$\Leftrightarrow f(x) \geq -4$,
entonces
$\text{Rang}(f) = [-4, \infty\rangle$.

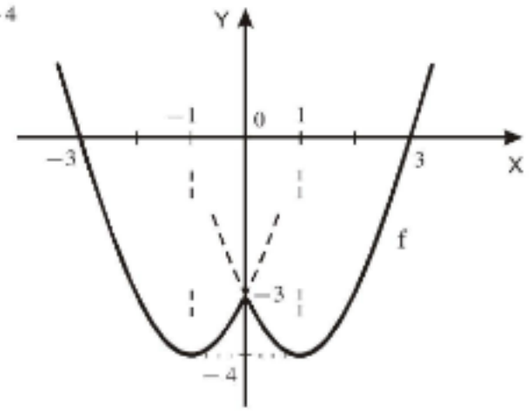
a) Si $x \geq 0$:

$f(x) = (x - 1)^2 - 4$

b) Si $x < 0$:

$f(x) = [(-x) - 1]^2 - 4$
$= (x + 1)^2 - 4$,

cuyas gráficas son las secciones de parábolas de la figura adyacentes.

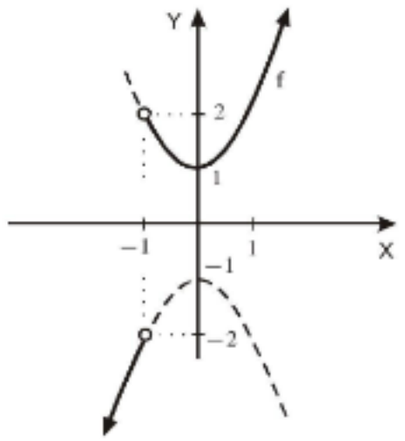


5.13 EJERCICIO .- Grafique la función: $f(x) = \dfrac{x^3 + x^2 + x + 1}{|x + 1|}$ indicando su dominio y su rango.

SOLUCIÓN .- Podemos expresar f en la siguiente forma:

$$f(x) = \frac{x^2(x+1) + (x+1)}{|x+1|}$$

$$f(x) = \frac{(x+1)}{|x+1|}(x^2+1)$$



Luego,

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & , \quad x > -1 \\ -(x^2+1) & , \quad x < -1 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ $\text{Dom } f = \mathbb{R} - \{-1\}$,

$\text{Rang}(f) = \langle -\infty, -2 \rangle \cup [1, \infty)$.

SERIE DE EJERCICIOS

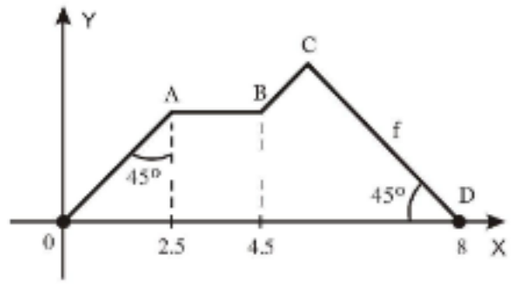
1. Si $f(x+4) = x^2 + 3x$, Halle $f(a+1)$.
2. Halle el rango de $f(x) = x - |x - 2|$, $x \in \mathbb{R}$.
3. Halle el dominio, el rango y la gráfica de las funciones:

   a) $f(x) = \dfrac{x^3 + 7x^2 + 14x + 8}{x^2 + 6x + 8}$

   b) $f(x) = \dfrac{x^4 - 10x^3 + 35x^2 - 50x + 24}{x^2 - 4x + 3}$, c) $f(x) = \sqrt{x^2 + 2x - 3}$.

4. Halle el dominio, rango y gráfica de la función $f(x) = (4x^2 - 9)/|2x + 3|$.
5. Si $f(x) = -x^2 + 3x + 1$ y $g(x) = 3x^2 + 2x + 1$, $x \in \mathbb{R}$, halle $\text{Rang}(f) \cap \text{Rang}(g)$.
6. Halle el dominio y el rango de la función $f(x) = 1/[\![x]\!]$.
7. Halle el dominio de la función $f(x) = \sqrt{\dfrac{x^3 + 2x^2 + x}{x - 2}}$.
8. Si la gráfica de la función f está dada en la figura, halle su regla de correspondencia:

$\overline{OA} \;//\; \overline{BC}$, $\overline{OX} \;//\; \overline{AB}$



9. Dadas las funciones $f(x) = 3x^2 + 6x + 2$, $g(x) = \sqrt{4 - x^2}/(x - 2)$, Halle $\complement[\text{Rang}(f) - \text{Dom}(g)]$.
10. Halle el dominio de la función $f(x) = \sqrt{(x^2 - 1)/|x - 2|}$.
11. Halle el rango y la gráfica de la función f :
$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x-2} & , \quad x \geq 2 \\ x^2 + 2x - 3 & , \quad x \in [-1, 1\rangle \end{cases}$$
12. Halle el dominio, el rango y la gráfica de las funciones:

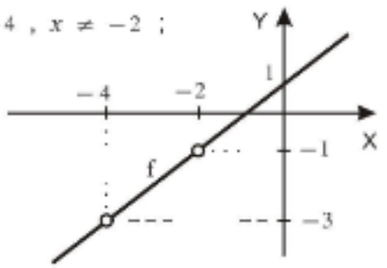
    a) $f(x) = \dfrac{x^3 - x^2 - 13x - 3}{x + 3}$ b) $f(x) = \dfrac{(x^2 + 3x - 4)(x^2 - 5x + 6)}{(x^2 - 3x + 2)(x - 3)}$

    c) $f(x) = \dfrac{x^4 - 3x^3 - 11x^2 + 23x + 6}{x^2 + x - 6}$.

13. Halle el Dominio y el Rango de la función $f(x) = x^2/(x - 2)^2$.
14. Si $f(x) = 4 + \sqrt{(x+6)^2 - 9}$, $\text{Dom } f = (-\infty, -11]$, y $g(x) = (x+3)^2 - 3$, $\text{Dom } g = \langle 0, \infty \rangle$. Halle $\text{Rang}(f) \cap \text{Rang}(g)$.

CLAVE DE RESPUESTAS

1. $f(a+1) = a^2 - 3a$; 2. $(-\infty, 2]$
3. a) $y = f(x) = x + 1$, para $x \neq -4$, $x \neq -2$;
   $\text{Dom } f = \mathbb{R} - \{-2, -4\}$
   $\text{Rang } f = \mathbb{R} - \{-1, -3\}$



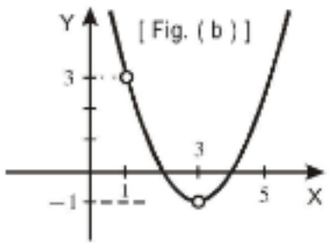
   b) $f(x) = x^2 - 6x + 8$, para $x \neq 1$, $x \neq 3$;

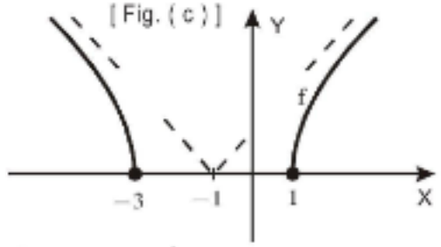
$\text{Dom}\, f = \mathbb{R} - \{1, 3\}$, $\text{Rang}\, f = \langle -1, \infty \rangle$ Ver Fig. (b)

c) $y = f(x) = \sqrt{(x+1)^2 - 4}$; parte de la hipérbola

$(x+1)^2 - y^2 = 4$, $y \geq 0$

$\text{Dom}\, f = \langle -\infty, -3] \cup [1, \infty \rangle$, $\text{Rang}\, f = [0, \infty \rangle$ Ver Fig. (c)





4. $\text{Dom}\, f = \mathbb{R} - \{-3/2\}$, $\text{Rang}\, f = [-6, \infty \rangle$

$f(x) = (2x - 3)\,[\,(2x+3) / |2x+3|\,]$

$\Rightarrow$ $\text{Dom}\, f = \mathbb{R} - \{-3/2\}$, $\text{Rang}\, f = [-6, \infty \rangle$

5. $\text{Rang}\, f = [-3/5, 1]$

6. $[\![x]\!] = n \Leftrightarrow x \in [n, n+1 \rangle$

$\text{Dom}\, f = \mathbb{R} - [0, 1 \rangle$, $\text{Rang}\, f = \{ \frac{1}{n} / \; n \in \mathbb{Z}, n \neq 0 \}$

7. $\langle -\infty, 0] \cup \langle 2, \infty \rangle$

8. $f(x) = \begin{cases} x & , \quad x \in [0, 5/2 \rangle \\ 5/2 & , \quad x \in [5/2, 9/2 \rangle \\ x - 2 & , \quad x \in [9/2, 5 \rangle \\ 8 - x & , \quad x \in [5, 8] \end{cases}$

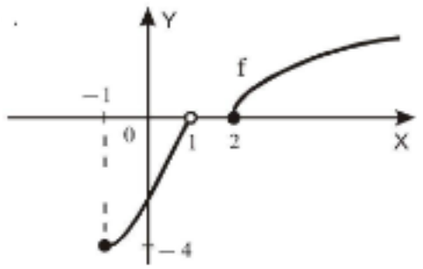
9. $\langle -\infty, 2 \rangle$, pues $\text{Rang}\,(f) - \text{Dom}\,(g) = [2, \infty \rangle$

10. $\langle -\infty, -1] \cup [1, 2 \rangle \cup \langle 2, \infty \rangle$.

11. $x^2 + 2x - 3 = (x+1)^2 - 4$,

$R_f = [-4, 0 \rangle \cup [0, \infty \rangle$

$= [-4, \infty \rangle$.



12. a) $\text{Dom}\, f = \mathbb{R} - \{-3\}$, $\text{Rang}\, f = [-5, \infty \rangle$

b) $\text{Dom}\, f = \mathbb{R} - \{1, 2, 3\}$, $\text{Rang}\, f = \mathbb{R} - \{5, 6, 7\}$

13. $\text{Dom}\, f = \mathbb{R} - \{2\}$, $\text{Rang}\, f = [0, \infty \rangle$

14. $R_f = [8, \infty \rangle$, $R_g = \langle 6, \infty \rangle$, $R_f \cap R_g = [8, \infty \rangle$.

6. FUNCIONES ESPECIALES

6.1 FUNCIÓN IDENTIDAD

Es denotada por $I : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, tiene $\text{Dom}\, I = \mathbb{R}$ y regla de correspondencia $y = I(x) = x$, de donde vemos que su gráfica es una recta de pendiente **1**, que pasa por el origen.

Si la función identidad ha de tener un dominio $A \subset \mathbb{R}$ entonces como ya sabemos, se le denota I_A , es decir

$$I_A(x) = x , \quad \forall \; x \in A$$

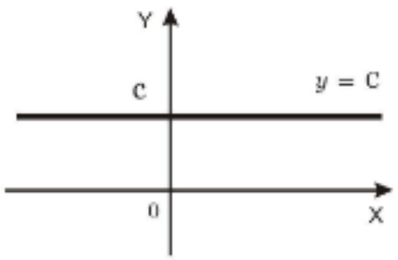
y se dice que es la **FUNCIÓN IDENTIDAD SOBRE A** , o la **RESTRICCIÓN DE LA FUNCIÓN IDENTIDAD I AL CONJUNTO A** .

6.2 FUNCIÓN CONSTANTE

Es una función con dominio $\mathbb{R}$ y cuyo rango consiste de un solo elemento $C \in \mathbb{R}$:

$y = f(x) = C$, $\forall \; x \in \mathbb{R}$

$\text{Rang}\,(C) = \{C\}$



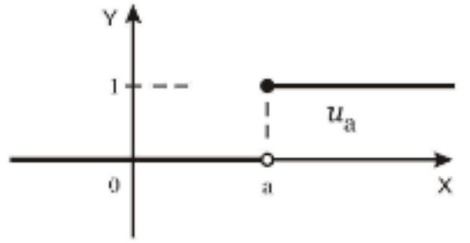
6.3 FUNCIÓN ESCALÓN UNITARIO

Para cada $a \in \mathbb{R}$ (a fijo), se define la "FUNCIÓN ESCALÓN UNITARIO DE PASO a " como :

$$u_a(x) = \begin{cases} 0 & , \quad x < a \\ 1 & , \quad x \geq a \end{cases}$$

$\text{Dom}\, u_a = \langle -\infty, \infty \rangle$

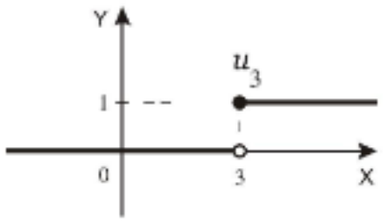
$\text{Rang}\, u_a = \{0, 1\}$.

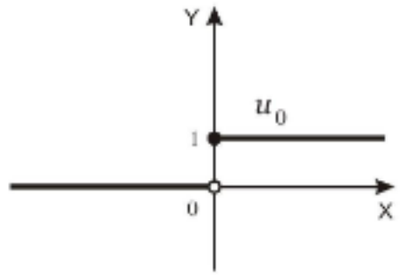


Note que en el punto $x = a$, la gráfica da un salto vertical unitario.

Por ejemplo:

$$u_3(x) = \begin{cases} 0 & , \quad x < 3 \\ 1 & , \quad x \geq 3 \end{cases} , \qquad u_0(x) = \begin{cases} 0 & , \quad x < 0 \\ 1 & , \quad x \geq 0 \end{cases}$$





6.4 NOTA .- A la función u_0 también se le denota simplemente u es decir,

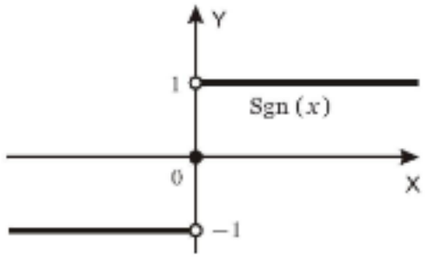
$$u_0(x) = u(x) .$$

6.5 FUNCIÓN SIGNO

$$\text{Sgn}(x) = \begin{cases} -1 & , \quad x < 0 \\ 0 & , \quad x = 0 \\ 1 & , \quad x > 0 \end{cases}$$

$$\text{Dom Sgn} = \langle -\infty , \infty \rangle$$

$$\text{Rang Sgn} = \{-1, 0, 1\}$$



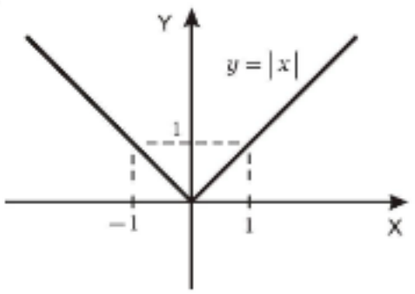
6.6 FUNCIÓN VALOR ABSOLUTO

$$y = f(x) = |x| = \begin{cases} x & , \quad x \geq 0 \\ -x & , \quad x < 0 \end{cases}$$

$$\text{Dom} \left| \ \right| = \mathbb{R}$$

$$\text{Rang} \left| \ \right| = [0, \infty \rangle$$

La gráfica está constituida por una parte de la recta $y = x$, para $x \geq 0$, y por una parte de la recta $y = -x$, para $x < 0$.



6.7 FUNCIÓN MÁXIMO ENTERO

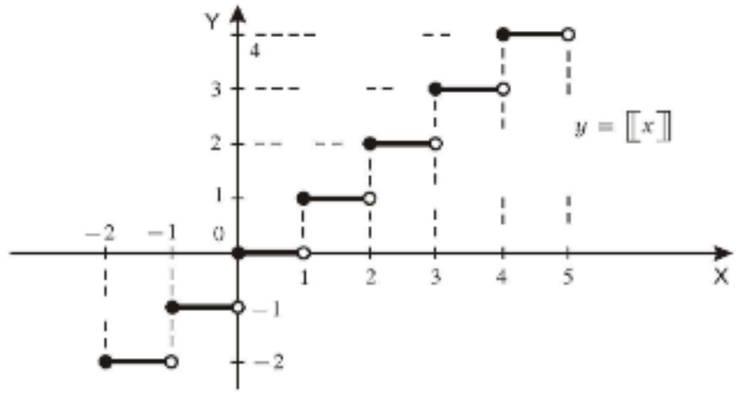
Es aquella función f definida por:

$$f(x) = [\![x]\!] \quad , \quad \text{si} \quad n \leq x < n + 1 , \quad n \in \mathbb{Z}$$

cuyo dominio es $\mathbb{R}$ y cuyo rango es $\mathbb{Z}$.

Dando algunos valores a n :

$$f(x) = [\![x]\!] = \begin{cases} -2 & , \quad \text{si} \quad -2 \leq x < -1 \\ -1 & , \quad \text{si} \quad -1 \leq x < 0 \\ 0 & , \quad \text{si} \quad 0 \leq x < 1 \\ 1 & , \quad \text{si} \quad 1 \leq x < 2 \\ 2 & , \quad \text{si} \quad 2 \leq x < 3 \end{cases}$$

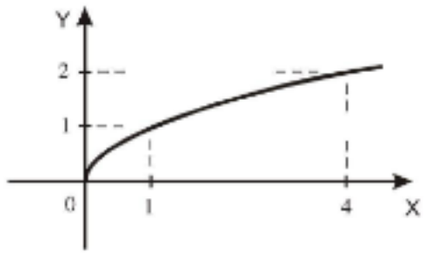


6.8 FUNCIÓN RAÍZ CUADRADA

Es la función cuya regla de correspondencia es:

$$f(x) = \sqrt{x} \qquad (\text{ o } \quad f(x) = x^{1/2} \ )$$

con dominio $[0, \infty \rangle$
y rango $[0, \infty \rangle$



6.9 FUNCIONES CUADRÁTICAS

Son aquellas que tienen la forma

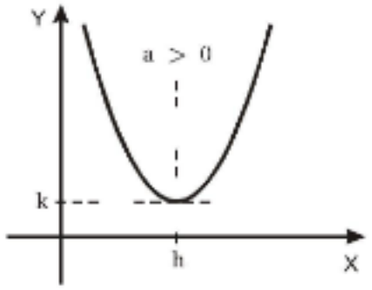
$$f(x) = ax^2 + bx + c \quad , \quad a \neq 0$$

y que por completación de cuadrados siempre pueden transformarse en:

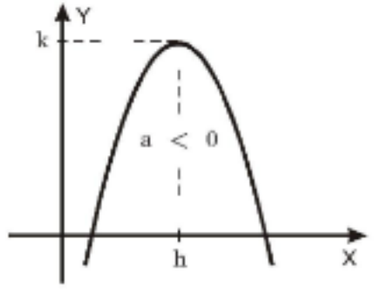
$$f(x) = a(x - h)^2 + k$$

que corresponden a parábolas con dominio $\mathbb{R}$, y con vértice $V = (h, k)$.

i) Si $a > 0$:
Dom f $= \mathbb{R}$
Rang f $= [k, \infty\rangle$



ii) Si $a < 0$:
Dom f $= \mathbb{R}$
Rang f $= \langle -\infty, k]$



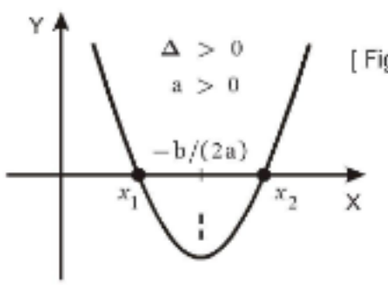
Y como $f(x) = a[(x + \frac{b}{2a})^2 - \frac{\Delta}{4a^2}]$, $\Delta = b^2 - 4ac$ (DISCRIMINANTE)

entonces se presentan los siguientes casos:

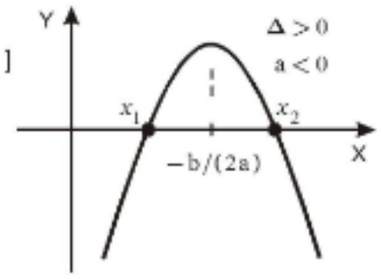
1) $f(x)$ tiene raíces reales si y sólo si $\Delta \geq 0$. Es decir, que en este caso, existen valores reales de x para los cuales $f(x) = 0$.

Geométricamente, esto significa que la gráfica de f ***corta al Eje*** X , ***de todas maneras***. En este caso (1) se presentan dos subcasos:

i) Que $f(x)$ tiene dos raíces reales distintas x_1 y x_2, $x_1 \neq x_2 \Leftrightarrow \Delta > 0$.
Esto significa que la gráfica de f corta al Eje en dos puntos distintos. [Fig. (1i)].



[Fig. (1.i)]



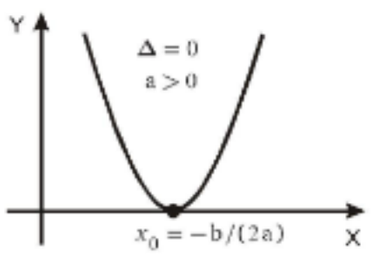
Cuando esto se presenta ya sabemos que ***ESTA ECUACIÓN DE 2º GRADO*** , $f(x)$ puede ser factorizada en la forma: $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$.

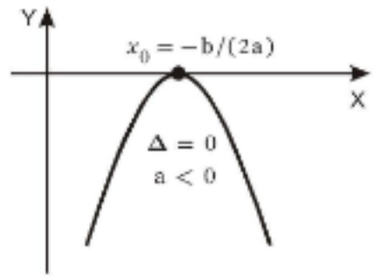
Por ejemplo, $f(x) = 2x^2 + 4x - 6$ tiene $a = 2$, $b = 4$, $c = -6$
con $\Delta = b^2 - 4ac = 16 - 4(-12) = 40 > 0$,
y se puede factorizar en la forma $f(x) = 2(x - 1)(x + 3)$.

ii) Que $f(x)$ tiene una sola raíz $x = x_0$ (raíz de multiplicidad 2) :

[O sea, $x_1 = x_2 =] x_0 = -\frac{b}{2a} \Leftrightarrow \Delta = 0 \Leftrightarrow [\, b^2 - ac = 0 \,]$.

Esto significa que la gráfica de f corta al Eje X ***en un solo punto, en forma tangente a este Eje.***





Cuando esto se presenta, entonces $f(x)$ siempre resulta ser ***UN CUADRADO PERFECTO:*** $f(x) = a(x + \frac{b}{2a})^2 = a(x - x_0)^2$

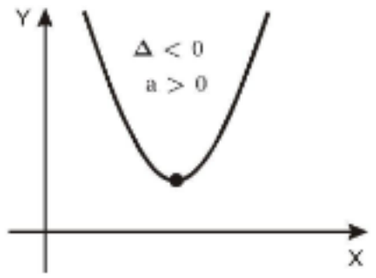
Por ejemplo $f(x) = 3x^2 - 12x + 12 = 3(x^2 - 4x + 4) = 3(x - 2)^2$

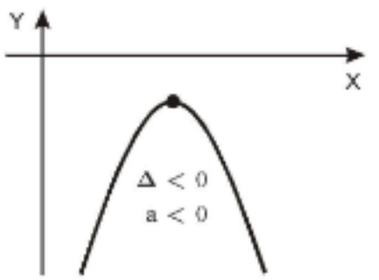
pues tiene $a = 3$, $b = -12$, $c = 12 \Rightarrow \Delta = 144 - 4(36) = 0$.

CASO 2) $f(x)$ ***no tiene raíces reales si y solamente si*** $\Delta < 0$.

Por ejemplo, $f(x) = 2x^2 - 4x + 5 = 2(x - 1)^2 + 3$ no se hace CERO para ningún valor real de x .

En efecto, $a = 2$, $b = -4$, $c = 5 \Rightarrow \Delta = -24 < 0$.





6.11 POLINOMIOS

Las funciones cuadráticas son casos especiales de POLINOMIOS. Un Polinomio es una función de la forma:

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

donde $n \geq 0$, entero, y donde $a_0, a_1, \ldots, a_n$ son constantes.

Si $a_n \neq 0$ el polinomio es de GRADO n, y al coeficiente a_n se le llama COEFICIENTE PRINCIPAL.

Un polinomio de grado 0 es toda ***Función Constante:*** $f(x) = a_0$, $a_0 \neq 0$.

Un polinomio de grado 1 es toda ***Función Lineal*** $f(x) = ax + b$.

Si r es una raíz de un polinomio $f(x)$ [es decir: $f(r) = 0$] de grado n, se puede expresar $f(x) = (x - r) \cdot Q(x)$, para algún ***polinomio*** $Q(x)$ ***de grado*** $(n - 1)$.

Se llama **RAÍZ DE MULTIPLICIDAD m** del polinomio $f(x)$ a aquella raíz r tal que hace posible expresar:

$$f(x) = (x - r)^m \cdot Q(x), \quad \text{siendo } Q(r) \neq 0$$

y donde $Q(x)$ es un ***polinomio de grado*** $(n - m)$.

Un polinomio de grado n ***tiene a lo más*** n raíces contando sus multiplicidades.

Así $f(x) = 3(x-1)^2 (x+4)^3 (x^2+1)$ es un polinomio de grado $n = 7$ con dos raíces reales: $r = 1$ de multiplicidad 2 y $r = -4$ de multiplicidad 3, y dos raíces complejas; mientras que $g(x) = -x^4(x+1)^3 (x-5)^2 (x^6+4)$ es un polinomio de grado $n = 15$ con tres raíces reales: $r = 0$ (de multiplicidad 4), $r = -1$ (de multiplicidad 3), y $r = 5$ (de multiplicidad 2). Y tiene 6 raíces complejas, conjugadas dos a dos debido a que el polinomio tiene coeficientes reales.

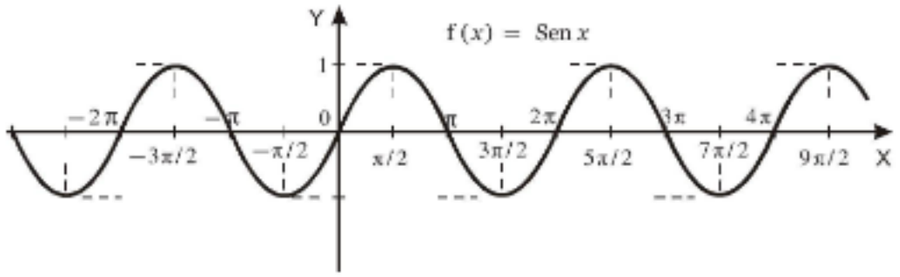
6.12 FUNCIÓN SENO

$$f(x) = \text{Sen}(x)$$

donde la variable $x \in \langle -\infty, \infty \rangle$ se considera medida en radianes.

$\text{Dom}(\text{Sen}) = \langle -\infty, \infty \rangle$,

$\text{Rang}(\text{Sen}) = [-1, 1]$, pues $-1 \leq \text{Sen}(x) \leq 1$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$.



6.13 EJERCICIO .- Grafique la función: $f(x) = |x - 2| + 1$, $x \in [-1, 6\rangle$.

SOLUCIÓN .- Por propiedad del valor absoluto:

- Si $x \in [-1, 2\rangle$, $-1 \leq x < 2 \Rightarrow x - 2 < 0$
  $\Rightarrow |x - 2| = 2 - x \Rightarrow |x - 2| + 1 = 3 - x$
- Si $x \in [2, 6]$, $2 \leq x \leq 6 \Rightarrow x - 2 \geq 0$
  $\Rightarrow |x - 2| = x - 2 \Rightarrow |x - 2| + 1 = x - 1$

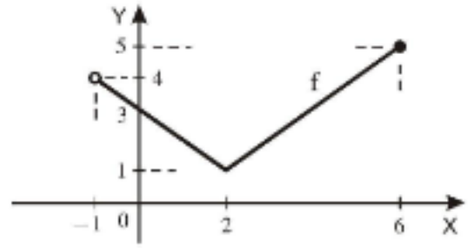
Por lo tanto,

$$y = f(x) = \begin{cases} |x-2| + 1 = 3 - x, & \text{si } x \in [-1, 2\rangle \\ |x-2| + 1 = x - 1, & \text{si } x \in [2, 6] \end{cases}$$

De la gráfica vemos que

$\text{Rang}(f) = [1, 5]$

$= \langle 1, 4] \cup [1, 5]$



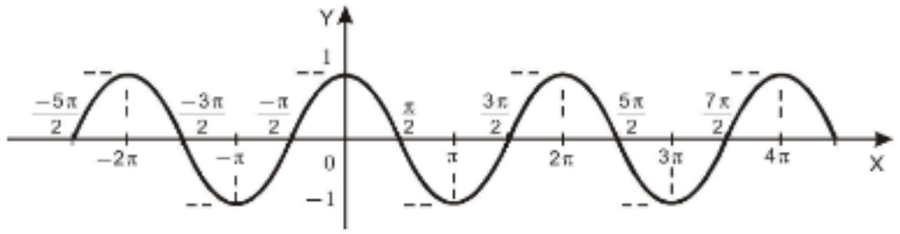
6.14 FUNCIÓN COSENO

$$f(x) = \text{Cos}(x)$$

donde la variable $x \in \langle -\infty, \infty \rangle$ se considera medida en radianes.

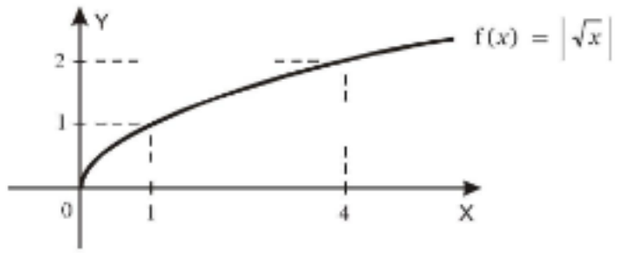
$\text{Dom}(\cos) = \langle -\infty, \infty \rangle$,

$\text{Rang}(\cos) = [-1, 1]$, pues $-1 \leq \text{Cos}(x) \leq 1$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$



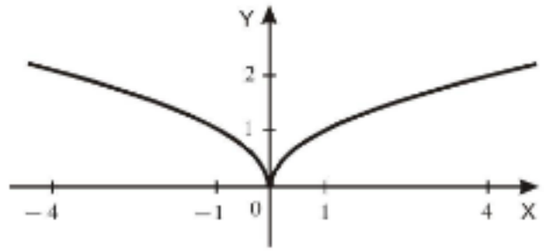
6.15 PROBLEMA .- Grafique la función $f(x) = \left|\sqrt{x}\right|$.

SOLUCIÓN .- Como $\sqrt{x} \geq 0$, $\forall\, x \in [0, \infty\rangle \Leftrightarrow \left|\sqrt{x}\right| = \sqrt{x}$ entonces la gráfica de $f(x) = \left|\sqrt{x}\right|$ es la misma que la de $y = \sqrt{x}$.



6.16 PROBLEMA .- Grafique la función $f(x) = \sqrt{|x|}$.

SOLUCIÓN .- $\text{Dom}(f) = \langle -\infty , \infty \rangle$; observamos que $y = f(x) = \sqrt{|x|}$ es simétrica con respecto al Eje Y , pues la ecuación no varía al reemplazar x por $-x$; y como $|x| = x$ para $x \geq 0$, entonces $f(x) = \sqrt{x}$ para $x \in [0 , \infty \rangle$ y la completamos por la simetría en $\langle -\infty , 0]$.



$\text{Rang}(f) = [0 , \infty \rangle$.

6.17 PROBLEMA .- Halle el dominio, el rango y la gráfica de $f(x) = [\![\sqrt{x}]\!]$.

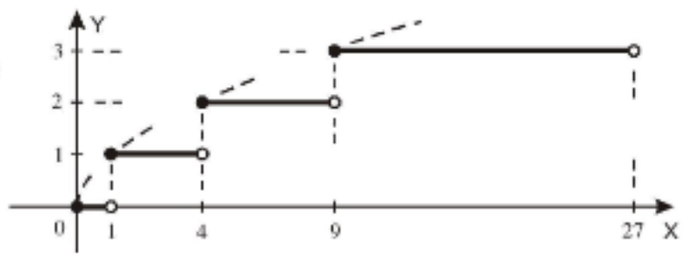
SOLUCIÓN .-

$$[\![\sqrt{x}]\!] = n \quad \Leftrightarrow \quad x \geq 0 \ \wedge \ n \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\} \ \wedge \ (n \leq \sqrt{x} < n+1)$$
$$\Leftrightarrow \quad n^2 \leq x < (n+1)^2 \ , \quad n \geq 0 \ , \quad n \in \mathbb{Z} \qquad (*)$$

$$f(x) = [\![\sqrt{x}]\!] = \begin{cases} 0 \ , & x \in [0 , 1\rangle & n = 0 \ \text{en} \ (*) \\ 1 \ , & x \in [1 , 4\rangle & n = 1 \ \text{en} \ (*) \\ 2 \ , & x \in [4 , 9\rangle & n = 2 \ \text{en} \ (*) \\ \ldots & & \end{cases}$$

$\text{Dom } f = [0 , \infty \rangle$

$R_f = \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$



6.18 PROBLEMA .- Grafique la función $f(x) = [\![2x]\!]$.

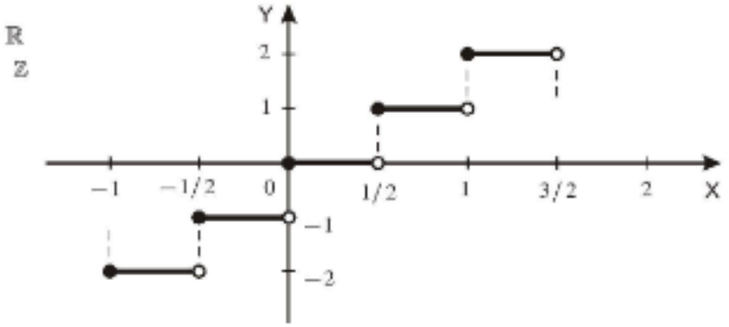
SOLUCIÓN .- $[\![2x]\!] = n \quad \Leftrightarrow \quad n \leq 2x < (n+1)$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{n}{2} \leq x < \frac{n+1}{2} \ , \quad n \in \mathbb{Z} \ .$$

$$f(x) = \begin{cases} -2 \ , & -1 \leq x < -1/2 & (n = -2) \\ -1 \ , & -1/2 \leq x < 0 & (n = -1) \\ 0 \ , & 0 \leq x < 1/2 & (n = 0) \\ 1 \ , & 1/2 \leq x < 1 & (n = 1) \\ 2 \ , & 1 \leq x < 3/2 & (n = 2) \\ \bullet \bullet \bullet & & \end{cases}$$

$\text{Dom } f = \mathbb{R}$

$\text{Rang } f = \mathbb{Z}$



6.19 PROBLEMA .- Halle el dominio, el rango y la gráfica de

$$f(x) = |x| - [\![x]\!]$$

SOLUCIÓN .- $\text{Dom } f = \mathbb{R}$,

a) $\forall \ x \in U_1 = \langle -\infty , 0 \rangle \ , \ x < 0 \ , \ |x| = -x$;

$$f(x) = |x| - [\![x]\!] = -x - [\![x]\!]$$
$$\Rightarrow \quad f(x) = -x - n \quad \Leftrightarrow \quad x \in [n , n+1\rangle \ , \quad n \in \mathbb{Z}^-$$

b) $\forall \ x \in U_2 = [0 , \infty \rangle \ , \ x \geq 0 \ , \ |x| = x$;

$\Rightarrow \quad f(x) = x - [\![x]\!]$. Entonces se tiene

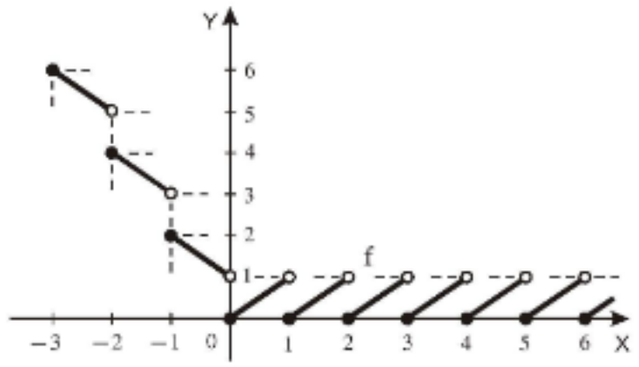
$$f(x) = x - n \ , \quad \forall \ x \in [n , n+1\rangle \ , \ n \geq 0 \ , \ n \in \mathbb{Z}$$

$$f(x) = \begin{cases} -x + 3 \ , & x \in [-3 , -2\rangle & \Leftrightarrow & f(x) \in \langle 5 , 6] \ , \ n = -3 \\ -x + 2 \ , & x \in [-2 , -1\rangle & \Leftrightarrow & f(x) \in \langle 3 , 4] \ , \ n = -2 \\ -x + 1 \ , & x \in [-1 , 0\rangle & \Leftrightarrow & f(x) \in \langle 1 , 2] \ , \ n = -1 \\ x \ , & x \in [0 , 1\rangle & \Leftrightarrow & f(x) \in [0 , 1\rangle \ , \ n = 0 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} x-1\ , & x \in [1,2\rangle \quad \Leftrightarrow \quad f(x) \in [0,1\rangle\ ,\ n=1 \\ x-2\ , & x \in [2,3\rangle \quad \Leftrightarrow \quad f(x) \in [0,1\rangle\ ,\ n=2 \\ \cdots \end{cases}$$

$$\text{Rang}(f) = [0,1\rangle \cup \langle 1,2] \cup \langle 3,4] \cup \langle 5,6] \cup \ldots$$

$$= [0,1\rangle \cup \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \langle 2n-1, 2n] \right)$$

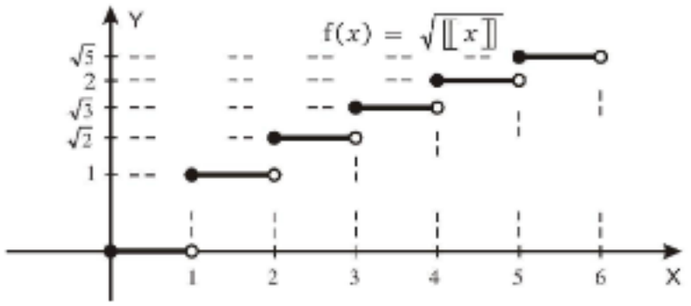


6.20 PROBLEMA .- Halle el rango y la gráfica de: $f(x) = \sqrt{[\![x]\!]}$.

SOLUCIÓN .- $[\![x]\!] = n \quad \Leftrightarrow \quad x \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \in [0,\infty\rangle = \text{Dom}\, f$,

$f(x) = \sqrt{[\![x]\!]} = \sqrt{n}$, si $x \in [n, n+1\rangle$, $\forall\ n \in \{0,1,2,\ldots\}$.

$$f(x) = \begin{cases} 0\ , & x \in [0,1\rangle \\ 1\ , & x \in [1,2\rangle \\ \sqrt{2}\ , & x \in [2,3\rangle \end{cases} \quad , \quad f(x) = \begin{cases} \sqrt{3}\ , & x \in [3,4\rangle \\ \sqrt{4} = 2\ , & x \in [4,5\rangle \\ \sqrt{5}\ , & x \in [5,6\rangle \end{cases}$$



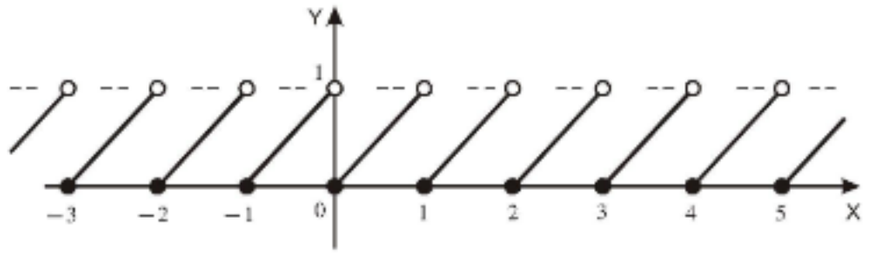
6.21 EJERCICIO .- Halle el rango y la gráfica de la función:

$$f(x) = x - [\![x]\!] \ .$$

SOLUCIÓN .- Como $[\![x]\!] = n$, $\forall\ x \in [n, n+1\rangle$, $n \in \mathbb{Z}$,

$y = f(x) = x - n$, si $x \in [n, n+1\rangle$, $n \in \mathbb{Z}$.

$$f(x) = \begin{cases} x+2\ , & \text{si} \quad x \in [-2,-1\rangle & (n=-2) \\ x+1\ , & \text{si} \quad x \in [-1,0\rangle & (n=-1) \\ x\ , & \text{si} \quad x \in [0,1\rangle & (n=0) \\ x-1\ , & \text{si} \quad x \in [1,2\rangle & (n=1) \\ x-2\ , & \text{si} \quad x \in [2,3\rangle & (n=2) \\ \cdots \end{cases}$$



6.22 EJERCICIO .- Halle el dominio, el rango y la gráfica de:

$$f(x) = \sqrt{x - [\![x]\!]}$$

SOLUCIÓN .- De una propiedad del MÁXIMO ENTERO sabemos que:

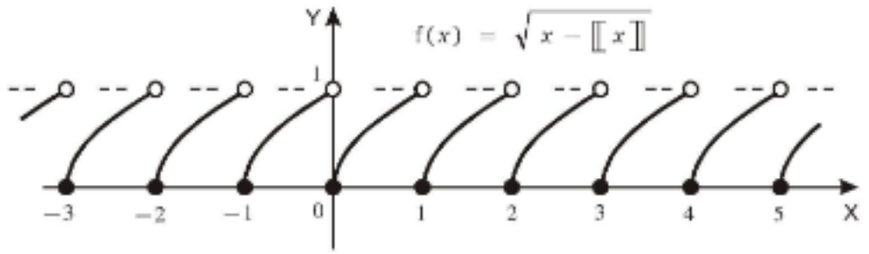
$$[\![x]\!] \leq x < [\![x]\!] + 1 \quad \Leftrightarrow \quad 0 \leq x - [\![x]\!] < 1\ ,\ \forall\ x \in \mathbb{R}$$

De éste y el Ejercicio [6.21], tenemos que

$y = f(x) = \sqrt{x - [\![x]\!]}$ tiene como $\text{Dom}\, f = \mathbb{R}$

$y = f(x) = \sqrt{x-n}$, $\forall\ x \in [n, n+1\rangle$, $n \in \mathbb{Z}$ $\Rightarrow$

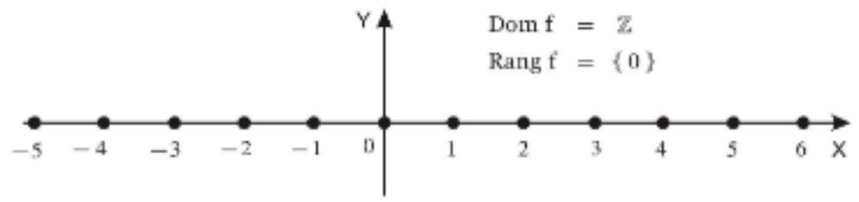
$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x+1}\ , & \text{si} \quad x \in [-1,0\rangle & (n=-1) \\ \sqrt{x}\ , & \text{si} \quad x \in [0,1\rangle & (n=0) \\ \sqrt{x-1}\ , & \text{si} \quad x \in [1,2\rangle & (n=1) \\ \sqrt{x-2}\ , & \text{si} \quad x \in [2,3\rangle & (n=2) \\ \cdots & & \cdots \end{cases}$$



6.23 EJERCICIO .- Halle el dominio, el rango y la gráfica de:

$$f(x) = \sqrt{[\![x]\!] - x}$$

SOLUCIÓN .- Debe ser: $[\![x]\!] - x \geq 0 \Leftrightarrow x - [\![x]\!] \leq 0$, y como $x - [\![x]\!] \geq 0$ entonces $0 \leq x - [\![x]\!] \leq 0 \Leftrightarrow x - [\![x]\!] = 0 \Leftrightarrow [\![x]\!] = x \Leftrightarrow x = n \in \mathbb{Z}$. Por lo tanto, $\text{Dom } f = \mathbb{Z}$, y en tal caso: $f(x) = \sqrt{0} = 0$, $\forall\, x \in \mathbb{Z}$. (Ver el EJERCICIO [6.30]).



6.24 EJERCICIO .- Halle el rango y la gráfica de la función:

$$f(x) = \left[\!\!\left[2/(x^2+1) \right]\!\!\right] , \quad x \in \mathbb{R}$$

SOLUCIÓN .- Como $x^2 + 1 \geq 1 > 0$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$, entonces

$$(*) \qquad 0 < \frac{2}{x^2+1} \leq 2 \quad .$$

Así, el Máximo Entero de esta expresión toma los valores: 0 , 1 y 2 , y solamente estos valores. Luego,

a) $f(x) = [\![\cdot]\!] = 0 \Leftrightarrow 0 < 2/(x^2+1) < 1 \Leftrightarrow x^2 + 1 > 2$
$\Leftrightarrow x^2 > 1 \Leftrightarrow x \in \langle -\infty, -1 \rangle \cup \langle 1, \infty \rangle$

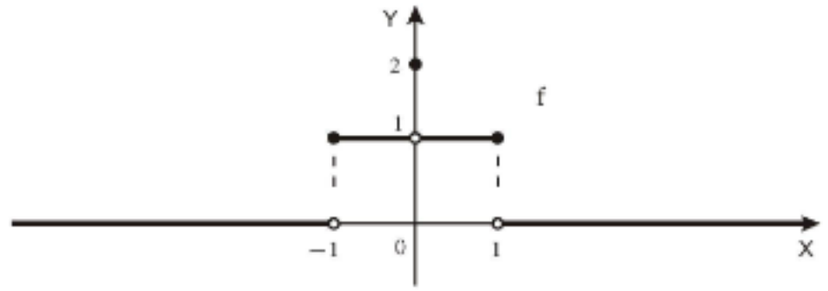
b) $f(x) = [\![\cdot]\!] = 1 \Leftrightarrow 1 \leq 2/(x^2+1) < 2 \Leftrightarrow$
$1 < x^2 + 1 \leq 2 \Leftrightarrow 0 < x^2 \leq 1$
$\Leftrightarrow x \in [-1, 0) \cup \langle 0, 1]$

c) $f(x) = [\![\cdot]\!] = 2 \Leftrightarrow 2 \leq 2/(x^2+1) < 3$, y por (*) :

$\Leftrightarrow 2 \leq 2/(x^2+1) \leq 2 \Leftrightarrow x = 0$

De (a) , (b) y (c): $\text{Rang } f = \{0, 1, 2\}$. Además,

$$f(x) = \begin{cases} 0 , & \text{si} \quad x \in \langle -\infty, -1 \rangle \cup \langle 1, \infty \rangle \\ 1 , & \text{si} \quad x \in [-1, 0) \cup \langle 0, 1] \\ 2 , & \text{si} \quad x = 0 \ . \end{cases}$$



6.25 EJERCICIO. Halle el dominio y el rango de la función

$$f(x) = 1/(x - [\![x]\!]) \quad .$$

SOLUCIÓN.- $\text{Dom } f = \mathbb{R} - \mathbb{Z}$. Además, $\forall\, x \in \mathbb{R} - \mathbb{Z}$ se tiene: $[\![x]\!] \neq x$, y por lo tanto: $0 < x - [\![x]\!] < 1$, de donde $g(x) = 1/(x - [\![x]\!]) > 1$. Luego, $\text{Rang}(g) = \langle 1, \infty \rangle$.

6.26 EJERCICIO .- Halle el rango de la función:

$$f(x) = \sqrt{3[\![2x+5]\!] - 6[\![x]\!]} \quad .$$

SOLUCIÓN .- Del Ejercicio [6.18], Cap. 8 : $[\![2x]\!] - 2[\![x]\!]$ solamente toma los dos valores: 0 ó 1 . De esta relación y de las propiedades del MÁXIMO ENTERO:

$$f(x) = \sqrt{3([\![2x]\!] + 5) - 6[\![x]\!]} = \sqrt{3([\![2x]\!] - 2[\![x]\!]) + 15}$$

resulta que $f(x)$ toma solamente los dos valores siguientes:

$$f(x) = \sqrt{3(0) + 15} = \sqrt{15} \quad \text{y} \quad f(x) = \sqrt{3(1) + 15} = \sqrt{18} \ .$$

Por lo tanto, $\text{Rang}(f) = \{ \sqrt{15} , \sqrt{18} \}$.

6.27 EJERCICIO .- Halle el rango y la gráfica de la función:

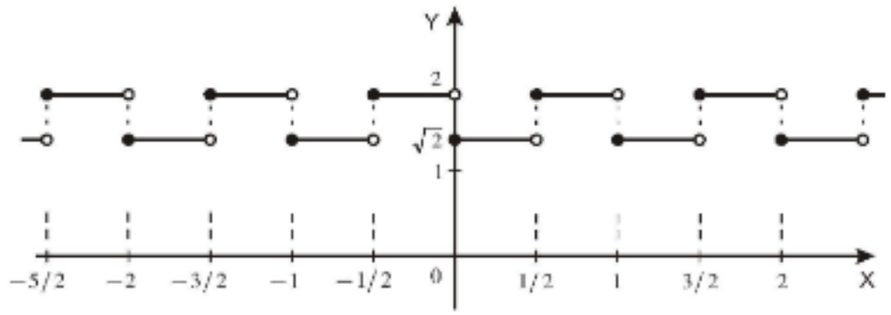
$$f(x) = \sqrt{2\left[\!\left[2x+1\right]\!\right] - 4\left[\!\left[x\right]\!\right]}$$

SOLUCIÓN .- Del Ejercicio [6.18], Cap. [6]: $\forall\ n \in \mathbb{Z}$,

$$\left[\!\left[2x\right]\!\right] - 2\left[\!\left[x\right]\!\right] = \begin{cases} 0 \ , & \text{si} \quad x \in [\,n\,,\,n+(1/2)\,\rangle \\ 1 \ , & \text{si} \quad x \in [\,n+(1/2)\,,\,n+1\,\rangle \ , \end{cases} \quad \text{y}$$

como $2\left[\!\left[2x+1\right]\!\right] - 4\left[\!\left[x\right]\!\right] = 2\left(\left[\!\left[2x\right]\!\right] - 2\left[\!\left[x\right]\!\right]\right) + 2$, entonces

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{2(0)+2} = \sqrt{2} \ , & \text{si} \quad x \in [\,n\,,\,n+(1/2)\,\rangle, \ n \in \mathbb{Z} \\ \sqrt{2(1)+2} = 2 \ , & \text{si} \quad x \in [\,n-(1/2)\,,\,n+1\,\rangle \ \ldots \end{cases}$$



6.28 EJERCICIO .- Halle el dominio y el rango de la función $\Leftrightarrow$

$$f(x) = 1/\left(|x-1| - |x-2|\right)$$

SOLUCIÓN .-

$|x-1| = |x-2| \quad \Leftrightarrow \quad [\,x-1 = x-2 \ \vee \ x-1 = -(x-2)\,]$

$\Leftrightarrow \quad 1 = 2$ (Falso) $\vee \quad 2x = 3 \quad \Leftrightarrow \quad x = 3/2$.

Luego, $\text{Dom}\, f = \{\, x \in \mathbb{R} \ / \ |x-1| \neq |x-2| \,\} = \mathbb{R} - \{3/2\}$

Como tenemos los ***" valores críticos "*** : $x = 1$, $x = 2$, se puede verificar que:

a) Si $x \in \langle -\infty, 1\rangle$: $|x-1| - |x-2| = 1 - x - (2-x) = -1$

$\Leftrightarrow \quad f(x) = 1/(-1) = -1$.

b) Si $x \in [1, 3/2\rangle \cup \langle 3/2, 2\rangle$: $1 \leq x < 3/2 \ \vee \ 3/2 < x < 2$

$\Leftrightarrow \quad |x-1| - |x-2| = x - 1 - (2-x) = (2x-3) \quad \Leftrightarrow$

$2x \in [2,3\rangle \cup \langle 3,4\rangle \quad \Leftrightarrow \quad (2x-3) \in [-1,0\rangle \cup \langle 0,1\rangle \quad \Leftrightarrow$

$1/(2x-3) \in \langle -\infty, -1] \cup \langle 1, \infty\rangle \quad \Leftrightarrow \quad f(x) \in \langle -\infty, -1] \cup \langle 1, \infty\rangle$.

c) Si $x \in [2, \infty\rangle$: $|x-1| - |x-2| = 1 \quad \Leftrightarrow$

$f(x) = 1/[\,|x-1| - |x-2|\,] = 1/(1) = 1$

Del $\text{Dom}\, f = \langle -\infty, 1\rangle \cup [1, 3/2\rangle \cup \langle 3/2, 2\rangle \cup [2, \infty\rangle$, y de (a), (b) y (c) obtenemos: $\text{Rang}\,(f) = \{-1\} \cup \langle -\infty, -1] \cup \langle 1, \infty\rangle \cup \{1\}$

$= \langle -\infty, -1] \cup [1, \infty\rangle$.

6.29 EJERCICIO. Sea $f(x) = x^2\left[\!\left[x/2\right]\!\right] - 4x\left[\!\left[x/3\right]\!\right]$, $x \in \text{Dom}\, f = \langle 3, 6]$. Halle el rango de f .

SOLUCIÓN. Dividimos $\langle 3, 6]$ en subintervalos adecuadamente en razón de los dos máximos enteros involucrados:

$\left[\!\left[x/2\right]\!\right] = n \quad \Leftrightarrow \quad n \leq x/2 < n+1 \quad \Leftrightarrow \quad 2n \leq x < 2n+2 \quad \ldots(\alpha)$

$\left[\!\left[x/3\right]\!\right] = m \quad \Leftrightarrow \quad 3m \leq x < 3m+3$, con $m, n \in \mathbb{Z} \quad \ldots(\beta)$

Como en (α) los subintervalos tienen dos unidades de longitud, y en (β) tienen tres unidades de longitud, los intersectaremos de modo que sigan cubriendo a $\langle 3, 6]$, dentro del $\text{Dom}\, f = \langle 3, 6]$:

$\left([2,4\rangle \cup [4,6\rangle \cup \{6\}\right) \cap \left([0,3\rangle \cup [3,6\rangle \cup \{6\}\right) \cap \text{Dom}\, f =$

$= \left([2,3\rangle \cup [3,4\rangle \cup [4,6\rangle \cup \{6\}\right) \cap \langle 3,6]$

$= \langle 3,4\rangle \cup [4,6\rangle \cup \{6\}$:

a) $\forall\ x \in \langle 3,4\rangle$: $x/2 \in \langle 3/2, 2\rangle$, $x/3 \in \langle 1, 4/3\rangle \quad \Leftrightarrow$

$f(x) = (x^2)(1) - (4x)(1) = x^2 - 4x = (x-2)^2 - 4 \in \langle -3, 0\rangle$ ¿?

b) $\forall\ x \in [4,6\rangle$: $x/2 \in \langle 2,3\rangle$, $x/3 \in \langle 4/3, 2\rangle \quad \Leftrightarrow$

$f(x) = (x^2)(2) - (4x)(1) = 2x^2 - 4x = 2(x-1)^2 - 2 \in [16,48\rangle$ ¿?

c) Para $x = 6$: $f(x) = f(6) = (36)(3) - (24)(2) = 60$

Por lo tanto, de (a), (b) y (c) : $\text{Rang}\, f = \langle -3, 0\rangle \cup [16, 48\rangle \cup \{60\}$.

6.30 EJERCICIO .- Halle el dominio, el rango y la gráfica de

$$f(x) = x\sqrt{\left[\!\left[x\right]\!\right] - x}$$

SOLUCIÓN .- Vimos en el Ejercicio [6.23] que $\text{Dom}\, f = \mathbb{Z}$, y por lo tanto, $\left[\!\left[x\right]\!\right] = x$ pues $x \in \mathbb{Z}$, es decir, $\left[\!\left[x\right]\!\right] - x = 0$,

Así, $f(x) = x\sqrt{0} \equiv 0$, $\forall\ x \in \mathbb{Z}$.

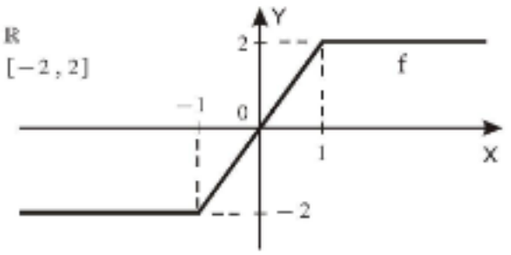
Luego, la gráfica, el dominio y el rango coinciden con los del Ejercicio [6.23] .

6.31 EJERCICIO .- Grafique la función $f(x) = |x+1| - |x-1|$.

SOLUCIÓN .- Valores críticos : -1 y 1 . Luego,

$$f(x) = \begin{cases} (-x-1) - (1-x) = -2 \ , & \text{si} \quad x < -1 \\ x+1-(1-x) = 2x \ , & \text{si} \quad -1 \leq x < 1 \\ x+1-(x-1) = 2 \ , & \text{si} \quad x \geq 1 \end{cases}$$

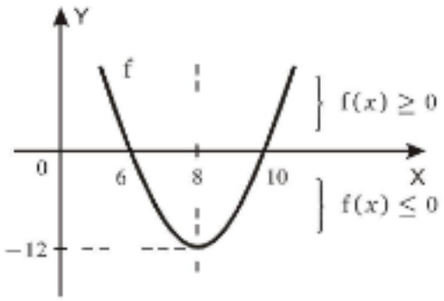
Dom f = ℝ
Rang f = [−2 , 2]



6.32 EJERCICIO .- Halle una función cuadrática f tal que $f(8) = -12$, y que

$$f(x) \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad [\ x \leq 6 \ \vee \ x \geq 10\ ]$$

SOLUCIÓN .- La gráfica de tal función f está bosquejada al lado, donde



$f(x) = a(x-6)(x-10)$

Además, como $f(8) = -12$, y
$f(8) = a(8-6)(8-10) = -4a$

$\Rightarrow \quad -12 = -4a \quad \Rightarrow \quad a = 3.$

Por lo tanto,

$$f(x) = 3(x-6)(x-10) = 3x^2 - 48x + 180 .$$

6.33 EJERCICIO .- Halle el valor absoluto de la diferencia entre las raíces de $P(x) = c + bx - x^2$, si el mayor valor de $P(x)$ es 9 .

SOLUCIÓN .- Las raíces x_1 y x_2 provienen de cada signo en:

$$x = \left(-b \pm \sqrt{b^2 + 4c}\ \right) / \left[2(-1) \right]$$

$$\Rightarrow \qquad \left| x_1 - x_2 \right| = 2\left(\sqrt{b^2 + 4c}\ \right) / 2 = \sqrt{b^2 + 4c} \quad \ldots \ (*)$$

Además, $P(x) = -\left(x^2 - bx + \frac{b^2}{4}\right) + \left(\frac{b^2}{4} + c\right) = -\left(x - \frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{b^2 + 4c}{4}\right)$

$\Rightarrow$ el máximo valor de $P(x)$ ocurre cuando $x = b/2$, y es igual a

$$9 = P\left(\frac{b}{2}\right) = (b^2 + 4c)/4 .$$

Al reemplazar en $(*)$ resulta que $\left| x_1 - x_2 \right| = \sqrt{(4)(9)} = 6$.

6.34 EJERCICIO .- Si $f(x) = 5x - x^2$, pruebe que ***existe*** $z \in \mathbb{R}$ tal que:

$$f(x) \leq f(z) , \quad \forall\ x \in \mathbb{R} .$$

SOLUCIÓN .- En realidad se está pidiendo el valor z para el cual la función f toma su máximo valor; y esto siempre ocurre en el punto medio entre las raíces, por ser f una función cuadrática. Así,

$$f(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 5x - x^2 = x(5-x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_1 = 0 \ , \ x_2 = 5$$

$$\therefore \quad z = \frac{1}{2}(x_1 + x_2) = \frac{1}{2}(0 + 5) = 5/2 .$$

6.35 EJERCICIO .- Dada $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + bx + 1$, y $c \in \mathbb{R}$. Si

$$f(x) \geq \frac{1}{2}c^2 + bc + 1 , \ \forall\ x \in \mathbb{R} , \text{ halle } c .$$

SOLUCIÓN .- De $f(x)$, y de la desigualdad dada, reconocemos el segundo miembro como el valor $f(c)$.

Como debe cumplirse que $f(x) \geq f(c)$, $\forall\ x \in \mathbb{R}$, debemos hallar el valor real de c para el cual $f(c)$ es el mínimo valor de $f(x)$. Y sabemos que esto ocurre en $x = -b/(2a)$, siendo $a = 1/2$, es decir, en $x = -b$. Luego $c = -b$.

6.36 EJERCICIO .- Halle una función cuadrática f tal que $f(1) = -3$, $f(0) = 4$, $f(-1) = 7$.

SOLUCIÓN .- $f(x) = ax^2 + bx + c$. De los datos:

$$4 = f(0) = c ; \quad -7 = f(-1) = a - b + c = a - b + 4$$
$$-3 = f(1) = a + b + c = a + b + 4$$

Resolviendo este sistema de ecuaciones: $a = -9$, $b = 2$.

Por lo tanto, $f(x) = -9x^2 + 2x + 4$.

6.37 EJERCICIO .- Halle los puntos $(x_o , 0)$, $(0 , y_o)$ donde la recta tangente a la curva $f(x) = 2x^2 + 3x - 1$, en el punto P de abscisa 1 corta a los Ejes X e Y , respectivamente.

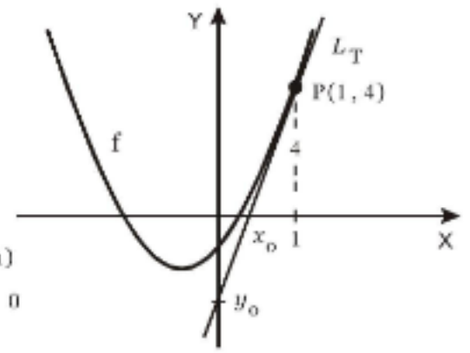
SOLUCIÓN .- $L_T : \ y = mx + b$

$f(1) = 4 \ \Rightarrow \ P = (1 , 4) \in L_T$

$\Rightarrow \quad 4 = (m)(1) + b =$

$\Rightarrow \quad b = 4 - m$

$L_T : \ y = mx + (4 - m)$



Intersectando f con L_T :

$y = 2x^2 + 3x - 1 = mx + (4 - m)$

$\Rightarrow \quad 2x^2 + (3 - m)x + (m - 5) = 0$

Y como esta intersección debe tener una única solución [correspondiente al ***único punto de tangencia***], entonces

$$\Delta = 0 \Leftrightarrow (3-m)^2 - 4(2)(m-5) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad m^2 - 6m + 9 - 8m + 40 = m^2 - 14m + 49 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad (m-7)^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad m = 7\ , \quad b = 4 - m = -3$$

Luego, $L_T:\ y = 7x - 3$. Intersectando con los Ejes:

a) Eje X, hacemos $y = 0 \Rightarrow x = 3/7 \Rightarrow (x_0, 0) = (3/7, 0)$

b) Eje Y, hacemos $x = 0 \Rightarrow y = -3 \Rightarrow (0, y_0) = (0, -3)$.

6.38 EJERCICIO .- Halle los puntos de la curva $f(x) = x^2 + 2x + 25$ en los que las rectas tangentes pasan por el origen.

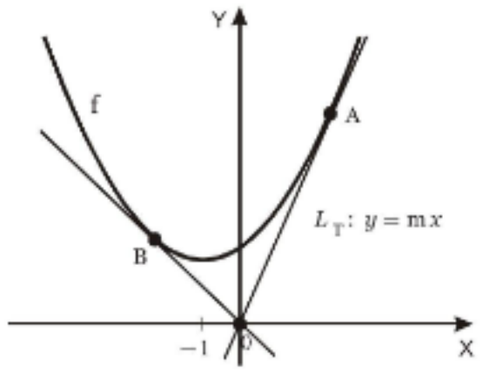
SOLUCIÓN .- $L_T:\ y = mx$,

Intersectando con

$y = f(x) = x^2 + 2x + 25$:

$y = x^2 + 2x + 25 = mx$

$\Leftrightarrow \quad x^2 + (2-m)x + 25 = 0$



Por la condición de tangencia, esta ecuación debe tener una única solución, la cual se presenta cuando

DISCRIMINANTE = CERO:

$\Delta = (2-m)^2 - 4(25) = 0$

$\Leftrightarrow \quad m - 2 = \pm 10$

Dos soluciones $m_1 = 12$, $m_2 = -8 \Rightarrow L_T:\ y = 12x$, $L_T':\ y = -8x$

Para $m_1 = 12$: $x^2 + (2-m)x + 25 = (x-5)^2 = 0$

$\Rightarrow \quad x = 5\ , \quad y = 60$

Para $m_2 = -8$: $x^2 + (2-m)x + 25 = (x+5)^2 = 0$

$\Rightarrow \quad x = -5\ , \quad y = 40$

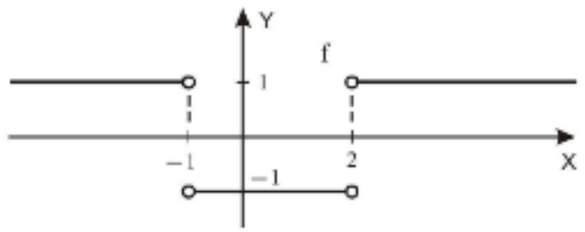
Así, los puntos de tangencia de $f(x)$ con las rectas L_T y L_T' son $A = (5, 60)$ y $B = (-5, 40)$, respectivamente.

6.39 EJERCICIO .- Halle la gráfica y el rango de $f(x) = \dfrac{|x^2 - x - 2|}{x^2 - x - 2}$.

SOLUCIÓN .- $x^2 - x - 2 = (x+1)(x-2)$; $\text{Dom}\, f = \mathbb{R} - \{-1, 2\}$

Como $f(x) = \dfrac{|x+1| \cdot |x-2|}{(x+1)\cdot(x-2)}$, entonces

$$f(x) = \begin{cases} 1\ , & \text{si} \quad x \in \langle -\infty, -1\rangle \cup \langle 2, \infty\rangle \\ -1\ , & \text{si} \quad x \in \langle -1, 2\rangle \end{cases}$$



$\text{Rang}\,(f) = \{-1, 1\}$

6.40 EJERCICIO .- Halle el rango y la gráfica de

$$y = f(x) = \sqrt{|x+3|\,|x-1|}$$

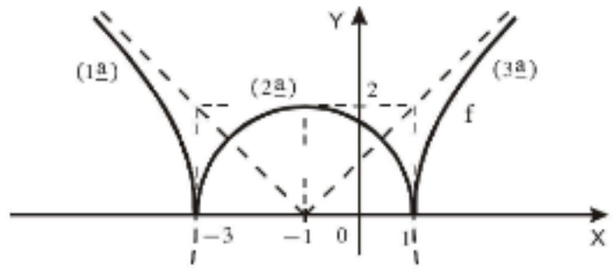
SOLUCIÓN .- Como $|(x+3)(x-1)| = |x^2 + 2x - 3| = |(x+1)^2 - 4|$, haciendo $\text{Dom}\, f = \langle -\infty, -3\rangle \cup [-3, 1\rangle \cup [1, \infty\rangle$:

$$y = f(x) = \begin{cases} \sqrt{(x+1)^2 - 4} & , \quad \text{si} \quad x < -3 \\ \sqrt{-(x+1)^2 + 4} & , \quad \text{si} \quad -3 \le x < 1 \\ \sqrt{(x+1)^2 - 4} & , \quad \text{si} \quad x \ge 1 \end{cases}$$

La $1^{\underline{a}}$ y $3^{\underline{a}}$ reglas de correspondencia están representadas geométricamente por una parte (distinta para cada regla) de la hipérbola: $(x+1)^2/4 - y^2/4 = 1$, $y \ge 0$; mientras que la $2^{\underline{a}}$ regla está representada por la semicircunferencia de ecuación:

$(x+1)^2 + y^2 = 4$, en la región $y \ge 0$ (semiplano superior).

$\text{Rang}\,(f) = [0, \infty\rangle$



6.41 EJERCICIO .- Halle el rango y la gráfica de $f(x) = \sqrt{\left[\!\left[\,|\operatorname{Cos} x|\,\right]\!\right] - 1}$.

SOLUCIÓN .- Como $0 \le |\operatorname{Cos} x| \le 1 \Rightarrow 0 \le \left[\!\left[\,|\operatorname{Cos} x|\,\right]\!\right] \le 1$

$$\text{Dom f}: \left[\!\left[\,|\operatorname{Cos} x|\,\right]\!\right] \ge 1 \wedge 0 \le \left[\!\left[\,|\operatorname{Cos} x|\,\right]\!\right] \le 1$$

$$\Leftrightarrow \left[\!\left[\,|\operatorname{Cos} x|\,\right]\!\right] = 1 \Leftrightarrow 1 \le |\operatorname{Cos} x| < 2$$

$$\Leftrightarrow |\operatorname{Cos} x| = 1 \Leftrightarrow \operatorname{Cos} x = \pm 1 \Leftrightarrow x = n\pi,\ n \in \mathbb{Z}$$

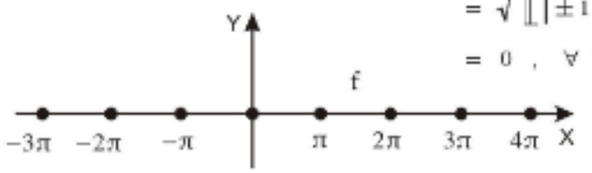
$$\Rightarrow \text{Dom f} = \{x = n\pi / n \in \mathbb{Z}\}\ .\ \text{Además}$$

$$\forall\, x = n\pi \in \text{Dom f},\ f(n\pi) = \sqrt{\left[\!\left[\,|\operatorname{Cos} n\pi|\,\right]\!\right] - 1}$$

$$= \sqrt{\left[\!\left[\,|\pm 1|\,\right]\!\right] - 1} = \sqrt{1-1}$$

$$= 0\ ,\ \forall\, n \in \mathbb{Z}$$

$$R_f = \{0\}$$



6.42 EJERCICIO .- Halle el rango y la gráfica de las funciones:

a) $f(x) = \operatorname{Sgn}(x^2 - 4)$, b) $g(x) = u(x^2 - 4)$.

SOLUCIÓN .-

a) $x^2 - 4 > 0 \Leftrightarrow x^2 > 4 \Leftrightarrow x \in \langle -\infty, -2\rangle \cup \langle 2, \infty\rangle$

$x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow x \in \{-2, 2\}$

$x^2 - 4 < 0 \Leftrightarrow x^2 < 4 \Leftrightarrow x \in \langle -2, 2\rangle$. Luego,

$$f(x) = \operatorname{Sgn}(x^2 - 4) = \begin{cases} 1\ , & \text{si} \quad x \in \langle -\infty, -2\rangle \cup \langle 2, \infty\rangle & (\alpha) \\ 0\ , & \text{si} \quad x \in \{-2, 2\} & (\beta) \\ -1\ , & \text{si} \quad x \in \langle -2, 2\rangle & (\delta) \end{cases}$$

De la definición de la función SIGNO, si su argumento $(x^2 - 4)$ es POSITIVO, entonces $f(x)$ es 1, si su argumento es CERO, entonces $f(x) = 0$, y si su argumento es NEGATIVO, entonces $f(x)$ es igual a -1, como en (α), (β) y (δ), respectivamente.

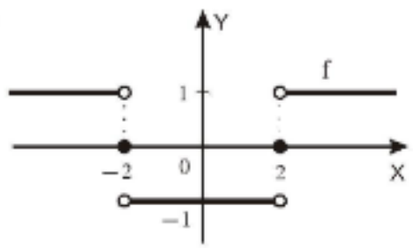
b) $x^2 - 4 \ge 0 \Leftrightarrow x \in \langle -\infty, -2] \cup [2, \infty\rangle$

$x^2 - 4 < 0 \Leftrightarrow x \in \langle -2, 2\rangle$.

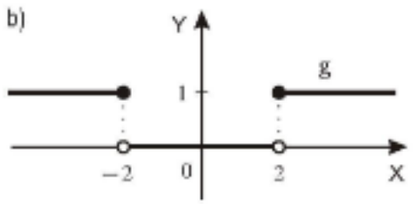
Luego, por la definición de la FUNCIÓN ESCALÓN UNITARIO:

$$g(x) = u(x^2 - 4) = \begin{cases} 1\ , & \text{si} \quad x \in \langle -\infty, -2] \cup [2, \infty\rangle \\ 0\ , & \text{si} \quad x \in \langle -2, 2\rangle \end{cases}$$

a)



b)



6.43 EJERCICIO .- Halle la gráfica de la función f definida por:

$$f(x) = -3\operatorname{Sgn}(x^3 - 4x + |x^2 - 4|)\ .$$

SOLUCIÓN .- $x^2 - 4 > 0 \Leftrightarrow x \in \langle -\infty, -2\rangle \cup \langle 2, \infty\rangle = U_1$

$x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow x \in \{-2, 2\} = U_2$

$x^2 - 4 < 0 \Leftrightarrow x \in \langle -2, 2\rangle = U_3$

Sea $A = (x^3 - 4x + |x^2 - 4|)$, entonces :

(a) $\forall\, x \in U_1 = \langle -\infty, -2\rangle \cup \langle 2, \infty\rangle$: $|x^2 - 4| = (x^2 - 4) \Rightarrow$

$$A = (x^2 - 4)(x + 1) \text{ es } \begin{cases} > 0\ , & \text{si} \quad x > -1 \quad \text{y} \quad x \in U_1 \\ = 0\ , & \text{si} \quad x = -1 \quad \text{y} \quad x \in U_1 \text{ (absurdo)} \\ < 0\ , & \text{si} \quad x < -1 \quad \text{y} \quad x \in U_1 \end{cases}$$

(>0)

(b) $\forall\, x \in U_2 = \{-2, 2\}$: $x^2 - 4 = 0 \Rightarrow A = 0$

(c) $\forall\, x \in U_3 = \langle -2, 2\rangle$: $\left|x^2 - 4\right| = -(x^2 - 4) \Rightarrow$

$$A = (x^2 - 4)(x - 1) \begin{cases} > 0\ , & \text{si} \quad x < 1 \quad \text{y} \quad x \in U_3 \\ = 0\ , & \text{si} \quad x = 1 \quad \text{y} \quad x \in U_3 \\ < 0\ , & \text{si} \quad x > 1 \quad \text{y} \quad x \in U_3 \end{cases}$$

(<0)

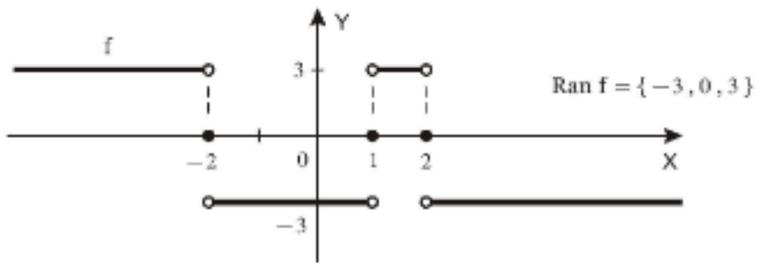
Por lo tanto, de (a), (b) y (c):

$$A \text{ es } \begin{cases} > 0\ , & \text{si} \quad x \in \langle -2, 1\rangle \cup \langle 2, \infty\rangle \\ = 0\ , & \text{si} \quad x \in \{-2, 2, 1\} \\ < 0\ , & \text{si} \quad x \in \langle -\infty, -2\rangle \cup \langle 1, 2\rangle \end{cases}\ , \text{ de lo cual:}$$

$$\operatorname{Sgn}(A) = \begin{cases} 1\ , & \text{si} \quad x \in \langle -2, 1\rangle \cup \langle 2, \infty\rangle \\ 0\ , & \text{si} \quad x \in \{-2, 2, 1\} \\ -1\ , & \text{si} \quad x \in \langle -\infty, -2\rangle \cup \langle 1, 2\rangle \end{cases}$$

donde $A = x^3 - 4x + |x^2 - 4|$. Ahora obtenemos $f(x)$:

$$f(x) = -3\,\mathrm{Sgn}(A) = \begin{cases} (-3)(1) = -3\ , & x \in \langle -2,\ 1\rangle \cup \langle 2,\ \infty\rangle \\ (-3)(0) = 0\ , & x \in \{-2,\ 2,\ 1\} \\ (-3)(-1) = 3\ , & x \in \langle -\infty,\ -2\rangle \cup \langle 1,\ 2\rangle \end{cases}$$



6.44 EJERCICIO .- a) Halle $B = \{\, x \in \mathbb{R} \ /\ \ x\,[\![2x-1]\!] - 2x = 0 \,\}$

b) Halle el dominio de $f(x) = \sqrt[4]{1-[\![x]\!]}\ /\ (x[\![2x-1]\!] - 2x)$.

SOLUCIÓN .- a) $0 = x[\![2x-1]\!] - 2x = x([\![2x]\!] - 1 - 2) \iff$

$0 = x([\![2x]\!] - 3) \iff x = 0 \ \vee\ [\![2x]\!] = 3$

$\iff x = 0 \ \vee\ (3 \le 2x < 4) \iff x \in \{0\} \cup [3/2,\ 2\rangle = \underline{B}$.

b) $1 - [\![x]\!] \ge 0 \iff [\![x]\!] \le 1 \iff x \in \langle -\infty,\ 2\rangle$.

Por lo tanto, el dominio de la función f dada es la intersección del conjunto $\langle -\infty,\ 2\rangle$ con el conjunto de los x tales que el denominador no se haga cero. Es decir,

$$\begin{aligned} \mathrm{Dom}\, f &= \langle -\infty,\ 2\rangle \cap \complement B \qquad \text{(de la parte [a])} \\ &= \langle -\infty,\ 2\rangle \cap (\langle -\infty,\ 0\rangle \cup \langle 0,\ 3/2\rangle \cup [\,2, \infty\rangle) \\ &= \langle -\infty,\ 0\rangle \cup \langle 0,\ 3/2\rangle\ . \end{aligned}$$

6.45 EJERCICIO .- Halle el dominio, el rango y la gráfica de

$$f(x) = \sqrt{|x|^2 - \big||x| + 2\big|}\ .$$

SOLUCIÓN .- $\mathrm{Dom}\, f = \langle -\infty,\ -2\,] \cup [\,2,\ \infty\rangle$, pues

$$f(x) = \sqrt{|x|^2 - (|x| + 2)} = \sqrt{(|x| - 2)(|x| + 1)} \qquad (*)$$

$$= \sqrt{(|x| - \tfrac{1}{2})^2 - \tfrac{9}{4}} \qquad (**)$$

Del extremo derecho en $(*)$, vemos que $R_f = [\,0,\ \infty\rangle$

a) De $(**)$, si $\underline{x \in \langle -\infty,\ 0\rangle} = U_1$:

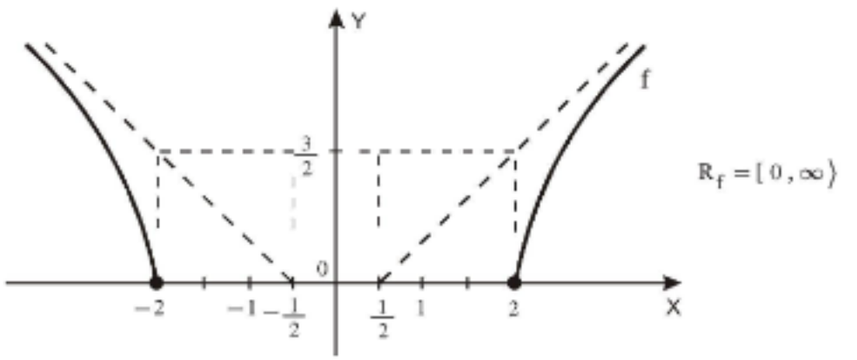
$$y = f(x) = \sqrt{(x + \tfrac{1}{2})^2 - \tfrac{9}{4}} \iff (x + \tfrac{1}{2})^2 - y^2 = \tfrac{9}{4}\ ,\quad y \ge 0\ ,$$

es una parte de la rama izquierca de esta hipérbola equilátera con centro $(-1/2,\ 0)$, en el semiplano superior $y \ge 0$.

b) De $(**)$, si $\underline{x \in [\,0, \infty\rangle} = U_2$:

$$y = f(x) = \sqrt{(x - \tfrac{1}{2})^2 - \tfrac{9}{4}} \iff (x - \tfrac{1}{2})^2 - y^2 = \tfrac{9}{4}\ ,\quad y \ge 0\ ,$$

es una parte de la rama derecha de esta hipérbola equilátera con centro $(1/2,\ 0)$, en el semiplano superior $y \ge 0$.



6.46 EJERCICIO .- Halle la gráfica de la función f definida por:

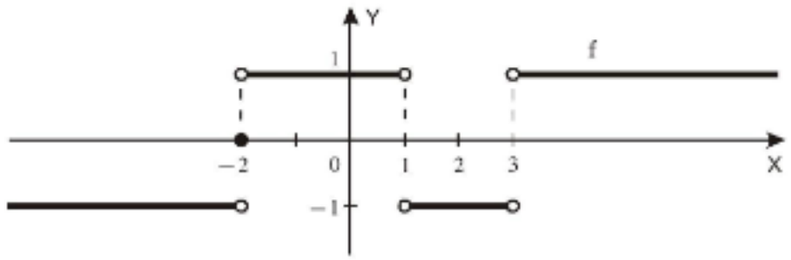
$$f(x) = \mathrm{Sgn}\,[\,\frac{(x+2)(x^2+1)}{(x^2 - 4x + 3)}\,]\ .$$

SOLUCIÓN .- Sea $A = \dfrac{(x+2)(x^2+1)}{x^2 - 4x + 3} = \dfrac{(x+2)(x^2+1)}{(x-3)(x-1)}$, donde el factor (x^2+1) ***es siempre*** > 0, $\forall\, x \in \mathbb{R}$. Entonces ***el signo de*** A ***es igual al signo del factor*** $(x+2)/[\,(x-3)(x-1)\,]$. Y como se verifica que

$$\frac{x+2}{(x-3)(x-1)} \quad \text{es} \quad \begin{cases} > 0\ , & \text{si} \quad x \in \langle -2, 1\rangle \cup \langle 3, \infty\rangle \\ = 0\ , & \text{si} \quad x = -2 \\ < 0\ , & \text{si} \quad x \in \langle -\infty, -2\rangle \cup \langle 1, 3\rangle\ , \end{cases}$$

entonces

$$f(x) = \text{Sgn}(A) = \begin{cases} 1 \ , & \text{si} \quad x \in \langle -2 \, , \, 1 \rangle \cup \langle 3 \, , \, \infty \rangle \\ 0 \ , & \text{si} \quad x = -2 \\ -1 \ , & \text{si} \quad x \in \langle -\infty \, , \, -2 \rangle \cup \langle 1 \, , \, 3 \rangle \end{cases}$$



SERIE DE EJERCICIOS

1. Halle el dominio y el rango de las funciones siguientes:

   $f = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 / \ \ y = -2x^2 + 12x - 2, \ \ |x-2|^2 - 2|x-2| - 3 > 0 \ \}$

   $g = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 / \ y = 2x^2 - 4x - 1 \ , \ \ \frac{3}{x+2} < \frac{6}{x+5} \ \}$

   $h = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 / \ \ y = |x-1| + |x-2| \ , \ \left| x^2 - 5x \right| - 2x > 10 \ \}$

2. Dadas las funciones $f(x) = -x^2 + 3x + 1$, $g(x) = 3x^2 + 2x + 1$, para $x \in \mathbb{R}$. Halle $\text{Rang}(f) \cap \text{Rang}(g)$.

3. Sea $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$ ¿Cuáles son verdaderas? :

   I) Si $a < 0 \ \wedge \ b^2 - 4ac \leq 0 \ \Rightarrow \ \forall \, x \in \mathbb{R}, \ f(x) < 0$.

   II) Si $a > 0 \ \Rightarrow \ \text{Rang}(f) = [(4ac - b^2)/(4a), \ \infty\rangle$

   III) $a > 0, \ f(r) = 0 \ \wedge \ f(s) = 0 \, ; \ x \in [r, s] \ \Rightarrow \ f(x) \leq 0$.

4. Sea $f(x) = k(x-d)^2 + e$, $k \neq 0$, y sea G su gráfica. Probar que:

   a) $e = 0 \ \Leftrightarrow$ G es tangente al EJE X.

   b) $ek > 0 \ \Leftrightarrow \ G \cap (\text{EJE X}) = \varnothing$

   c) $ek < 0 \ \Leftrightarrow \ G \cap (\text{EJE X}) = \{ (r, 0), (s, 0) \}$.

5. Sean $f(x) = (x/2) - 4$, $g(x) = x^2 - 2x - 3$, tales que sus gráficas se cortan en los puntos (x_0, y_0) y (x_1, y_1). Halle la ecuación cuadrática cuyas raíces son $1/x_0$ y $1/x_1$.

6. Halle la gráfica y el rango de $f(x) = [\![x]\!] - x$, $x \in \mathbb{R}$.

7. Sea $f(x) = [\![x]\!] + \sqrt{x - [\![x]\!]}$, $0 \leq x \leq 2$, halle el rango de f.

8. Halle la suma S de las coordenadas del punto P_0 de la gráfica de la función $f(x) = 3x^2 + 2$ en donde la recta tangente es paralela a la recta $y = 2x + 7$.

9. Si $10x^2 - 7x - 12 = (ax + b)(cx + d)$, $\forall \, x \in \mathbb{R}$, pruebe que $a + b + c + d = 8$.

10. Halle el punto sobre la gráfica de $f(x) = 2 + 5x - x^2$ en el que el ángulo de inclinación de la recta tangente es de $45°$, así como la ecuación de esta recta.

11. Halle el dominio de $f(x) = \sqrt{\dfrac{\sqrt{x^2 - 3x - 4}}{\sqrt{21} - \sqrt{x^2 - 4}}}$.

12. Dado $f(x) = [\![x]\!] + \sqrt{[\![x]\!] - x}$, halle $\text{Dom}\, f \cap \text{Rang}\, f$.

13. Sea $f(x) = [\![[\![x]\!]]\!] - x$, ¿Cuáles son verdaderas? :

   a) $\text{Dom}\, f = \mathbb{R}$, b) $\text{Rang}\, f = \langle -1, 0]$

   c) $\nexists \ (p, q) \in f \ / \ p < 0 \ \wedge \ q > 0$

   d) $\nexists \ (p, q) \in f \ / \ p > 0 \ \wedge \ q > 0$

   e) $\nexists \ (p, q) \in f \ / \ p < 0 \ \wedge \ q < 0$

14. Sea $f(x) = \left[\sqrt{(1+x)\sqrt[6]{(1+x)^2}} \ \right]^3$, halle $f(99) + f(19)$.

15. Sea $f(x) = [\![2x - 4]\!]\,(x^2 + 2)$, si $f : [1, 3] \to \mathbb{R}$, halle el rango de f , y grafique la función.

16. Dada la función f , halle $\text{Dom}(f) \cap \text{Ran}(f)$.
$$f(x) = \begin{cases} |x| \ , & -3 \leq x < 0 \\ [\![x]\!] \ , & 0 \leq x < 1 \\ x - 1 \ , & 1 \leq x < 2 \end{cases}$$

17. Si $\{ r, s \}$ es el conjunto de las raíces de $P(x) = x^2 + 3x + c$, y si $r^2 + s^2 = m$, ¿Cuáles son verdaderas? :

   A) $m + 9 = 2c$, B) $m - 9 = 3c$, C) $m - 8 = 2c$,

   D) $m + 8 = 2c$, E) $m - 9 = -2c$.

18. Si a y b son constantes reales para las cuales los polinomios cuadráticos $P(x) = (7a - 2)x^2 - (5a - 3)x + 1$, $Q(x) = 8bx^2 - (4b + 2)x + 2$, tienen las mismas raíces, hallar los valores de a y b .

19. Halle el rango y la gráfica de $f(x) = |2x - 1| - x$.

20. Halle el rango de $f(x) = |x + 2| - 2|3 - x|$, $\forall \, x \in [-4, 10\rangle$. Grafique f .

21. Halle el rango de $f(x) = \frac{1}{2} [\![2|x + 1|]\!] (|x| - 1)$, para $x \in \langle -5/2, \ 2\rangle = \text{Dom}\, f$. Grafique f .

CLAVE DE RESPUESTAS

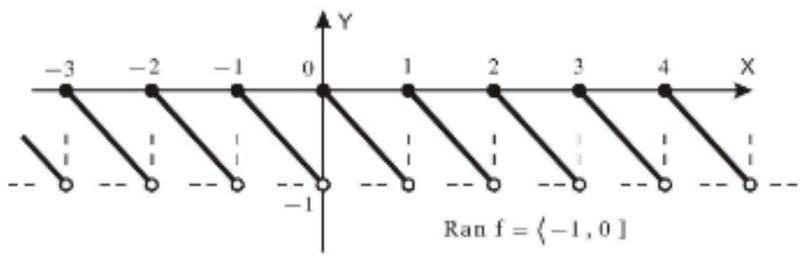
1. $\text{Dom}\, f = \langle -\infty, -1\rangle \cup \langle 5, \infty\rangle$, $\text{Rang}(f) = \langle -\infty, 8\rangle$;

$\text{Dom g} = \langle -5, -2\rangle \cup \langle 1, \infty\rangle$, $\text{Rang (g)} = \langle -3, \infty\rangle$.

$\text{Dom h} = \langle -\infty, -5\rangle \cup \langle -5, -2\rangle \cup \langle 2, \infty\rangle$, $R_h = \langle 1, \infty\rangle$.

2. $[\,2/3, 13/4\,]$. 3. Sólo II y III. 5. $2x^2 + x - 1 = 0$.

6. $f(x) = n - x$, $x \in [\,n, n+1\rangle$, $n \in \mathbb{Z}$



7. $R_f = [\,0, 2\,] = \text{Dom f}$. 8. $P_0 = (1/3, 7/3)$, $S = 8/3$

9. $(5x + 4)(2x - 3)$. 10. $(2, 8)$; $y = x + 6$

11. $\langle -5, -2\,] \cup [\,4, 5\rangle$. 12. $\mathbb{Z}$ (enteros).

13. $[\![[\![x]\!]]\!] = [\![x]\!]$; sólo (a), (b), (c) y (d). 14. 10,400

15. $\text{Rang (f)} = \langle -17/2, -17/4\,] \cup \{0\} \cup [\,33/4, 11\rangle \cup \{22\}$ 16. $[\,0, 2\,]$

17. Sólo (E) : De las propiedades de las raíces de la Ecuación de 2º grado:

$r + s = -3$, $rs = c$. Como $r^2 + s^2 = (r + s)^2 - 2rs$

$\Rightarrow \quad m = (-3)^2 - 2c = 9 - 2c$.

18. Sean x_1 , x_2 tales raíces, entonces

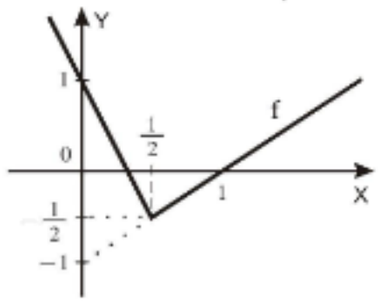
$$x_1 + x_2 = \frac{5a - 3}{7a - 2} = \frac{4b + 2}{8b} \quad \wedge \quad x_1 x_2 = \frac{1}{7a - 2} = \frac{2}{8b}$$

$\Rightarrow \quad [\; 12ab - 14a - 16b = -4 \;] \quad \wedge \quad [\; 4b = 7a - 2 \;]$

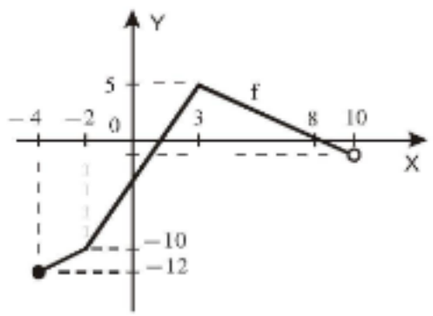
$\Rightarrow \quad 0 = 7a^2 - 16a + 4 = (7a - 2)(a - 2) = 0 \quad \Rightarrow \quad a = 2 \text{ y } b = 3.$

Se descarta $a = 2/7$, pues si así fuese $P(x)$ no sería un polinomio.

19. $\text{Rang (f)} = [\,-1/2, 8\rangle$



20. $\text{Rang (f)} = [\,-12, 5\,]$

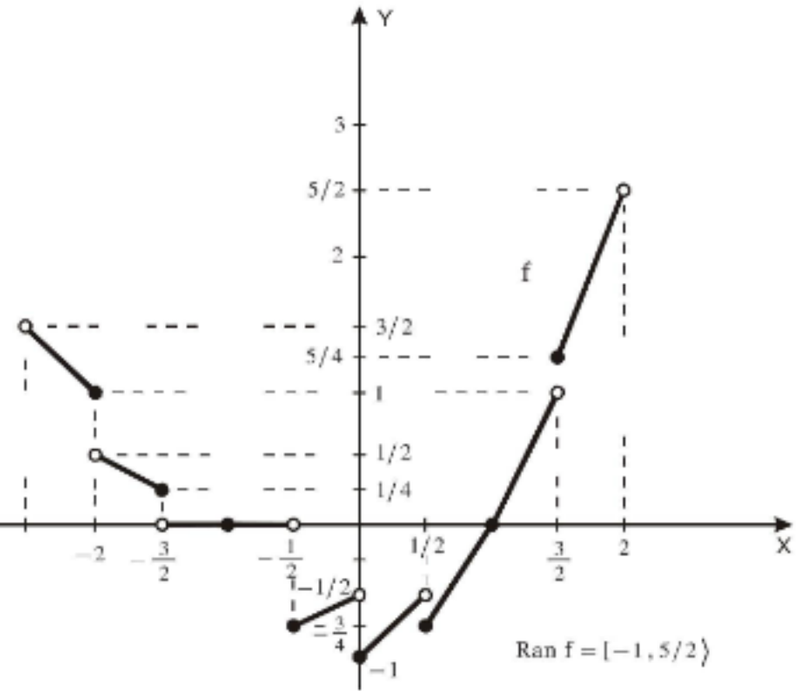


21. $[\![\,2|x+1|\,]\!] = n\ (\geq 0) \quad \Leftrightarrow \quad (x+1) \in \langle -\frac{n+1}{2}, -\frac{n}{2}\,] \cup [\,\frac{n}{2}, \frac{n+1}{2}\rangle$

$\Leftrightarrow \quad x \in \langle -\frac{n+3}{2}, -\frac{n+2}{2}\,] \cup [\,\frac{n-2}{2}, \frac{n-1}{2}\rangle$, $n \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$

$\Rightarrow$

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{n}{2}(x+1) \ , & x \in \langle -\frac{n+3}{2}, -\frac{n+2}{2}\,] \ ; \quad x \in \text{Dom f} \\ \frac{n}{2}(x-1) \ , & x \in [\,\frac{n-2}{2}, \frac{n-1}{2}\rangle \ ; \quad n \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\} \end{cases} \quad \wedge$$



7. TRAZADO DE GRÁFICAS ESPECIALES

En esta sección veremos una forma de construir las gráficas de algunas funciones definidas a partir de otras cuyas gráficas se asumen conocidas. En este sentido, **conocida la gráfica de una función de base** $y = f(x)$ construiremos las gráficas de las funciones siguientes:

1) $g(x) = f(x) + k$; $g(x) = f(x - h)$; $g(x) = f(x - h) + k$

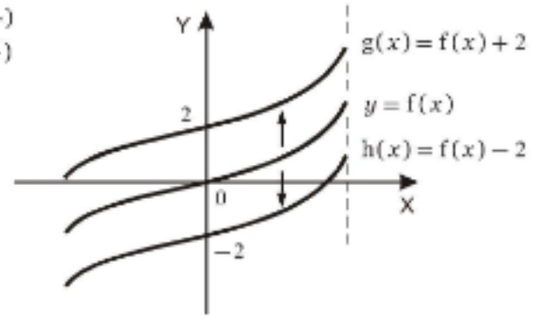
2) $g(x) = -f(x)$; $g(x) = f(-x)$; $g(x) = -f(-x)$

3) $g(x) = a\,f(x)$, $g(x) = f(ax)$, $(a \neq 0)$

4) $g(x) = |f(x)|$;
5) $g(x) = [\![f(x)]\!]$ [TODAS EN BASE A LA GRÁFICA DE $y = f(x)$]

1a) La gráfica de $\boxed{g(x) = f(x) \pm k}$ se obtiene ***desplazando VERTICALMENTE la gráfica de*** $y = f(x)$ ***en*** k ***unidades***:

i) ***HACIA ARRIBA***, para (+)
ii) ***HACIA ABAJO***, para (−)

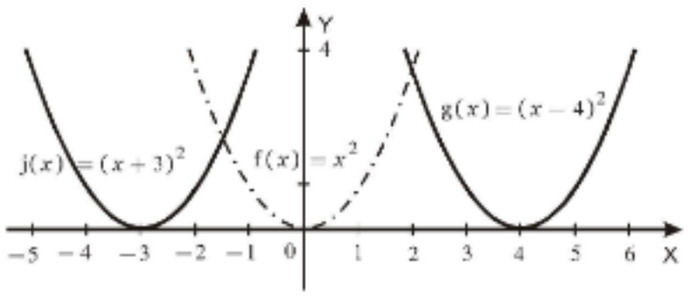


1b) Las gráficas de $\boxed{g(x) = f(x - h)}$ y de $\boxed{g(x) = f(x + h)}$ se obtienen ***desplazando HORIZONTALMENTE la gráfica de*** $y = f(x)$:

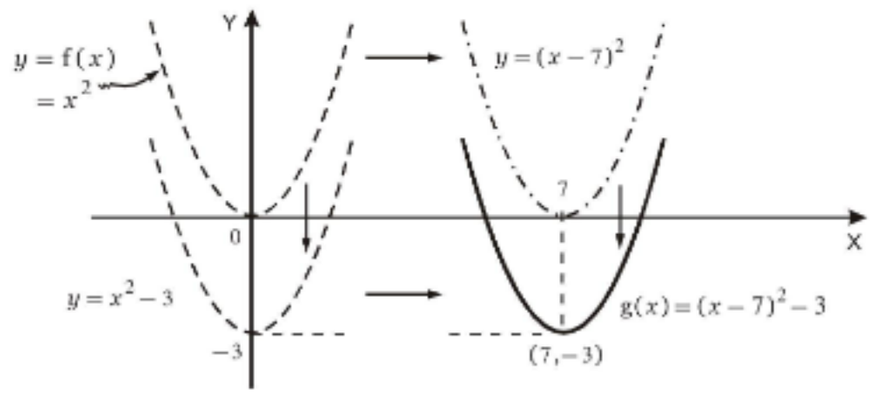
i) ***en*** h ***unidades HACIA LA DERECHA***, para el signo (−)
ii) ***en*** h ***unidades HACIA LA IZQUIERDA***, para el signo (+)

pues si $f(x) = x^2$, entonces $f(x-4) = (x-4)^2 = g(x)$

$f(x+3) = (x+3)^2 = j(x)$

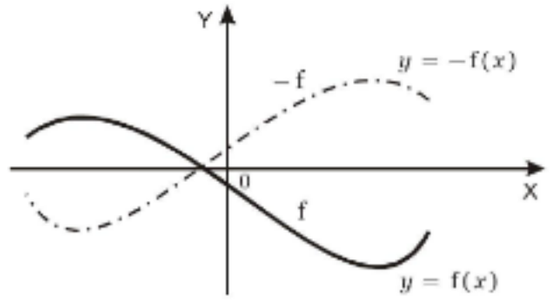


1c) La gráfica de $\boxed{g(x) = f(x - h) + k}$ se obtiene ***combinando*** (1a) y (1b) en cualquier orden.



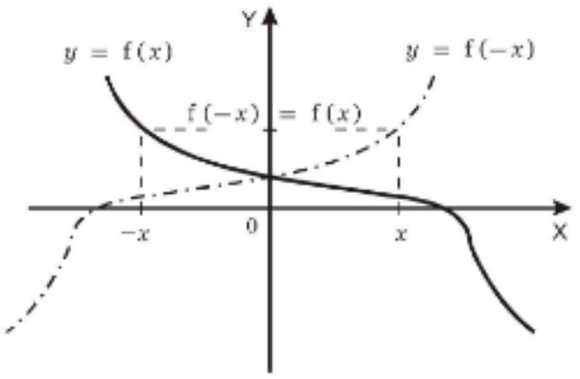
2a) La gráfica de $\boxed{g(x) = -f(x)}$ se obtiene por ***reflexión*** de la gráfica de $y = f(x)$ ***sobre el EJE*** X, considerando a este eje como ***DOBLE ESPEJO***.

Todo lo que está encima del Eje X se refleja hacia abajo, y todo lo que está abajo se refleja hacia arriba.



2b) La gráfica de $\boxed{y = f(-x)}$ se obtiene por ***reflexión*** de la gráfica de $y = f(x)$ ***sobre el EJE*** Y, considerando a este eje como ***DOBLE ESPEJO***.

Todo lo que está a la derecha del EJE Y gira hacia su izquierda y todo lo que está al lado izquierdo gira hacia el lado derecho de este EJE Y.



2c) La gráfica de $\boxed{y = -f(-x)}$ se obtiene *combinando* (2a) y (2b).

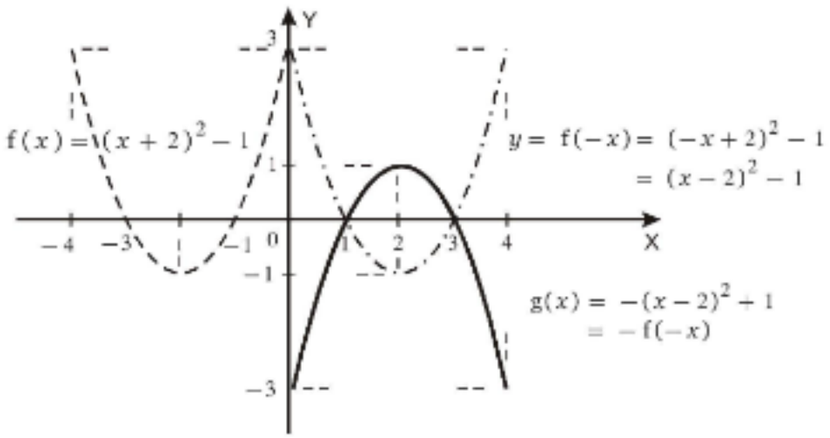
7.1 EJEMPLO . Como ilustración de los resultados anteriores hallaremos la gráfica de

$$y = g(x) = -(x-2)^2 + 1$$

SOLUCIÓN .- Sea $f(x) = (x+2)^2 - 1$, entonces

$$f(-x) = [(-x)+2]^2 - 1 = (x-2)^2 - 1$$

$\Rightarrow \quad -f(-x) = -(x-2)^2 + 1$. Luego $y = g(x) = -f(-x)$:



Note que pudimos haber graficado esta parábola directamente, claro.

3a) La gráfica de $\boxed{y = a\,f(x)}$, $a > 0$, se obtiene:

i) Estirando la gráfica de $y = f(x)$ ***VERTICALMENTE en un factor*** a , si $a > 1$, con base en el Eje X.

ii) Si $0 < a < 1$, encogiendo la gráfica de $y = f(x)$ ***VERTICALMENTE en un factor*** a .

3b) La gráfica de $\boxed{y = f(ax)}$, $a > 0$, se obtiene:

i) Encogiendo ***HORIZONTALMENTE*** la gráfica de $y = f(x)$ ***en un factor*** a , si $a > 1$, con base en el Eje Y .

ii) Estirando ***HORIZONTALMENTE*** la gráfica de $y = f(x)$ ***en un factor*** a , si $0 < a < 1$.

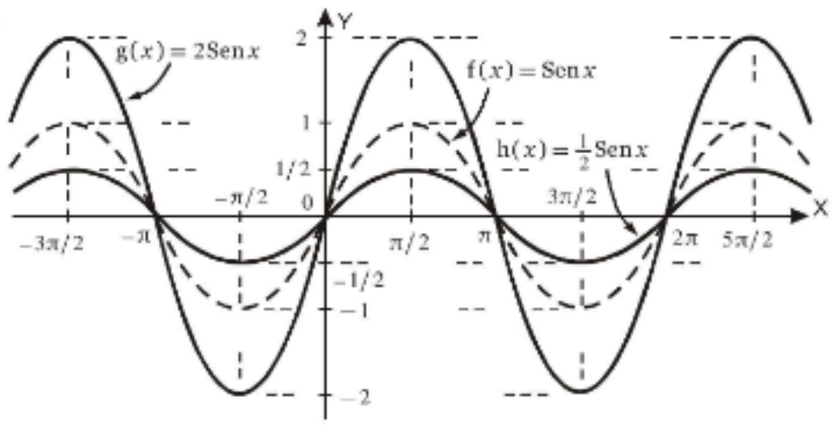
(Ver los ejemplos [7.2] y [7.3])

7.2 EJEMPLO .- Halle las gráficas de las funciones:

a) $g(x) = 2\,\mathrm{Sen}\,x$ b) $h(x) = \frac{1}{2}\,\mathrm{Sen}\,x$

SOLUCIÓN .- Estas corresponden al caso (3a):

a)

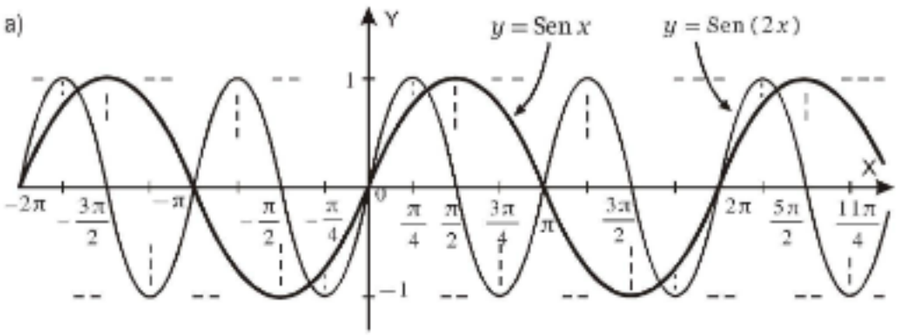


7.3 EJEMPLO .- Halle las gráficas de las funciones:

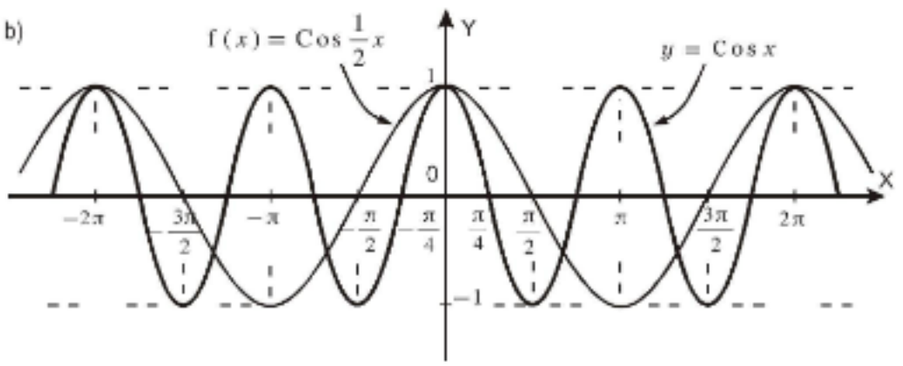
a) $f(x) = \mathrm{Sen}\,(2x)$, b) $f(x) = \mathrm{Cos}\,(\frac{1}{2}x)$ ambas para $x \in [\,0\,, 2\pi\,]$.

SOLUCIÓN .- Estas gráficas corresponden al caso (3b) .

a)



b)

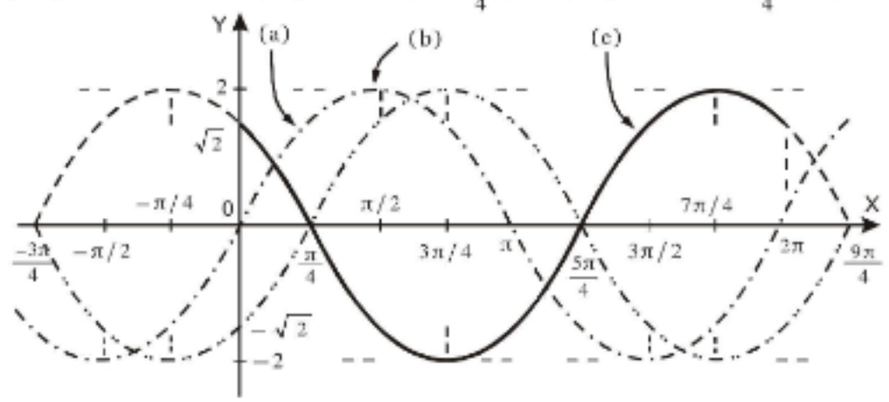


7.4 EJEMPLO .- Grafique la función f definida por:

$$f(x) = 2\,\mathrm{Sen}\left(\frac{\pi}{4} - x\right) \;, \quad x \in [0, 2\pi]$$

SOLUCIÓN .- Como $f(x) = 2\,\mathrm{Sen}\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = -2\,\mathrm{Sen}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$, y en el orden:

a) $y = 2\,\mathrm{Sen}\,x$, b) $y = 2\,\mathrm{Sen}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$, c) $y = -2\,\mathrm{Sen}\left(\frac{\pi}{4} - x\right)$



4) GRÁFICA DE $y = |f(x)|$:

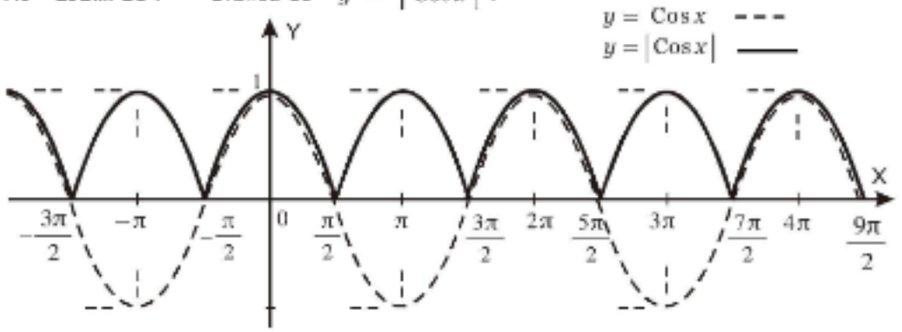
Desde que

$$y = |f(x)| = \begin{cases} -f(x) \;, & \text{si} \quad f(x) < 0 \\ f(x) \;, & \text{si} \quad f(x) \geq 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad |f(x)| \geq 0$$

Entonces la gráfica de $y = |f(x)|$ se encontrará completamente en el semiplano superior $y \geq 0$ y se obtiene a partir de la gráfica de la función $y = f(x)$:

REFLEJANDO HACIA ARRIBA DEL EJE X TODO LO QUE ESTÉ DEBAJO DE ESTE EJE, QUEDANDO INTACTA LA PARTE DE LA GRÁFICA DE $y = f(x)$ QUE ORIGINALMENTE YA SE ENCONTRABA ARRIBA o EN EL MISMO EJE X (es decir, en la zona $y \geq 0$).

7.5 EJEMPLO .- Gráfica de $y = |\mathrm{Cos}\,x|$:



7.6 EJERCICIO .- Grafique las funciones:

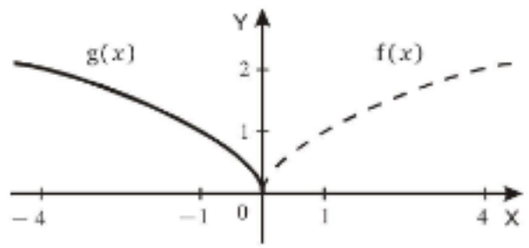
a) $g(x) = \sqrt{-x}$ b) $g(x) = [\![-x]\!]$

SOLUCIÓN .-

a) Si se toma como base la función $f(x) = \sqrt{x}$, $x \in [0, \infty\rangle$, entonces:

$g(x) = \sqrt{-x}$
$= f(-x)$

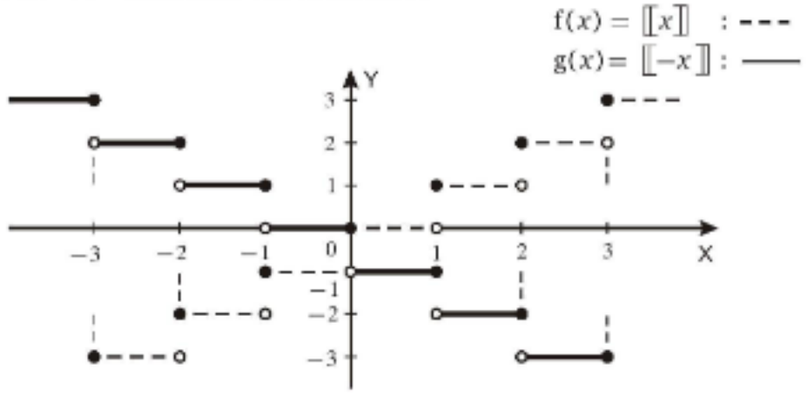
Aquí el EJE Y actúa como *ESPEJO DOBLE*.



b) Inicialmente consideramos $f(x) = [\![x]\!]$, entonces

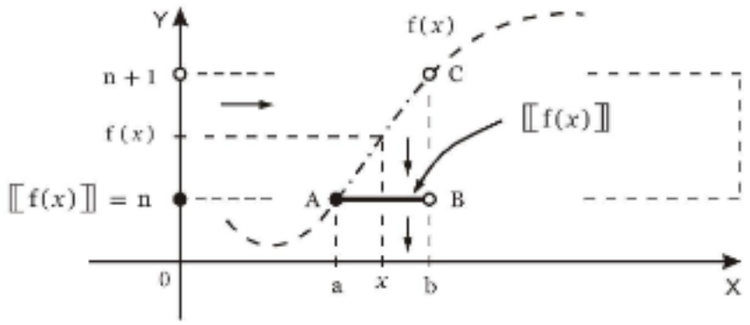
$$g(x) = [\![-x]\!] = f(-x)$$

EJE Y : actúa como *ESPEJO DOBLE*.

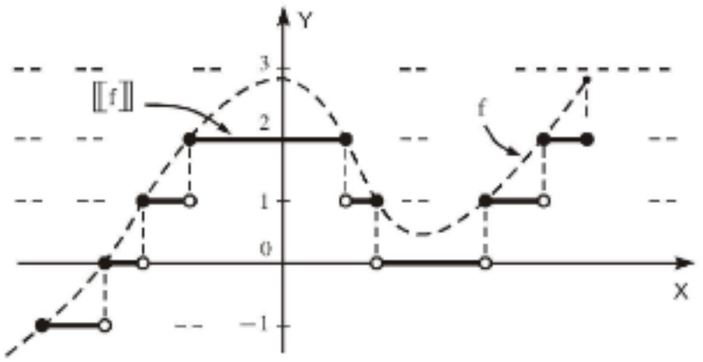


5) **GRÁFICA DE** $y = [\![f(x)]\!]$:

Recordando que $[\![f(x)]\!] = n$ si $n \leq f(x) < n + 1$, para $n \in \mathbb{Z}$, esta situación está bosquejada en el dibujo de la siguiente página. Toda la sección $\overset{\frown}{AC}$ de la gráfica de $y = f(x)$ que se encuentra en la franja horizontal : $n \leq f(x) < n + 1$, $\forall\, x \in [a, b\rangle$ es proyectada verticalmente hacia el segmento de recta , $\overline{AB}$ horizontal , conformando una sección de la gráfica de la función $y = [\![f(x)]\!]$:



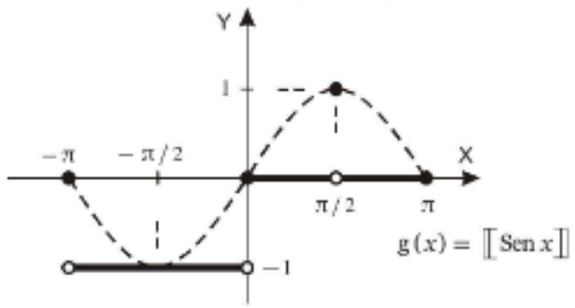
7.7 EJEMPLO . Dada la función f (curva punteada: - - - - -) , la gráfica de la función $[\![f]\!]$ es aquella constituida por los segmentos de recta horizontales (líneas continuas) de la figura adyacente.



7.8 EJERCICIO .- Dada la función $f(x) = \operatorname{Sen} x\ ,\ x \in [-\pi, \pi]$; verifique que la función $g(x) = [\![f(x)]\!] = [\![\operatorname{Sen} x]\!]\ ,\ x \in [-\pi, \pi]$, tiene como regla de correspondencia

$$g(x) = [\![\operatorname{Sen} x]\!] = \begin{cases} 1\ , & \text{si}\quad x = \pi/2 \\ 0\ , & \text{si}\quad x \in \{-\pi\} \cup [0, \pi/2\rangle \cup \langle \pi/2, \pi] \\ -1\ , & \text{si}\quad x \in \langle -\pi, 0\rangle \end{cases}$$

Ran(g) = {−1, 0, 1}



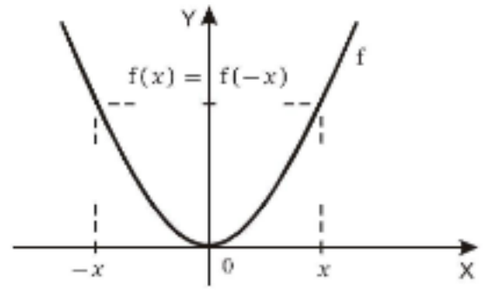
8. FUNCIONES PARES, IMPARES Y PERIÓDICAS

8.1 FUNCIÓN PAR .- Una función f se llama *FUNCIÓN PAR* si:

i) $x \in \operatorname{Dom} f \Rightarrow -x \in \operatorname{Dom} f$

ii) $f(-x) = f(x)$

En este caso la regla de correspondencia $y = f(x)$ no varía si se reemplaza x por $-x$. Geométricamente, la gráfica es *SIMÉTRICA RESPECTO AL EJE* Y.



Así tenemos que las funciones

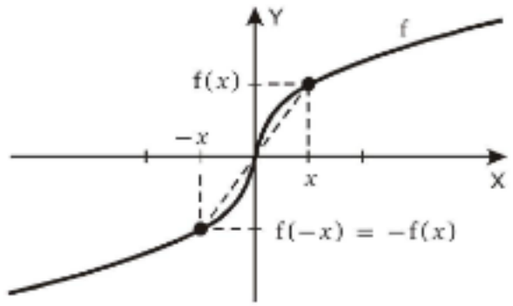
$f(x) = x^2$, $f(x) = \operatorname{Cos} x$, $f(x) = x^4$, son funciones *PARES*.

8.2 FUNCIÓN IMPAR.- Una función f se llama *FUNCIÓN IMPAR* si:

i) $x \in \operatorname{Dom} f \Rightarrow -x \in \operatorname{Dom} f$

ii) $f(-x) = -f(x)$

Aquí, la regla de correspondencia $y = f(x)$ no varía si se reemplaza simultáneamente tanto x por $-x$, como y por $-y$. Por lo tanto, su gráfica es *SIMÉTRICA RESPECTO AL ORIGEN.*



Son funciones *IMPARES* : $f(x) = x^3$, $f(x) = \operatorname{Sen} x$, $f(x) = 1/x$

Una función que es a la vez *PAR* e *IMPAR* es, por ejemplo:

$$f(x) = 0\ ,\ \forall\ x \in \langle -5, -2] \cup [2, 5\rangle$$

8.3 EJEMPLO .- ¿Es par o impar la función $f(x) = (x|x| - \frac{1}{x})\operatorname{Sen}(x^4)$?

SOLUCIÓN .- $\text{Dom}\, f = \langle -\infty, 0\rangle \cup \langle 0, \infty\rangle$, **entonces**

i) $x \in \text{Dom}\, f = \langle -\infty, 0\rangle \cup \langle 0, \infty\rangle \Rightarrow -x \in \text{Dom}\, f$

ii) $f(-x) = \left((-x)|-x| - \frac{1}{(-x)}\right) \text{Sen}[(-x)^4]$

$$= -\left(x|x| - \frac{1}{x}\right) \text{Sen}(x^4) = -f(x)$$

$\therefore$ f es una *FUNCIÓN IMPAR*.

8.4 EJERCICIO.- Si $f(x) = \sqrt{|x| - \left[\!\left[x^2\right]\!\right]}$, halle su dominio, rango y gráfica.
¿ Es f una función par ?

SOLUCIÓN .- $\left[\!\left[x^2\right]\!\right] = n \Leftrightarrow n \le x^2 < n+1, \quad n \in \mathbb{Z}, \ n \ge 0$

$$\Rightarrow \sqrt{n} \le |x| < \sqrt{n+1} \qquad (*)$$

$$\Rightarrow (\sqrt{n} - n) \le |x| - \left[\!\left[x^2\right]\!\right] = |x| - n < (\sqrt{n+1} - n)$$

Por estar $f(x)$ constituido por un radical de índice par entonces

$\sqrt{n} - n \ge 0$, luego $\sqrt{n}(\sqrt{n} - 1) \le 0 \Leftrightarrow 0 \le \sqrt{n} \le 1$

$\Leftrightarrow 0 \le n \le 1, \ n \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow n \in \{0, 1\}$

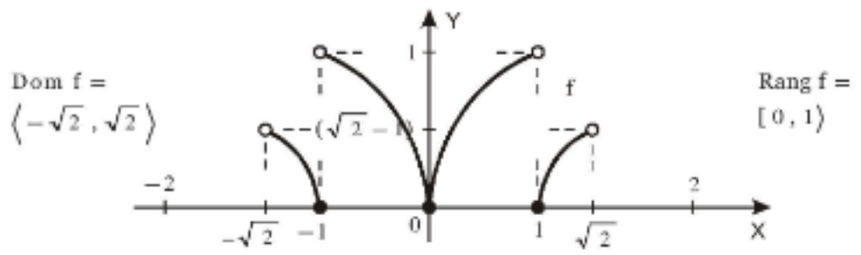
De $(*)$:

a) Si $n = 0$: $0 \le |x| < 1 \Leftrightarrow x \in (-1, 1)$, $f(x) = \sqrt{|x|}$

b) Si $n = 1$: $1 \le |x| < \sqrt{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x \in \left(-\sqrt{2}, -1\right] \cup \left[1, \sqrt{2}\right)$ y $f(x) = \sqrt{|x| - 1}$

Así, utilizando métodos de Gráficas Especiales y (a) y (b):



Vemos que f es una función *PAR* por tener su gráfica SIMÉTRICA respecto al EJE Y.

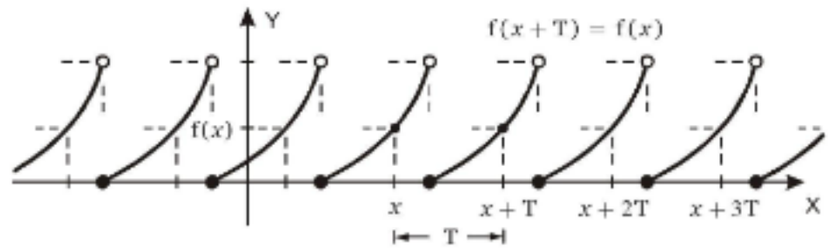
8.5 FUNCIONES PERIÓDICAS

Una función f , en $\mathbb{R}$, es denominada *FUNCIÓN PERIÓDICA* si existe un número $T \neq 0$ tal que:

i) $x \in \text{Dom}\, f \Rightarrow x + T \in \text{Dom}\, f$

ii) $f(x + T) = f(x)$, $\forall\, x \in \text{Dom}\, f$

Tal número T es llamado un *PERIODO DE* f.



Toda función periódica con periodo T tiene su gráfica de modo tal que la misma forma que tiene en un intervalo de longitud T se repite horizontal y ***periódicamente*** en el siguiente intervalo consecutivo, y en el anterior, de longitud T.

Note que si T es un período de f , entonces $2T$, $3T$, . . . , también son periodos de f .

Las funciones *SENO y COSENO* tienen periodo $T = 2\pi$:

$$\text{Sen}(x + 2\pi) = \text{Sen}\, x \ , \quad \text{Cos}(x + 2\pi) = \text{Cos}\, x \ , \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$$

También vemos que -2π , $\pm 4\pi$, $\pm 6\pi$, . . . , $2k\pi$ [con k entero $\neq 0$] son períodos de ***Seno*** y ***Coseno***, siendo 2π el ***menor período positivo***.

8.6 DEFINICIÓN .- Se llama ***PERÍODO MÍNIMO*** de una función periódica al menor de sus períodos positivos.

8.7 EJERCICIO .- Halle el período mínimo y las gráficas de:

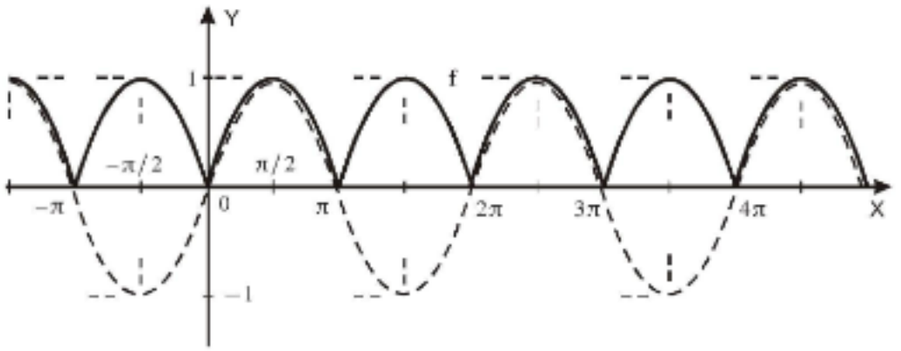
a) $f(x) = |\text{Sen}\, x|$ b) $g(x) = |\text{Cos}(2x)|$

SOLUCIÓN .-

a) Gráfica de $f(x) = |\text{Sen}\, x|$: Vemos que el ***PERÍODO MÍNIMO*** es $T = \pi$:

$f(x + T) = f(x + \pi) = |\text{Sen}(x + \pi)| = |-\text{Sen}\, x| = |\text{Sen}\, x| = f(x)$

Algo similar ocurre para $|\text{Cos}\, x|$, $\text{Sen}^2 x$, $\text{Cos}^2 x$. (Verifíquelo)



b) Para $g(x) = \left|\operatorname{Cos} 2x\right|$:

$$g(x+T) = \left|\operatorname{Cos} 2(x+T)\right| = \left|\operatorname{Cos}(2x+2T)\right|$$

$$(\text{y si } 2T = \pi) = \left|-\operatorname{Cos} 2x\right| = \left|\operatorname{Cos} 2x\right| = g(x)$$

Por lo tanto $T = \pi/2$ es el período mínimo de $g(x) = \left|\operatorname{Cos}(2x)\right|$.

8.8 EJERCICIO .- Si $w \neq 0$, demuestre que las funciones $f(x) = \operatorname{Cos}(wx)$ y $g(x) = \operatorname{Sen}(wx)$ tienen período mínimo $T = 2\pi/\left|w\right|$.

SOLUCIÓN .- $f(x+T) = \operatorname{Cos}(w[x+T]) = \operatorname{Cos}(wx + wT)$ $(*)$

Como $\operatorname{Cos}(wx + 2\pi) = \operatorname{Cos}(wx)$ donde $2\pi =$ período mínimo de *COSENO* entonces, de $(*)$: $wT = 2\pi \Rightarrow T = 2\pi/w$.
Por lo tanto, el período mínimo de $\operatorname{Cos}(wx)$ es $T = 2\pi/\left|w\right|$.
Verifique que lo mismo ocurre para $g(x) = \operatorname{Sen}(wx)$.

8.9 EJERCICIO .- Demuestre que las funciones:

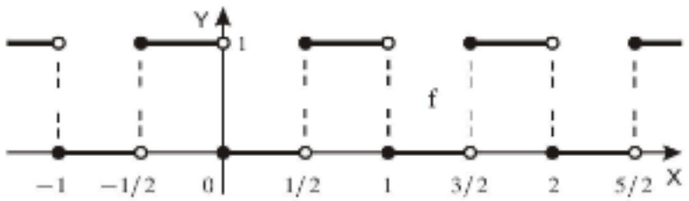
a) $f(x) = [\![2x]\!] - 2[\![x]\!]$, b) $g(x) = \sqrt{2[\![2x+1]\!] - 4[\![x]\!]}$

son periódicas con período mínimo $T = 1$.

SOLUCIÓN .- a) Para $T = 1$: por propiedades del *MÁXIMO ENTERO*,

$$f(x+T) = f(x+1) = [\![2(x+1)]\!] - 2[\![(x+1)]\!]$$
$$= [\![2x+2]\!] - 2([\![x]\!]+1) = [\![2x]\!] + 2 - 2[\![x]\!] - 2$$
$$= [\![2x]\!] - 2[\![x]\!] = f(x) .$$

Como
$$f(x) = [\![2x]\!] - 2[\![x]\!] = \begin{cases} 0 , & x \in [\,n, n+(1/2)\rangle \\ 1 , & x \in [\,n+(1/2), n+1\rangle , \quad n \in \mathbb{Z} \end{cases}$$



Período mínimo: $T = 1$

b) Para $T = 1$ $g(x) = \sqrt{2[\![2x+1]\!] - 4[\![x]\!]}$; y como

$$2[\![2x+1]\!] - 4[\![x]\!] = 2([\![2x]\!] - 2[\![x]\!]) + 2 , \qquad (*)$$

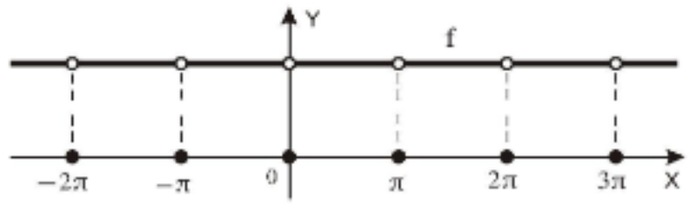
$$g(x+T) = g(x+1) = \sqrt{2([\![2(x+1)]\!] - 2[\![(x+1)]\!] + 2}$$
$$= \sqrt{2([\![2x]\!] - 2[\![x]\!]) + 2} = g(x)$$

debido a la parte (a) y $(*)$. Ver Ejercicio [6.27].

8.10 EJERCICIO .- Demuestre que la función $f(x) = \operatorname{Sgn}(\left|\operatorname{Sen} x\right|)$, $x \in \mathbb{R}$, es periódica. Halle su período mínimo. Compruebe que f es una función par.

SOLUCIÓN .- $\left|\operatorname{Sen} x\right| = 0 \Leftrightarrow x = n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$
$\left|\operatorname{Sen} x\right| > 0 \Leftrightarrow x \neq n\pi$, Por lo tanto

$$f(x) = \operatorname{Sgn}\left|\operatorname{Sen} x\right| = \begin{cases} 0 , & \text{si } x = n\pi , \quad n \in \mathbb{Z} \\ 1 , & \text{si } x \neq n\pi . \end{cases}$$



Vemos que el período mínimo es $T = \pi$, y que f es una función ***PAR*** .

8.11 EJERCICIO. Si a es el período mínimo de f y b es el período mínimo de g , halle $a + b$, para

$$f(x) = \operatorname{Sec}\left(\frac{\pi}{2} + \frac{14\pi}{3}x\right) , \qquad g(x) = \operatorname{Tan}\left(\frac{2\pi x - 1}{4}\right) .$$

SOLUCIÓN .- De $\operatorname{Sec}(u) = 1/\operatorname{Cos}(u)$, y

$$\operatorname{Cos}\left[\frac{\pi}{2} + \frac{14\pi}{3}(x+T)\right] = -\operatorname{Sen}\left(\frac{14\pi}{3}(x+T)\right) = -\operatorname{Sen}\left(\frac{14\pi}{3}x + \frac{14\pi}{3}T\right)$$

$$= -\operatorname{Sen}\left(\frac{14\pi x}{3}\right) , \qquad \text{para } 2\pi = 14\pi T/3$$

$$= \operatorname{Cos}\left[\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{14\pi}{3}x\right)\right] = \operatorname{Cos}\left(\frac{\pi}{2} + \frac{14\pi}{3}x\right)$$

$\Rightarrow \quad 2\pi = 14\pi T/3 \quad \Leftrightarrow \quad T = 3/7 = a$.

Y como la *FUNCIÓN TANGENTE* tiene período mínimo π :

$$\operatorname{Tan}(z+\pi) = \operatorname{Tan}(z) \quad \Rightarrow \quad \operatorname{Tan}\left(\frac{2\pi(x+T)-1}{4}\right) =$$

$$= \operatorname{Tan}\left(\frac{2\pi x - 1}{4} + \frac{\pi}{2}T\right) = \operatorname{Tan}\left(\frac{2\pi x - 1}{4}\right), \quad \text{si } \pi T/2 = \pi \qquad (**)$$

$\Rightarrow \quad T = 2 = b$.

8.12 EJERCICIO .- Halle la gráfica y el rango de

$$f(x) = \begin{cases} |\, x - [\![x]\!] \,| & , \text{ si } [\![x]\!] \text{ es par.} \\ |\, x - [\![x+1]\!] \,| & , \text{ si } [\![x]\!] \text{ es impar.} \end{cases}$$

¿Es f periódica? ¿Cuál es su periodo mínimo?

SOLUCIÓN .- Como $0 \le x - [\![x]\!] < 1 \ , \ \forall\, x \in \mathbb{R} \ , \qquad (*)$

a) $[\![x]\!] = n = 2k \iff 2k \le x < 2k+1 \ , \quad k \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow \quad |x - [\![x]\!]| = x - [\![x]\!] = x - 2k \ , \quad 2k \le x < 2k+1 \ .$

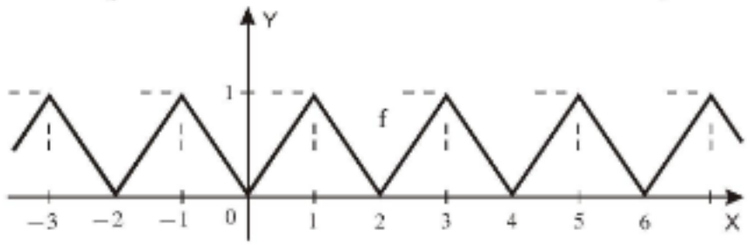
b) $[\![x]\!] = n = 2k+1 \iff 2k+1 \le x < 2k+2 \ , \quad k \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow \ |\, x - [\![x+1]\!] \,| = -(x - [\![x]\!] - 1) = 1 - x + [\![x]\!], \text{ de } (*).$

$= 1 - x + 2k + 1 = (2k+2) - x \quad \Rightarrow$

$$f(x) = \begin{cases} x - 2k & , \text{ si } 2k \le x < 2k+1 \ . \\ (2+2k) - x & , \text{ si } 2k+1 \le x < 2k+2 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} x - 2k & , \text{ si } x \in [\,2k\,,\,2k+1\rangle \ , \ k \in \mathbb{Z} \\ (2+2k) - x & , \text{ si } x \in [\,2k+1\,,\,2k+2\rangle \ . \end{cases}$$



Vemos que f tiene periodo mínimo $T = 2$, $\text{Rang}(f) = [0, 1]$.

8.13 EJERCICIO .- Halle el dominio, el rango y la gráfica de

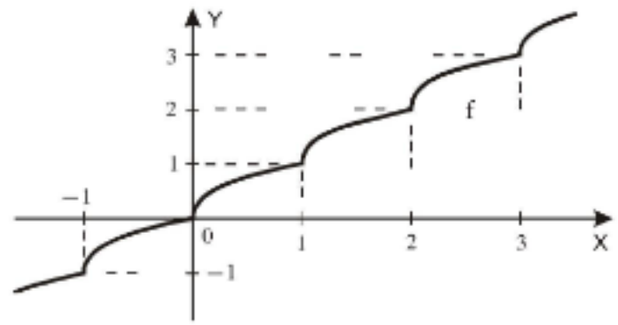
$$f(x) = [\![x]\!] + \sqrt{x - [\![x]\!]}$$

SOLUCIÓN .- $\text{Dom}\, f = \mathbb{R}$; además, para $n \in \mathbb{Z}$,

$$f(x) = \sqrt{x - n} \ , \quad \text{si} \quad x \in [\,n\,,\,n+1\rangle \ , \ ([\![x]\!] = n)$$

$$f(x) = \begin{cases} -1 + \sqrt{x+1} & , \ x \in [-1,\,0\rangle & (n = -1) \\ \sqrt{x} & , \ x \in [\,0\,,\,1\rangle & (n = 0) \\ 1 + \sqrt{x-1} & , \ x \in [\,1\,,\,2\rangle & (n = 1) \\ 2 + \sqrt{x-2} & , \ x \in [\,2\,,\,3\rangle & (n = 2) \end{cases}$$

...



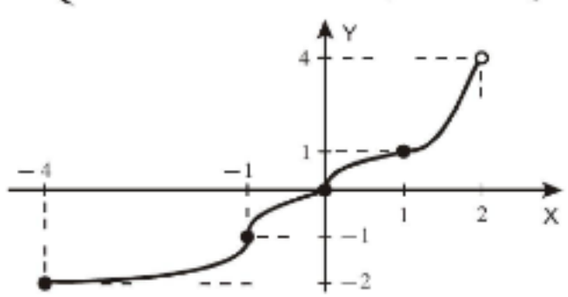
$\text{Rang}(f) = \mathbb{R}$

8.14 EJERCICIO .- Halle el rango y la gráfica de la función:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & , \ x \in [\,1\,,\,2\rangle \\ [\![x]\!] + \sqrt{x - [\![x]\!]} & , \ x \in [\,-1\,,\,1\rangle \\ -\sqrt{-x} & , \ x \in [\,-4\,,\,-1\rangle \end{cases}$$

SOLUCIÓN .-

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & , \ x \in [\,1,\,2\rangle \\ -1 + \sqrt{x+1} & , \ x \in [\,-1,\,1\rangle \ \ldots \end{cases} \qquad f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & , \ x \in [\,0\,,\,1\rangle \\ -\sqrt{-x} & , \ x \in [\,-4\,,\,-1\rangle \end{cases}$$



$\text{Rang}(f) = [-2\,,\,4\rangle$

$\text{Dom}\,(f) = [-4\,,\,2\rangle$

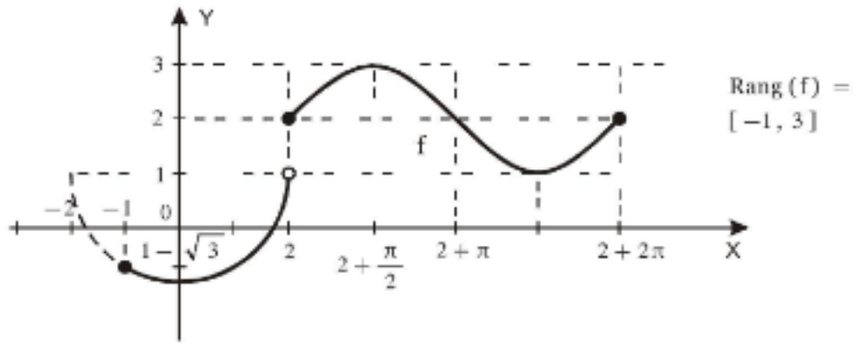
8.15 EJERCICIO .- Halle el rango y la gráfica de la función:

$$f(x) = \begin{cases} 1 - \sqrt{4 - x^2} & , \ -1 \le x < 2 \\ 2 + \text{Sen}(x-2) & , \ 2 \le x \le (2 + 2\pi) \ . \end{cases}$$

SOLUCIÓN .- La primera regla de correspondencia representa un arco de la semicircunferencia: $x^2 + (y-1)^2 = 4 \ , \ y \le 1$.

De la gráfica, que podemos ver a continuación, tenemos que el rango de f es

$\text{Rang}(f) = [-1,\,3]$.



Rang (f) = $[-1, 3]$

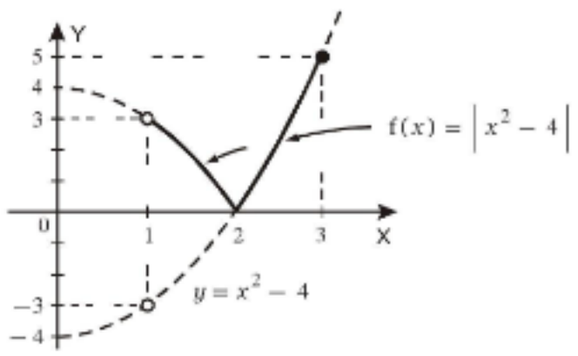
8.16 EJERCICIO .- Determine el rango y la gráfica de la función

$$f(x) = \left| x^2 \left[\!\left[\frac{5-x}{2} \right]\!\right] - 4 \right| \quad , \quad x \in \langle 1, 3]$$

SOLUCIÓN .-

$$x \in \langle 1, 3] \Leftrightarrow -x \in [-3, -1\rangle \Leftrightarrow 5 - x \in [2, 4\rangle$$
$$\Leftrightarrow (5-x)/2 \in [1, 2\rangle$$
$$\Leftrightarrow \left[\!\left[(5-x)/2 \right]\!\right] = 1. \quad \text{Luego,}$$

$f(x) = \left| x^2 - 4 \right|$,
$\forall\ x \in \langle 1, 3]$
Rang (f) = $[0, 5]$

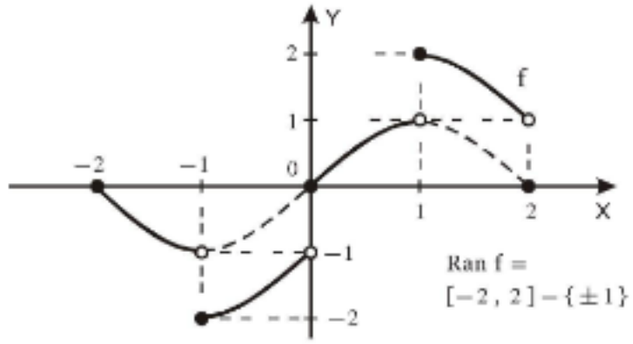


8.17 EJERCICIO .- Determine el rango y la gráfica de

$$f(x) = \text{Sen}\left(\frac{\pi \left[\!\left[x \right]\!\right]}{2}\right) + \text{Sen}\left(\frac{\pi x}{2}\right), \quad x \in [-2, 2]$$

SOLUCIÓN.

$$f(x) = \begin{cases} \text{Sen}(\pi x/2) & , \quad x \in [-2, -1\rangle \\ -1 + \text{Sen}(\pi x/2) & , \quad x \in [-1, 0\rangle \\ \text{Sen}(\pi x/2) & , \quad x \in [0, 1\rangle \\ 1 + \text{Sen}(\pi x/2) & , \quad x \in [1, 2\rangle \\ 0 & , \quad x = 2 \end{cases}$$



SERIE DE EJERCICIOS

1. Determine si las siguientes funciones son pares o impares o ninguna:
   a) $|x|^3$, $x \in \mathbb{R}$; f) $3x^4 - 2x^2 + 5$, $x \in \mathbb{R}$
   b) $x\sqrt{x^2-1}$, $|x-1| \geq 1$; g) $|x| - x^4$
   c) $x + \left[\!\left[x \right]\!\right]$, $x \in \langle -1, 1\rangle$; h) $\text{Sen}(x^2+2)$
   d) $\text{Sgn}(x)$, $x \in \langle -2, 2\rangle$; i) $|x+2| - |x-2|$
   e) $3x^2 + 2x - 1$, $x \in \mathbb{R}$.
2. Indique dos ejemplos de una función que sea par e impar a la vez.
3. Dada la función $f(x) = \sqrt{\left[\!\left[|\cos x| \right]\!\right] - 1}$, ¿Es f periódica? , ¿Es f par?. (Ver el EJERCICIO 6.41).
4. Dada $f(x) = \sqrt{(x/2) - \left[\!\left[x/2 \right]\!\right]}$, $x \in \mathbb{R}$. a) ¿Es f periódica? ; si así fuera, ¿Cuál es su período mínimo?. b) Bosqueje la gráfica de f, y halle su rango.
5. ¿Es periódica la función $f(x) = \left[\!\left[\!\left[x \right]\!\right]\!\right] - x$?
6. a) Halle el período mínimo T de la función $f(x) = 6\cos^2 x$.
   b) Sean $f(x) = 2\cos^2(2x) - 1$, $g(x) = \cos(x/3)$, y la función $h(x) = f(x) + g(x)$, cuyos períodos son k_1, k_2 y k_3 , halle el valor de $S = k_1 + k_2 + k_3$.
7. Grafique las funciones a) $f(x) = 2\,\text{Sen}(-x)$, $x \in [0, 4\pi]$;
   b) $g(x) = \frac{1}{2}\text{Sen}(2x - \frac{\pi}{2})$, $x \in [0, 2\pi]$.
8. Halle el período T de $f(x) = 3\,\text{Sen}(\frac{3x}{2} + \frac{\pi}{6})$.
9. Demuestre que la función constante $f(x) = 0$ es par e impar, para todo $x \in \text{Dom}\, f = \{x \in \mathbb{R} \,/\, x^2 \in B\}$, siendo $B \subset [0, \infty\rangle$, no vacío.

10. Grafique: a) $f(x) = \left[\!\left[-x^2 \right]\!\right]$, b) $g(x) = \left[\!\left[-x^2 + 1 \right]\!\right]$.

11. Grafique: a) $\sqrt{|x|}$, b) $\sqrt{[\![x]\!]}$, c) $|[\![x]\!]|$, d) $\left[\!\left[\sqrt{x} \right]\!\right]$, y e) $\left[\!\left[|x| \right]\!\right]$.

12. Halle las gráficas de: a) $f(x) = (x - [\![x]\!])^2$;
b) $g(x) = 1 + (-1)^n$, donde $n = [\![x]\!]$; c) $h(x) = \left[\!\left[\operatorname{Cos} x \right]\!\right]$
d) $j(x) = \left[\!\left[-\operatorname{Cos}(x - \frac{\pi}{4}) \right]\!\right]$, $x \in [0, 2\pi\rangle$.

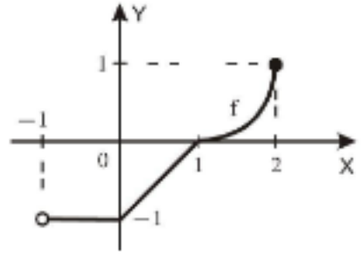
SUG: (d) Grafique primero $\operatorname{Cos} x$ y luego $y = -\operatorname{Cos}(x - \frac{\pi}{4})$.

13. Halle el rango y la gráfica de la función:

$$f(x) = \begin{cases} |x+3| & , \quad x < 0 \\ 2(x-1)^2 & , \quad x \in [0, 2\rangle \\ 2 - |x-4| & , \quad x \in [2, \infty\rangle \end{cases}$$

14. Grafique $f(x) = |x+2| + |x-2| - |x| - 1$. Halle el rango.

15. Dada la gráfica de f , bosqueje las gráficas de:
a) $g(x) = f(|x|)$
b) $h(x) = |f(x)|$



16. Si $f(x) = x[\![x]\!] + \sqrt{x - [\![x]\!]}$, demuestre que f es par.

17. Sean $f(x) = \left[\!\left[x + (1/2) \right]\!\right]$, $x \in [-1, 1]$, $g(x) = \left[\!\left[|x| + \frac{1}{2} \right]\!\right]$, $x \in [-1, 1]$; determine si f σ g es par σ impar. Graficarlas.

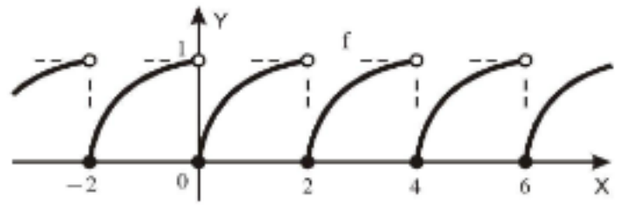
18. Si $f(x) = \left[\!\left[mx \right]\!\right] - m[\![x]\!]$, $m \in \mathbb{Z}$, demuestre que f tiene período mínimo $T = 1$.

19. Dada la función periódica $f(x) = 2x - \left[\!\left[2x - 1 \right]\!\right] - 1$, halle su período mínimo T , en forma gráfica y en forma analítica.

CLAVE DE RESPUESTAS

1. Pares: (a) , (f) , (g) , (h) . Impares: (i) , (d) .
2. a) $f(x) = 0$, $\forall\, x \in \mathbb{Z}$. b) $f(x) = 0$, $x \in \langle -2, -1] \cup [1, 2\rangle$
3. La función f es par y periódica con periodo $T = 1$.
4. Período mínimo:

$T = 2$
$\operatorname{Rang}(f) = [0, 1\rangle$.



5. Sí, tiene período mínimo $T = 1$.(Ej. Propuesto [6] Sec.[6] Funciones Especiales)

6. a) $f(x) = 3 + 3\operatorname{Cos} 2x \Rightarrow 2(x+T) = 2x + 2\pi \Rightarrow T = \pi$

b) Sabiendo que $k_1 = \pi/2$ y que $k_2 = 6\pi$:

$$h(x+T) = 2\operatorname{Cos}^2[2(x+T)] - 1 + \operatorname{Cos}[(x+T)/3]$$
$$= 2\operatorname{Cos}^2(2x + 2T) - 1 + \operatorname{Cos}(\frac{x}{3} + \frac{T}{3}) = h(x)$$

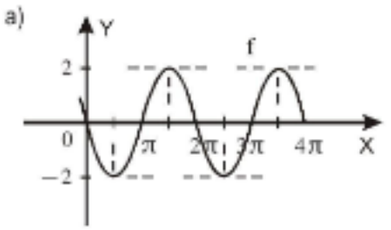
$\Leftrightarrow \quad 2T = \frac{1}{2}\pi n_1 \quad \wedge \quad T/3 = 2\pi n_2$, para algún $n_1 , n_2 \in \mathbb{Z}^+$

$\Leftrightarrow \quad T = \frac{1}{4}\pi n_1 = 6\pi n_2 \quad \Leftrightarrow \quad n_1 = 24 n_2$. Aquí elegimos n_1 y $n_2 \in \mathbb{Z}^+$ como los menores enteros positivos que cumplan tal condición, es decir, $n_2 = 1$, $n_1 = 24 \quad \Leftrightarrow \quad T = 6\pi = k_3$ es el período mínimo de $h(x)$. Luego,

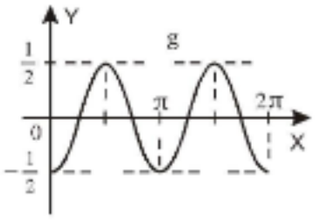
$$S = k_1 + k_2 + k_3 = (\pi/2) + 6\pi + 6\pi = 25\pi/2 .$$

7. Note que $g(x) = -(1/2)\operatorname{Cos} 2x$,

a)



b)

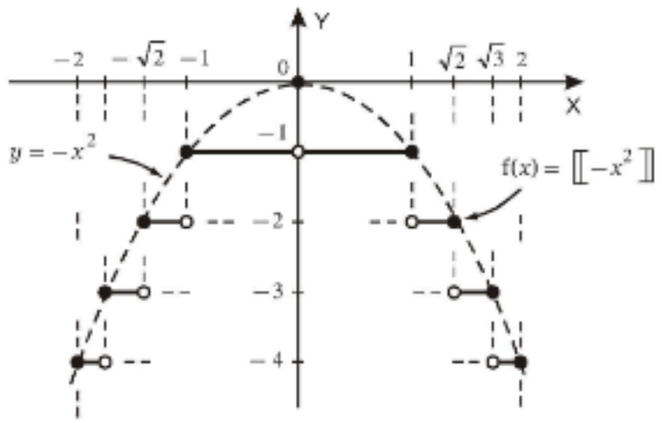


8. $T = 4\pi/3$;

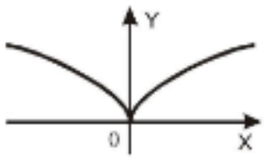
9. Sea $x \in \operatorname{Dom} f \Rightarrow x^2 \in B \Rightarrow (-x)^2 = x^2 \in B \Rightarrow (-x) \in \operatorname{Dom} f$.
Además, $f(-x) = 0 = f(x)$, por ser f constante.

10. a) Ver a continuación de (b) .
b) La gráfica de $g(x) = \left[\!\left[-x^2 + 1 \right]\!\right] = \left[\!\left[-x^2 \right]\!\right] + 1$, tiene la misma forma que la de (a) a la cual se le ha subido en 1 unidad.

a)

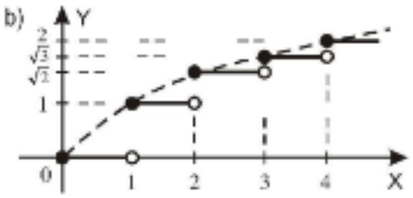


11. a)



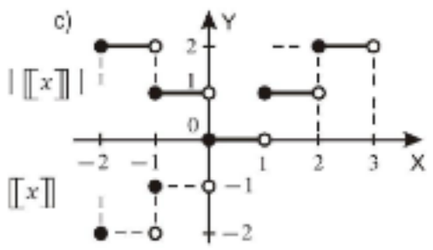
Rango $= [\,0\,, \infty\,\rangle$

b)

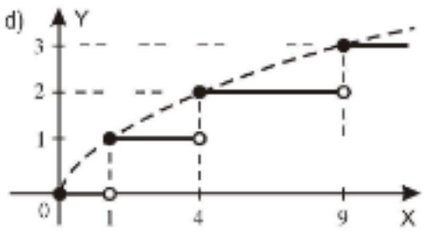


Rango $= \{\sqrt{n} \;/\; n \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}\}$

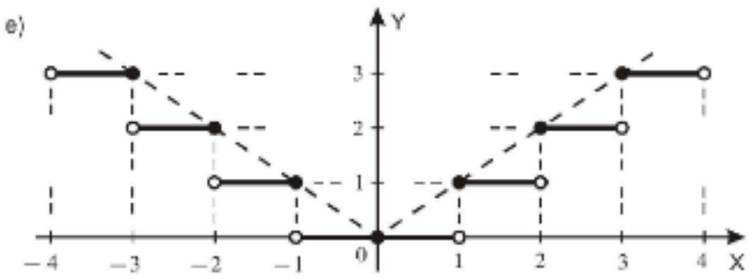
c)



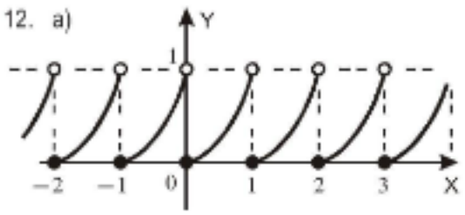
d)



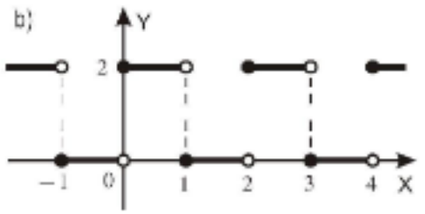
e)



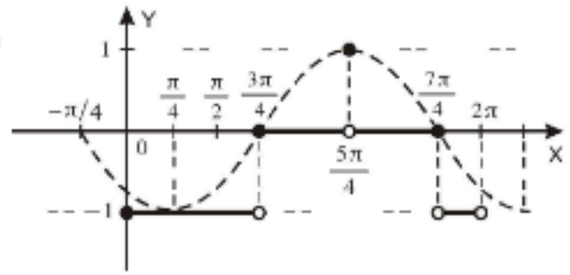
12. a)



b)



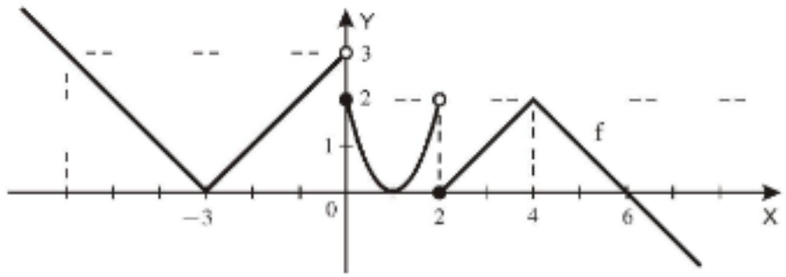
d)



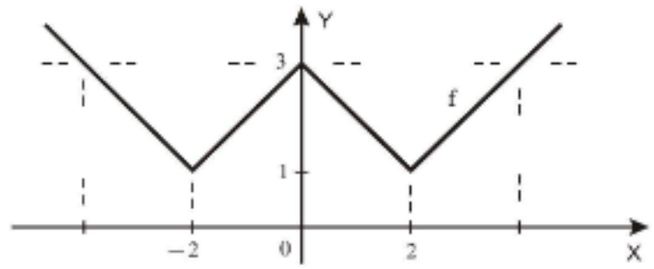
Dom f $= [\,0\,, 2\pi\rangle$

Ran f $= \{-1, 0, 1\}$

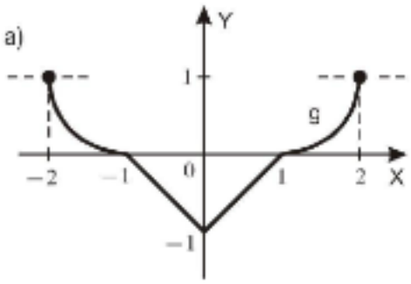
13.



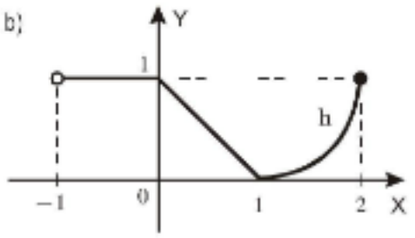
14.



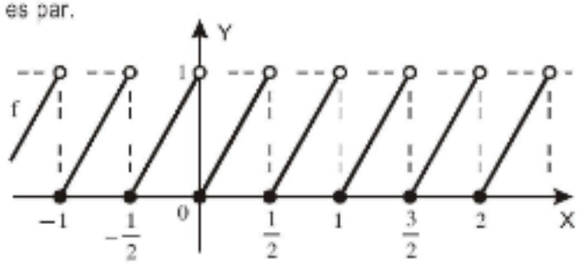
15. a)



b)



17. f no es par ni impar; g es par.
19. $T_{min} = 1/2$.



9 ÁLGEBRA DE FUNCIONES

9.1 IGUALDAD DE FUNCIONES.- Dos funciones f y g son IGUALES si:

$$\text{i)}\quad \mathrm{Dom}\, f = \mathrm{Dom}\, g$$
$$\wedge \quad \text{ii)}\quad f(x) = g(x)\ ,\ \forall\ x \in \mathrm{Dom}\, f\ (= \mathrm{Dom}\, g);$$

En tal caso se denota $f = g$.

Así tenemos que las funciones

$$f(x) = x^2 - x\ ,\quad x \in [0,4]\ ;\quad g(x) = x^2 - x\ ,\ x \in [0,5]$$

NO SON IGUALES, pues aunque tienen la misma regla de correspondencia, sus dominios no coinciden, ni sus gráficas tampoco, por supuesto.

9.2 EJERCICIO .- Determine si son iguales:

$$f(x) = \sqrt{x-1}\cdot\sqrt{x-4}\quad ,\qquad g(x) = \sqrt{(x-1)(x-4)}$$

SOLUCIÓN .-

$$\mathrm{Dom}\, f = \{x \in \mathbb{R} / x - 1 \geq 0 \wedge x - 4 \geq 0\} = [1,\infty\rangle \cap [4,\infty\rangle = [4,\infty\rangle$$
$$\mathrm{Dom}\, g = \{x \in \mathbb{R} /\ (x-1)(x-4) \geq 0\} = \langle -\infty, 1] \cup [4,\infty\rangle$$

Como los dominios no coinciden, entonces $f \neq g$.

9.3 SUMA DE FUNCIONES

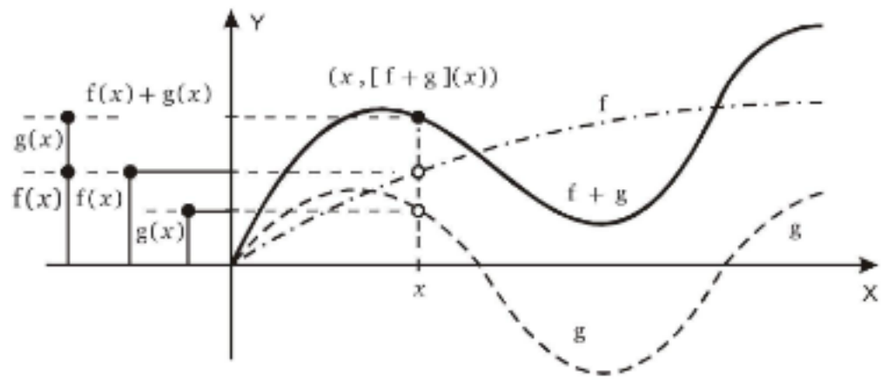
Recordemos que una función está completamente definida cuando se especifica su Dominio y su Regla de Correspondencia.

9.4 DEFINICIÓN. Si f y g tienen dominios $\mathrm{Dom}\, f$ y $\mathrm{Dom}\, g$, se define una nueva función llamada ***FUNCIÓN SUMA*** "$f + g$", tal que:

$$\text{i)}\quad \mathrm{Dom}\,(f+g) = \mathrm{Dom}\, f \cap \mathrm{Dom}\, g$$
$$\wedge \quad \text{ii)}\quad (f+g)(x) = f(x) + g(x)\ .$$

Así tenemos que el valor de la función suma "$f + g$" en el punto x, es igual a la suma de las imágenes $f(x) + g(x)$. Es decir:

$$f + g = \{(x,\ f(x) + g(x)\ )\ /\ x \in \mathrm{Dom}\, f \cap \mathrm{Dom}\, g\ \}$$



Por ejemplo, dadas las funciones:

$$f = \{(1,3),(2,6),(4,8),(6,2)\} = \{\ (x,\ f(x)\ )\ /\ \ x \in \mathrm{Dom}\, f\ \}$$
$$g = \{(0,1),(1,2),(2,-1),(4,5),(7,0)\} = \{\ (x, g(x))\ /\ \ x \in \mathrm{Dom}\, g\ \}$$

$\Rightarrow$ $\mathrm{Dom}\, f = \{1,2,4,6\}$, $\mathrm{Dom}\, g = \{0,1,2,4,7\}$; luego,
$\mathrm{Dom}\,(f+g) = \mathrm{Dom}\, f \cap \mathrm{Dom}\, g = \{1,2,4\}$

Y como todo elemento $(x, (f+g)(x))$ de la función SUMA "$f + g$" tiene la forma $(x,\ f(x) + g(x)\ )$, entonces: $\forall\ x \in \mathrm{Dom}\,(f+g) = \{1,2,4\}$,

si $x = 1 \Rightarrow (1, f(1) + g(1)) = (1,\ 3+2) = (1,\ 5) \in f+g$
si $x = 2 \Rightarrow (2, f(2) + g(2)) = (2,\ 6 + (-1)) = (2,\ 5) \in f+g$
si $x = 4 \Rightarrow (4, f(4) + g(4)) = (4,\ 8+5) = (4,\ 13) \in f+g$
$\Rightarrow \quad f + g = \{\ (1,5),\ (2,5),\ (4,13)\ \}$.

9.5 DEFINICIÓN. Dadas las constantes $m \neq 0$ y b, reales, se llama **FUNCIÓN LINEAL** a la función definida por:

$$f(x) = mx + b\quad ,\quad x \in \mathbb{R}$$

La gráfica de cualquier función lineal, por su regla de correspondencia, viene a ser una recta con pendiente m y que intersecta al Eje Y en el punto $(0,\ b)$.

9.6 RESTA Y MULTIPLICACIÓN DE FUNCIONES

Si f y g tienen dominios $\mathrm{Dom}\, f$ y $\mathrm{Dom}\, g$, se definen las funciones:

a) ***DIFERENCIA*** "$f - g$"

$$\text{i)}\quad \mathrm{Dom}\,(f-g) = \mathrm{Dom}\, f \cap \mathrm{Dom}\, g$$
$$\text{ii)}\quad (f-g)(x) = f(x) - g(x)$$

b) ***MULTIPLICACIÓN*** "fg"

$$\text{i)}\quad \mathrm{Dom}\,(fg) = \mathrm{Dom}\, f \cap \mathrm{Dom}\, g$$
$$\text{ii)}\quad (fg)(x) = f(x)\,g(x)$$

$\Rightarrow \quad f - g = \{(x, f(x) - g(x)) / \ x \in \text{Dom } f \cap \text{Dom } g \}$

$fg = \{(x, f(x)g(x)) / \ x \in \text{Dom } f \cap \text{Dom } g \}$

Por ejemplo, dadas las funciones

$f(x) = \{(1,3),(2,6),(4,8),(6,2)\}$

$g(x) = \{(1,2),(2,-1),(0,1),(4,5),(7,0)\}$

$\Rightarrow \quad \text{Dom}(f - g) = \text{Dom}(fg) = \text{Dom } f \cap \text{Dom } g = \{1,2,4\}$

$f - g = \{(1, f(1) - g(1)), (2, f(2) - g(2)), (4, f(4) - g(4))\}$

$= \{(1, 3 - 2), (2, 6 - (-1)), (4, 8 - 5)\}$

$= \{(1,1),(2,7),(4,3)\}$

$fg = \{(1, f(1)g(1)), (2, f(2)g(2)), (4, f(4)g(4))\}$

$= \{(1,(3)(2)), (2,(6)(-1)), (4,(8)(5))\}$

$= \{(1,6),(2,-6),(4,40)\}$

9.7 NOTACIÓN .- La multiplicación de una función por sí misma:

$f^2 = f \cdot f \ ; \quad f^n = f \cdot f \ldots f \ , \ (n \text{ veces}) , \ n \in \mathbb{N}$

$\text{Dom}(f^n) = (\text{Dom } f) \cap (\text{Dom } f) \cap \ldots \cap (\text{Dom } f) = \text{Dom } f$

El dominio de cualquier potencia entera positiva de f tiene el mismo dominio de la función f, $\quad f^2 = \{(x, f(x) \cdot f(x)) / \ x \in \text{Dom } f \}$

Asimismo, $Cf = \{(x, Cf(x)) / \ x \in \text{Dom } f \}$, para cualquier constante real C.

9.8 EJERCICIO .- Dadas las funciones $f(x) = 2\sqrt{x} \ , \ x \in [0, \infty)$, y $g = \{(-3,6),(-2,1),(0,2),(1,5),(2,3),(4,-2)\}$, halle las funciones $f + g$, $f - g$, fg, f^2 y $f^2 - 3g$.

SOLUCIÓN .- $\text{Dom } f^2 = \text{Dom } f = [0, \infty)$,

$\text{Dom } g = \{-3,-2,0,1,2,4\}$; $\text{Dom } f \cap \text{Dom } g = \{0,1,2,4\}$:

$f + g = \{(x, f(x) + g(x)) / \ x \in \text{Dom } f \cap \text{Dom } g = \{0,1,2,4\} \}$

$\{(0, 2\sqrt{0} + 2), (1, 2\sqrt{1} + 5), (2, 2\sqrt{2} + 3), (4, 2\sqrt{4} + (-2))\}$

a) $f + g = \{(0,2),(1,7),(2,2\sqrt{2} + 3),(4,2)\}$

b) $f - g = \{(0,-2),(1,-3),(2,2\sqrt{2} - 3),(4,6)\}$

c) $fg = \{(0,0),(1,10),(2,6\sqrt{2}),(4,-8)\}$

d) $f^2 = \{(x, 2\sqrt{x} \cdot 2\sqrt{x}) / \ x \in [0, \infty)\}$

$= \{(x, 4x) / \ x \in [0, \infty)\} \Rightarrow f^2(x) = 4x \ , \ \forall x \in [0, \infty) \quad (*)$

e) $3g = \{(x, 3g(x)) / \ x \in \text{Dom } g = \{-3,-2,0,1,2,4\}\}$

$= \{(-3,3(6)),(-2,3(1)),(0,3(2)),(1,3(5)),(2,3(3)),(4,3(-2))\}$

$= \{(-3,18),(-2,3),(0,6),(1,15),(2,9),(4,-6)\}$

f) $\text{Dom}(f^2 - 3g) = \text{Dom } f^2 \cap \text{Dom } g = \{0,1,2,4\}$

$f^2 - 3g = \{(x, f^2(x) - 3g(x)) / \ x \in \{0,1,2,4\}\}$

$= \{(x, 4x - 3g(x)) / \ x \in \{0,1,2,4\}\}$ ... ver $(*)$

$= \{(0, 4(0) - 6), (1, 4(1) - 15), (2, 4(2) - 9), (4, 4(4) + 6)\}$

$= \{(0,-6), (1,-11), (2,-1), (4,22)\}$

9.9 EJERCICIO .- Si $f(x) = 5x^2 - 2x \ , \quad x \in [-2, 8]$,

$g(x) = 3\sqrt{x} \ , \quad x \in [1, 10]$

$\Rightarrow \quad \text{Dom } f \cap \text{Dom } g = [1, 8] = \text{Dom}(f + g) = \text{Dom}(fg)$,

$(f + g)(x) = f(x) + g(x) = (5x^2 - 2x) + 3\sqrt{x} \ , \quad x \in [1, 8]$

$(fg)(x) = f(x)g(x) = (5x^2 - 2x)(3\sqrt{x}) = 15x^2\sqrt{x} - 6x\sqrt{x} \ , \quad x \in [1, 8]$

9.10 EJERCICIO .- Halle $f + g$, $f - g$, y fg, para

$$f(x) = \begin{cases} 3x + 1 \ , & x \in [-1, 1\rangle \\ 5x \ , & x \in \langle 1, 6] \end{cases} \ , \ g(x) = \begin{cases} 2\sqrt{x} - 1 \ , & x \in [0, 3\rangle \\ x - 2 \ , & x \in [3, 5] \cup [6, 8\rangle \end{cases}$$

SOLUCIÓN .- Cuando se trata de funciones que tienen varias reglas de correspondencia, ***se intersecta cada uno de los dominios parciales de una de las funciones con los de la otra función***, como sigue. Es aconsejable mantener la separación resultante de los intervalos para todas las operaciones

$\text{Dom } f \cap \text{Dom } g = ([-1, 1\rangle \cup \langle 1, 6]) \cap ([0, 3\rangle \cup [3, 5] \cup [6, 8\rangle)$

$= [0, 1\rangle \cup \langle 1, 3\rangle \cup [3, 5] \cup \{6\}$

$= \text{Dom}(f + g) = \text{Dom}(f - g) = \text{Dom}(fg)$

$$(f + g)(x) = \begin{cases} 3x + 1 + (2\sqrt{x} - 1) = 3x + 2\sqrt{x} & , \ x \in [0, 1\rangle \\ 5x + 2\sqrt{x} - 1 \quad = 5x + 2\sqrt{x} - 1 & , \ x \in \langle 1, 3\rangle \\ 5x + (x - 2) \quad = 6x - 2 & , \ x \in [3, 5] \cup \{6\} \end{cases}$$

$$(f - g)(x) = \begin{cases} 3x + 1 - (2\sqrt{x} - 1) = 3x - 2\sqrt{x} + 2 & , \ x \in [0, 1\rangle \\ 5x - (2\sqrt{x} - 1) \quad = 5x - 2\sqrt{x} + 1 & , \ x \in \langle 1, 3\rangle \\ 5x - (x - 2) \quad = 4x + 2 & , \ x \in [3, 5] \cup \{6\} \end{cases}$$

$$(fg)(x) = \begin{cases} (3x + 1)(2\sqrt{x} - 1) & , \ x \in [0, 1\rangle \\ 5x(2\sqrt{x} - 1) & , \ x \in \langle 1, 3\rangle \\ 5x(x - 2) & , \ x \in [3, 5] \cup \{6\} \end{cases}$$

9.11 EJERCICIO .- Halle y grafique la función $f + g$, para las funciones

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 2 & , \ -1 \le x < 0 \\ [\![2 + \operatorname{Cos} x]\!] & , \ x \ge 0 \end{cases} , \quad g(x) = \begin{cases} 3 - 2x & , \ x < 0 \\ \operatorname{Cos} x & , \ 0 \le x \le 3\pi/2 \end{cases}$$

SOLUCIÓN .- $[\![2 + \operatorname{Cos} x]\!] = 2 + [\![\operatorname{Cos} x]\!]$,

$\operatorname{Dom}(f + g) = ([-1, 0\rangle \cup [0, \infty\rangle) \cap (\langle -\infty, 0\rangle \cup [0, 3\pi/2]) =$

$\operatorname{Dom}(f + g) = [-1, 0\rangle \cup [0, 3\pi/2]$. Sabemos que,

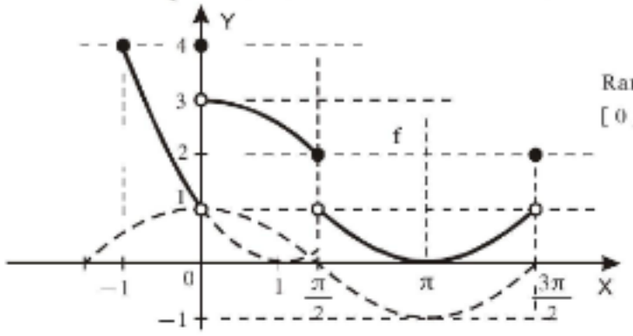
$$[\![\operatorname{Cos} x]\!] = \begin{cases} 1 & , \ x = 0 \\ 0 & , \ x \in \langle 0, \pi/2] \cup \{3\pi/2\} \\ -1 & , \ \pi/2 < x < 3\pi/2 \end{cases}$$

. . . . . .

$$(f + g)(x) = \begin{cases} x^2 - 2 + (3 - 2x) = (x - 1)^2 & , \ x \in [-1, 0\rangle \\ 2 + [\![\operatorname{Cos} x]\!] + \operatorname{Cos} x & , \ x \in [0, 3\pi/2] \end{cases}$$

. . . . . .

$$(f + g)(x) = \begin{cases} (x - 1)^2 & , \ x \in [-1, 0\rangle \\ 2 + (1) + \operatorname{Cos} x = 3 + \operatorname{Cos} x = 4 & , \ x = 0 \\ 2 + (0) + \operatorname{Cos} x = 2 + \operatorname{Cos} x & , \ x \in \langle 0, \pi/2] \cup \{3\pi/2\} \\ 2 + (-1) + \operatorname{Cos} = 1 + \operatorname{Cos} x & , \ x \in \langle \pi/2, 3\pi/2\rangle \end{cases}$$



Rang $(f + g) = [0, 1\rangle \cup \langle 1, 4]$

9.12 EJERCICIO .- Halle $f + g$, $f - g$ y fg para:

$$f(x) = \sqrt{1 - x^2} \quad , \quad g(x) = \sqrt{x^2 - 1} \ .$$

RESPUESTA: $f + g = \{(1, 0), (-1, 0)\} = f - g = fg$. ¿Por qué?

9.13 EJERCICIO .- Halle el rango y las gráficas de las funciones:

$$f(x) = \operatorname{Sgn}(x^2) - \operatorname{Sgn}(x - 1) \quad , \quad g(x) = \operatorname{Sgn}[\![x + 1]\!] \operatorname{Sgn}(|x| - 1) .$$

SOLUCIÓN .-

a) $$\operatorname{Sgn}(x^2) = \begin{cases} 1 & , \ x \neq 0 \\ 0 & , \ x = 0 \end{cases} , \quad \operatorname{Sgn}(x - 1) = \begin{cases} 1 & , \ x > 1 \\ 0 & , \ x = 1 \\ -1 & , \ x < 1 \end{cases}$$

entonces, $\forall\, x \in \langle -\infty, 0\rangle \cup \{0\} \cup \langle 0, 1\rangle \cup \{1\} \cup \langle 1, \infty\rangle$ se cumple que:

$$f(x) = \operatorname{Sgn}(x^2) - \operatorname{Sgn}(x - 1) = \begin{cases} 1 - (-1) = 2 & , \ x \in \langle -\infty, 0\rangle \\ 0 - (-1) = 1 & , \ x = 0 \\ 1 - (-1) = 2 & , \ x \in \langle 0, 1\rangle \\ 1 - 0 = 1 & , \ x = 1 \\ 1 - 1 = 0 & , \ x > 1 \end{cases}$$

b) Como

$$\operatorname{Sgn}[\![x + 1]\!] = \operatorname{Sgn}([\![x]\!] + 1) = \begin{cases} 1 & , \ x \in [0, \infty\rangle \\ 0 & , \ x \in [-1, 0\rangle \\ -1 & , \ x \in \langle -\infty, -1\rangle, \end{cases}$$

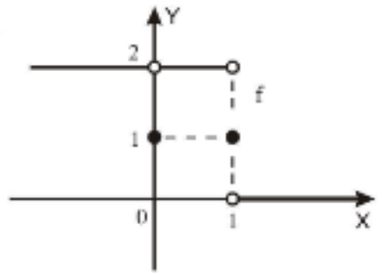
entonces

$$\operatorname{Sgn}(|x| - 1) = \begin{cases} 1 & , \ x \in \langle -\infty, -1\rangle \cup \langle 1, \infty\rangle \quad (\Leftrightarrow |x| > 1) \\ 0 & , \ x \in \{-1, 1\} \quad (\Leftrightarrow |x| = 1) \\ -1 & , \ x \in \langle -1, 1\rangle \quad (\Leftrightarrow |x| < 1) \end{cases}$$

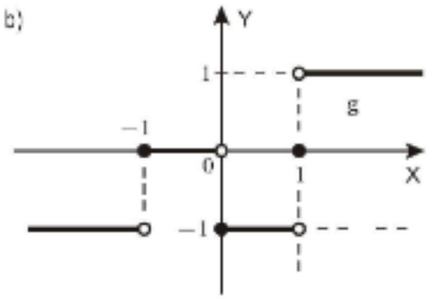
y siendo $g(x) = \operatorname{Sgn}[\![x + 1]\!] \operatorname{Sgn}(|x| - 1)$, tenemos que:

$$g(x) = \begin{cases} (1)(1) = 1 & , \ x \in \langle 1, \infty\rangle \\ (1)(0) = 0 & , \ x = 1 \\ (1)(-1) = -1 & , \ x \in [0, 1\rangle \\ (0)(-1) = 0 & , \ x \in \langle -1, 0\rangle \\ (0)(0) = 0 & , \ x = -1 \\ (-1)(1) = -1 & , \ x \in \langle -\infty, -1\rangle \end{cases}$$

a)



b)



9.14 EJERCICIO .- Halle el periodo mínimo de las funciones siguientes:

a) $f(x) = \operatorname{Cos} 3x + \operatorname{Sen} 4x$, b) $g(x) = \operatorname{Cos} 2x + \operatorname{Sen} 4x$

c) $h(x) = \operatorname{Cos}(x/3) + \operatorname{Sen}(5x)$.

SOLUCIÓN .-

a) $f(x + T) = \operatorname{Cos}(3x + 3T) + \operatorname{Sen}(4x + 4T) = \operatorname{Cos} 3x + \operatorname{Sen} 4x = f(x)$

$\Leftrightarrow \quad 3T = 2\pi k_1 \ \wedge \ 4T = 2\pi k_2$, para algún $k_1 , k_2 \in \mathbb{Z}^+$

$\Rightarrow \quad T = \frac{2}{3}\pi k_1 = \frac{2}{4}\pi k_2 \quad \Leftrightarrow \quad k_1 = \frac{3}{4}k_2 \in \mathbb{Z}^+$;

entonces eligiendo los menores enteros positivos con esta última condición:

$k_2 = 4$ y $k_1 = 3 \quad \Leftrightarrow \quad T_{min} = 2\pi$.

b) $g(x + T) = \mathrm{Cos}(2x + 2T) + \mathrm{Sen}(4x + 4T) = \mathrm{Cos}2x + \mathrm{Sen}4x = g(x)$

$\Leftrightarrow \quad 2T = 2\pi k_1 \ \wedge \ 4T = 2\pi k_2$, para algún $k_1 , k_2 \in \mathbb{Z}^+$

$\Rightarrow \quad T = \pi k_1 = \frac{1}{2}\pi k_2 \quad \Rightarrow \quad k_2 = 2k_1$; entonces eligiendo los menores enteros positivos con esta última condición: $k_1 = 1$, $k_2 = 2$, obtenemos el período mínimo de $g(x)$ como $T = \pi$.

c) Verifique que el período mínimo de $h(x)$ es $T = 6\pi$.

9.15 EJERCICIO .- Dadas las funciones f y g , halle $f + g$:

$$f(x) = \begin{cases} 4x + [\![x]\!] & , \ x \in \langle -3, 0 \rangle \\ \left| x^2 + 1 \right| - 3 & , \ x \in \langle 1, 6 \rangle \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} [\![-x]\!] - 5x & , \ x \in \langle -4, -1] \\ |x - 3| & , \ x \in \langle 0, 2] \end{cases}$$

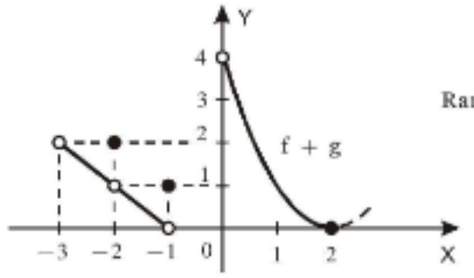
SOLUCIÓN .- $\mathrm{Dom}(f + g) = \langle -3, -1] \cup \langle 1, 2]$,

$$(f + g)(x) = \begin{cases} -x + [\![x]\!] + [\![-x]\!] & , \ x \in \langle -3, -1] \\ x^2 + 1 - 3x + |x - 3| & , \ x \in \langle 0, 2] \end{cases}$$

Puesto que $$[\![x]\!] + [\![-x]\!] = \begin{cases} -1 & , \ x \in \langle n , n + 1 \rangle , \ n \in \mathbb{Z} \\ 0 & , \ x = n \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

y como $|x - 3| = 3 - x$, para $x \in \langle 0, 2]$, entonces

$$(f + g)(x) = \begin{cases} -x - 1 & , \ x \in \langle -3, -2 \rangle \cup \langle -2, -1 \rangle \\ -x = -(-2) = 2 & , \ x = -2 \\ -x = -(-1) = 1 & , \ x = -1 \\ x^2 - 4x + 4 = (x - 2)^2 & , \ x \in \langle 0, 2] \end{cases}$$



$\mathrm{Rang}(f + g) = [0, 4)$

9.16 EJERCICIO .- Demuestre que $f(x) = \left| \mathrm{Sen}\frac{x}{2} \right| + \left| \mathrm{Cos}\frac{x}{2} \right|$ tiene período mínimo $T = \pi$.

9.17 COCIENTE DE FUNCIONES

Si f y g son funciones con dominios $\mathrm{Dom}\, f$ y $\mathrm{Dom}\, g$, se define la nueva función "COCIENTE" denotada por "f/g", tal que:

i) $\mathrm{Dom}(f/g) = \mathrm{Dom}\, f \cap \{ x \in \mathrm{Dom}\, g \ / \ g(x) \neq 0 \}$

$= (\mathrm{Dom}\, f \cap \mathrm{Dom}\, g) - \{ x \in \mathrm{Dom}\, g \ / \ g(x) = 0 \}$

$\wedge$ ii) $(f/g)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$, $\forall \ x \in \mathrm{Dom}(f/g)$

La condición (i) exige que el dominio de f/g ***no debe contener los valores de*** x ***que hagan que*** $g(x) = 0$. Es así, que:

$$f/g = \{ (x, \frac{f(x)}{g(x)}) \ / \ x \in \mathrm{Dom}(f/g) \}.$$

9.18 EJEMPLO .- Hallaremos la función COCIENTE f/g , para

$f = \{(1,4),(2,5),(3,6),(4,-6),(5,-5)\}$

$g = \{(0,8),(1,3),(2,0),(3,7),(4,0),(5,10)\}$:

Sea $\{ x \in \mathrm{Dom}\, g \ / \ g(x) = 0 \} = \{2,4\}$ pues $g(2) = 0 = g(4)$,

$\mathrm{Dom}\, f = \{1,2,3,4,5\}$, $\mathrm{Dom}\, g = \{0,1,2,3,4,5\} \ \Rightarrow$

$\mathrm{Dom}(f/g) = (\mathrm{Dom}\, f \cap \mathrm{Dom}\, g) - \{ x \in \mathrm{Dom}\, g \ / \ g(x) = 0 \}$

$= \{1,2,3,4,5\} - \{2,4\} = \{1,3,5\}$,

por lo tanto, $f/g = \{ (x, \frac{f(x)}{g(x)}) \ / \ x \in \mathrm{Dom}(f/g) = \{1,3,5\} \}$

$= \{ (1, \frac{f(1)}{g(1)}) , (3, \frac{f(3)}{g(3)}) , (5, \frac{f(5)}{g(5)}) \}$

$= \{ (1, 4/3), (3, 6/7), (5, -1/2) \}.$

9.19 EJERCICIO .- Si $f(x) = \sqrt{x - 1}$, $g(x) = \left[\!\left[x^2 - 4 \right]\!\right]$, halle la función cociente f/g .

SOLUCIÓN .- $\left[\!\left[x^2 - 4 \right]\!\right] = \left[\!\left[x^2 \right]\!\right] - 4 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left[\!\left[x^2 \right]\!\right] = 4$

$\Leftrightarrow \quad 4 \leq x^2 < 5 \quad \Leftrightarrow \quad x \in \langle -\sqrt{5}, -2] \cup [2, \sqrt{5} \rangle \qquad (*)$

$\mathrm{Dom}\, g = \mathbb{R}$, $\mathrm{Dom}\, f = [1, \infty \rangle$.

De $(*)$: $\{x \in \text{Dom } g \ / \ g(x) = 0\} = \langle -\sqrt{5}, -2] \cup [2, \sqrt{5}\rangle$

$$\text{Dom}(f/g) = (\text{Dom } f \cap \text{Dom } g) - \{x \in \text{Dom } g \ / \ g(x) = 0\}$$
$$= ([1, \infty\rangle \cap \mathbb{R}) - (\langle -\sqrt{5}, -2] \cup [2, \sqrt{5}\rangle) = [1, 2\rangle \cup [\sqrt{5}, \infty\rangle$$

luego,

$$(f/g)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\sqrt{x-1}}{[\![x^2 - 4]\!]}, \quad \forall\ x \in [1, 2\rangle \cup [\sqrt{5}, \infty\rangle.$$

9.20 EJERCICIO .- Halle f/g , para

$$f(x) = \begin{cases} |x|, & x \in [-5, -1] \\ 2x, & x \in [1, 4] \end{cases}, \qquad g(x) = \begin{cases} [\![x-2]\!], & x \in [0, 3\rangle \\ x^2, & x \in [3, 6] \end{cases}$$

SOLUCIÓN .- Cálculo del conjunto $\{x \in \text{Dom } g \ / \ g(x) = 0\}$:

a) $[\![x-2]\!] = 0 \iff 0 \le x - 2 < 1 \ \wedge \ x \in [0, 3\rangle \iff$
$2 \le x < 3 \ \wedge \ x \in [0, 3\rangle \iff x \in [2, 3\rangle$

b) $x^2 = 0 \iff x = 0 \ \wedge \ x \in [3, 6]$ ... (FALSO, $\varnothing$).

Luego, de (a) y (b): $\{x \in \text{Dom } g \ / \ g(x) = 0\} = [2, 3\rangle \cup \varnothing = [2, 3\rangle$

$$\text{Dom}(f/g) = (\text{Dom } f \cap \text{Dom } g) - \{x \in \text{Dom } g \ / \ g(x) = 0\}$$
$$= \{([-5, -1] \cup [1, 4]) \cap ([0, 3\rangle \cup [3, 6])\} - [2, 3\rangle$$
$$= ([1, 3\rangle \cup [3, 4]) - [2, 3\rangle = [1, 2\rangle \cup [3, 4].$$ Por lo tanto,

$$(f/g)(x) = \begin{cases} \dfrac{2x}{[\![x]\!] - 2} = \dfrac{2x}{(-1)} = -2x, & x \in [1, 2\rangle \\ \dfrac{2x}{x^2} = \dfrac{2}{x}, & x \in [3, 4] \end{cases}$$

9.21 DEFINICIÓN .- Se llama ***FUNCIÓN RACIONAL*** a toda función que es el Cociente de dos polinomios. Por ejemplo,

$f(x) = \dfrac{x^2 + 3x - 12}{x^2 - 3x + 2}$ es una función racional cuyo dominio es el conjunto de los x tales que el denominador no se anule:

$$\text{Dom } f = \{x \in \mathbb{R} \ / \ (x^2 - 3x + 2) = (x-2)(x-1) \neq 0\} = \mathbb{R} - \{1, 2\}.$$

9.22 IGUALDAD DE POLINOMIOS

Dos polinomios f y g son ***IGUALES*** si los coeficientes de los términos del mismo grado son iguales. Por ejemplo, si son iguales

$$P(x) = a_3x^3 + 5x^2 - 2x + a_0, \quad Q(x) = b_2x^2 + b_1x - 7, \quad \boxed{\forall\ x \in \mathbb{R}},$$

entonces : $a_3 = 0$, $b_2 = 5$, $b_1 = -2$, $a_0 = -7$.

Por lo tanto $P(x) = 5x^2 - 2x - 7 = Q(x)$, $\forall\ x \in \mathbb{R}$.

9.23 EJERCICIO .- Halle todos los valores de k tales que se cumpla:

$$-3 < \frac{x^2 + 1 - kx}{x^2 + x + 1} < 3 \quad \textbf{PARA TODO } \underline{x \in \mathbb{R}} \quad (*)$$

SOLUCIÓN .- El denominador de esta función racional nunca se hace CERO en $\mathbb{R}$, pues su DISCRIMINANTE es NEGATIVO: $\Delta = b^2 - 4ac = (1)^2 - 4(1)(1) = -3$

De esto resulta que $x^2 + x + 1 > 0$ **PARA TODO** x **REAL**. Entonces

$(*) \iff -3(x^2 + x + 1) < (x^2 + 1 - kx) < 3(x^2 + x + 1)$,

$$\iff \wedge \begin{cases} 4x^2 + (3 - k)x + 4 > 0, & \forall\ x \in \mathbb{R} \\ 2x^2 + (k + 3)x + 2 > 0, & \forall\ x \in \mathbb{R} \end{cases} \quad \ldots(\alpha)$$

Este sistema de inecuaciones simultáneas se resuelven cada una haciendo sus DISCRIMINANTES $\Delta < 0$, pues no deben tener raíces reales ninguno de los polinomios cuadráticos de los primeros miembros de (α) :

$$(k + 3)^2 - 16 < 0 \ \wedge \ (k - 3)^2 - 64 < 0$$
$$\iff k + 3 \in \langle -4, 4\rangle \ \wedge \ k - 3 \in \langle -8, 8\rangle$$
$$\iff k \in \langle -7, 1\rangle \cap \langle -5, 11\rangle = \langle -5, 1\rangle .$$

SERIE DE EJERCICIOS

1. Si $f = \{(1,4), (4,5), (2,3), (3,2)\}$, $g = \{(0,2), (1,2), (2,-1), (3,0), (5,2)\}$, halle $f^2 - 2g$.

2. Halle la gráfica y el rango de las siguientes funciones:
   a) $f(x) = \text{Sgn}(x - 3) - 3\,\text{Sgn}\,x$
   b) $f(x) = \text{Sgn}([\![x + 3]\!] - 2)$
   c) $f(x) = \text{Sgn}(x + 1) \cdot u(x - 1)$ [u : Escalón Unitario]
   d) $f(x) = \text{Sgn}(x + 1) - \text{Sgn}(x - 1)$.

3. Grafique las funciones:
   a) $f(x) = x^2u(x - 1) + 2x\,\text{Sgn}(1 - x)$ [u : Escalón Unitario]
   b) $g(x) = x\,u([\![x + 3]\!]) - x\,\text{Sgn}(|x| - 1)$.

4. Sean $h(x) = u(x + \pi) - u(x - \pi)$, $g(x) = \text{Sen}\,x$, determine $f(x) = h(x)\,g(x)$. Graficarla.

5. Demuestre que cualquier función f cuyo dominio es $[-L, L]$ puede ser expre-

sada como la suma de dos funciones $g(x)$ y $h(x)$, donde g es par y h es impar: $f(x) = g(x) + h(x)$.

SUG: $g(x) = [\, f(x) + f(-x)\,]/2$, $h(x) = [\, f(x) - f(-x)\,]/2$.

6. Si $f(x) = x^2 + x + 1$, $g(x) = f(x) + f(-x)$, $h(x) = f(x) - f(-x)$. ¿Cuál de f, g ó h es par ó impar?

7. Si $g(x) = \begin{cases} 0 , & 0 < x < \pi \\ 1 , & x \geq \pi \end{cases}$

Halle el dominio, rango y gráfica de $f(x) = g(x)\,|\operatorname{Sen} x\,|$.

8. Demostrar que
   a) Si f y g son pares entonces $f + g$ y fg son pares.
   b) Si f y g son impares entonces fg es par.

9. Halle la gráfica de $f(x) = |\operatorname{Sen} x| + |\operatorname{Cos} x|$ e indique su período mínimo T.

10. Si $f(x) = |x|$, $g(x) = x \operatorname{Sgn} x$, $\operatorname{Dom} f = \operatorname{Dom} g = \mathbb{R}$, demuestre que $f = g$.

11. ¿Es verdadera la siguiente proposición? :

$f(x) = \sqrt{x-2} \;\wedge\; g(x) = \sqrt{x+2} \;\Rightarrow\; (fg)(x) = \sqrt{x^2-4}$, para todo $x \in \mathbb{R} - \langle -2, 2\rangle$.

12. Si $f(x) = \begin{cases} [\![x-1]\!] , & x \in \langle -4, -1\,] \\ [\![x]\!] + 1 , & x \in [\,0, 2\,] \\ |x-2| + 3 , & x \in \langle -1, 0\rangle \cup \langle 2, 3\,] \end{cases}$

$g(x) = \begin{cases} 5 , & x \in \langle -3, -1\rangle \\ -2 , & x \in [\,0, 2\rangle \\ -3 , & x \in [\,-1, 0\rangle \cup [\,2, 3\rangle \end{cases}$

Halle y grafique $f + g$.

13. Halle la gráfica de $f(x) = \sqrt{4 - x^2} \cdot \operatorname{Sgn}\left(\frac{x}{x^2-1}\right) + \left[\!\left[\frac{2x+6}{x+4}\right]\!\right] - 1$.

14. Halle la gráfica de $f + g$, si

$f(x) = \begin{cases} \operatorname{Sgn}|x^2 - 4| , & \text{si} \quad x^2 \leq 9 \\ [\![\,(x+6)/3\,]\!] , & \text{si} \quad x^2 - 12x < -27 \\ x^2 + 10x + 21 , & \text{si} \quad |x-3| > 6 \end{cases}$

$g(x) = 3$, $x \in \mathbb{R} - [\,9, \infty\rangle$.

15. Halle $f + g$, su gráfica y rango, donde

$f(x) = \begin{cases} [\![x^2]\!] + |x^2 - 1| - 3 , & x \in [\,-2, 2\,] \\ \dfrac{2x-1}{x-1} , & x \in \langle 2, 4\rangle \end{cases}$

$g(x) = \begin{cases} 4 - [\![x^2]\!] , & x < 2 \\ -2 , & x \geq 2 \end{cases}$

16. Sean $f(x) = |x-2| + |x+2|$, $g(x) = \begin{cases} 3x+2 , & x < 0 \\ 1 - x , & x \geq 0 \end{cases}$

$H(x) = f(x) + g(x)$, $\operatorname{Dom} H = [\,-2, 3\rangle$. Halle la gráfica y el rango de H.

17. Halle f/g, así como su rango, para

$f(x) = 2 \operatorname{Sgn}[\,\frac{1}{2}(x-2)^2 + 1\,]$, $x \in \mathbb{R}$

$g(x) = [\![\,(3x-1)/2\,]\!]$, $x \in \langle -1, 2\,]$.

18. Sean $f(x) = \sqrt{x^2 - 4}$, $g(x) = \sqrt{x+2}$, halle el dominio y la regla de correspondencia de la función $h(x) = f(x+2)/[\,2g(x) - f(x)\,]$.

19. Dadas las funciones $f(x) = \sqrt{(6-x)/(x+4)}$, $g(x) = [\![\sqrt{x} - 1]\!]$, $x \in \operatorname{Dom} g = [\,0, 9\rangle$, halle f/g.

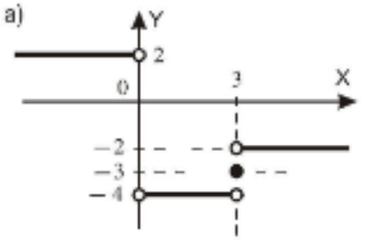
20. Dadas $f(x) = \sqrt{[\![2x]\!] + 5}$, $g(x) = \left|\sqrt{x+3} - 1\right|$, halle $\operatorname{Dom}(g/f)$ y $\operatorname{Dom}(f/g)$.

21. Halle el Dominio de la función $g(x) = \sqrt{[\![x]\!]^2 - [\![x]\!]}\;/\,([\![x]\!] - \frac{1}{2})$.

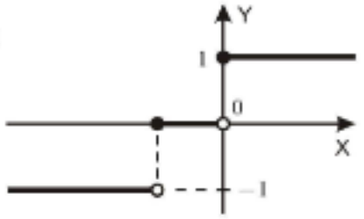
CLAVE DE RESPUESTAS

1. $f^2 - 2g = \{(1,12), (2,13), (3,4)\}$.

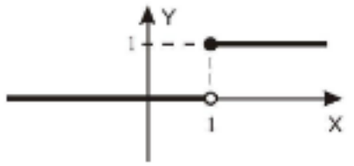
2. a)



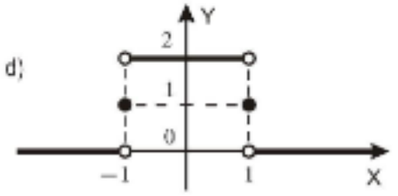
b)



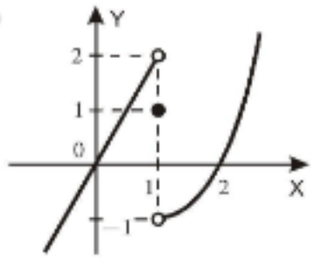
c)



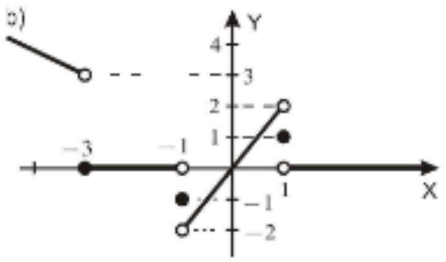
d)



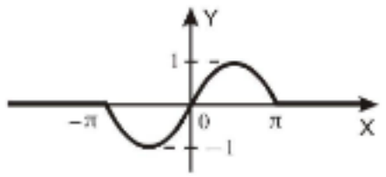
3. a)



b)

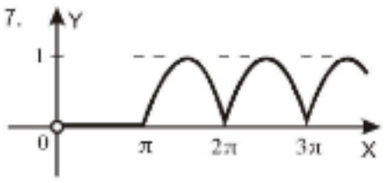


4.

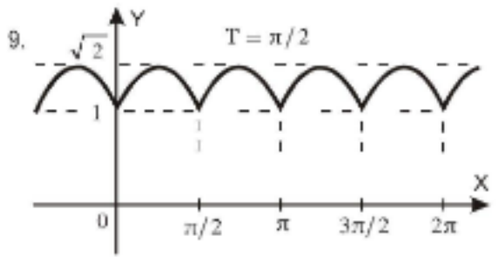


6. g es par; h es impar.

7.



9.

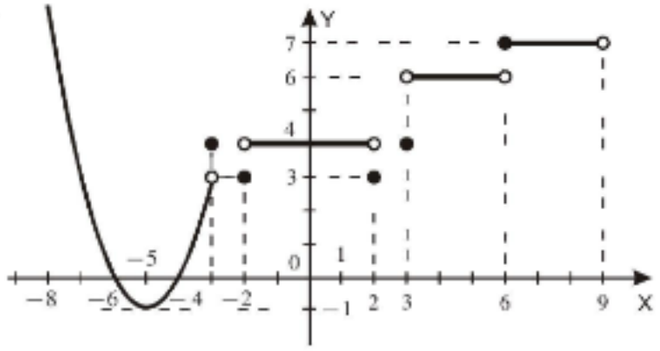


11. FALSO, pues $\mathrm{Dom}(f \cdot g) = \mathrm{Dom}\, f \cap \mathrm{Dom}\, g = [2, \infty\rangle$.

13. $$f(x) = \begin{cases} \sqrt{4 - x^2} & , \quad x \in \langle -1, 0\rangle \cup \langle 1, 2\rangle \\ 0 & , \quad x \in \{-2, 0, 2\} \\ -\sqrt{4 - x^2} & , \quad x \in \langle -2, -1\rangle \cup \langle 0, 1\rangle \end{cases},$$

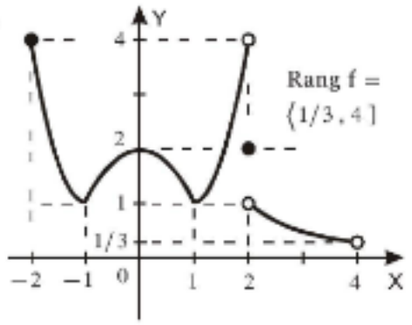
cuya gráfica consiste de dos arcos de la circunferencia $x^2 + y^2 = 4$, más el centro. Graficarla.

14.

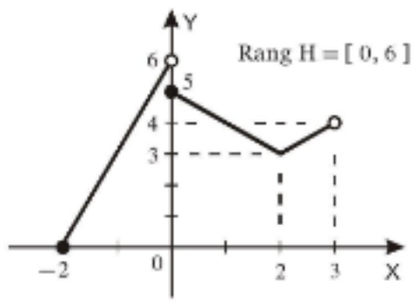


Rang (f + g) = $[-1, \infty\rangle$

15.



Rang f = $\langle 1/3, 4]$



Rang H = [0, 6]

17. $$(f/g)(x) = \begin{cases} -1 & , \quad x \in \langle -1, -1/3\rangle \\ -2 & , \quad x \in [-1/3, 1/3\rangle \\ 2 & , \quad x \in [1, 5/3\rangle \\ 1 & , \quad x \in [5/3, 2\rangle \end{cases}$$

$\cdot$ Dom (f/g) = $\langle -1, 1/3\rangle \cup [1, 2\rangle$

$\cdot$ Rang (f/g) = $\{\pm 1, \pm 2\}$

18. Ver el Problema [28] de la Serie de Ej. Prop. de la Sección [10] siguiente.

19. $\mathrm{Dom}\, f = \langle -4, 6]$, $\mathrm{Dom}(f/g) = [0, 1\rangle \cup [4, 6]$.

20. $\mathrm{Dom}(g/f) = [-2, \infty\rangle$; $\mathrm{Dom}(f/g) = [-5/2, -2\rangle \cup \langle -2, \infty\rangle$.

21. $\mathrm{Dom}\, g = \mathbb{R}$. Note que $[\![x]\!] \neq 1/2$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$. En efecto,

$$[\![x]\!]^2 - [\![x]\!] \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad [\![x]\!]([\![x]\!] - 1) \geq 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$[\![x]\!] \leq 0 \quad \vee \quad [\![x]\!] \geq 1 \quad \Leftrightarrow \quad x < 1 \quad \vee \quad x \geq 1.$$

Luego, $\mathrm{Dom}\, g = \mathbb{R}$.

10. COMPOSICIÓN DE FUNCIONES

Dada una función f como $f(x) = 1 + \sqrt{x}$, $x \in [0, \infty\rangle = \mathrm{Dom}\, f$, sabemos que también podemos representarla como

$$f(u) = 1 + \sqrt{u}\ , \qquad u \in [0, \infty\rangle = \mathrm{Dom}\, f \qquad (*)$$

Consideremos ahora dos funciones f y g, como por ejemplo

$$f(x) = 1 + \sqrt{x}\ , \quad x \in [0, \infty\} = \mathrm{Dom}\, f \quad \ldots (a)$$

$$g(x) = x - 6\ , \quad x \in [2, 15] = \mathrm{Dom}\, g \quad \ldots (b)$$

y si en la forma (*) para f, reemplazáramos en particular

$$u = g(x) = x - 6$$

obtenemos la expresión

$$f(g(x)) = 1 + \sqrt{g(x)} = 1 + \sqrt{x - 6} \qquad (**)$$

que representa una nueva operación entre dos funciones f y g denominada

"f ***COMPUESTA CON*** g" o también "***COMPOSICIÓN DE*** f ***POR*** g", y se denota "f o g", cuya regla de correspondencia es, precisamente,

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = 1 + \sqrt{g(x)} = 1 + \sqrt{x-6} \qquad \ldots (**)'$$

donde la variable x es tomada como $x \in \text{Dom } g$, pero donde ***no todos los*** $x \in \text{Dom } g$ ***son necesariamente elementos del Dominio de la nueva función*** $f \circ g$. Como podemos ver en $(**)'$: $x = 2 \in \text{Dom } g$, sin embargo $x = 2 \notin \text{Dom}(f \circ g)$, pues en caso contrario ocurriria que

$$(f \circ g)(2) = f(g(2)) = 1 + \sqrt{g(2)}$$
$$= 1 + \sqrt{2-6} = 1 + \sqrt{-4}\ , \quad \text{lo cual no está definido.}$$

Debido a la regla de correspondencia de $f \circ g$: $(f \circ g)(x) = f(g(x))$, los x que pertenecen al Dominio de $f \circ g$ son aquellos $x \in \text{Dom } g$ que cumplan que $g(x) \in \text{Dom } f$; es decir

$$\text{Dom}(f \circ g) = \{x \in \text{Dom } g \ / \ g(x) \in \text{Dom } f\}$$
$$= \{x \in [2, 15] \ / \ x - 6 \in [0, \infty\rangle\ \}$$
$$= \{x \in [2, 15] \ / \ x \in [6, \infty\rangle\ \}$$
$$= [2, 15] \cap [6, \infty\rangle = [6, 15]$$

Y por lo tanto, tenemos la función compuesta

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = 1 + \sqrt{g(x)} = 1 + \sqrt{x-6}\ , \quad \forall\, x \in [6, 15]$$

En general, se tiene que $\text{Dom}(f \circ g) \subset \text{Dom } g$.

10.1 EJERCICIO .- Dadas las funciones

$$f = \{(2,9), (3,6), (0,5), (1,2)\},$$
$$g = \{(7,-1), (1,2), (4,3)\},$$

halle la función compuesta $f \circ g$.

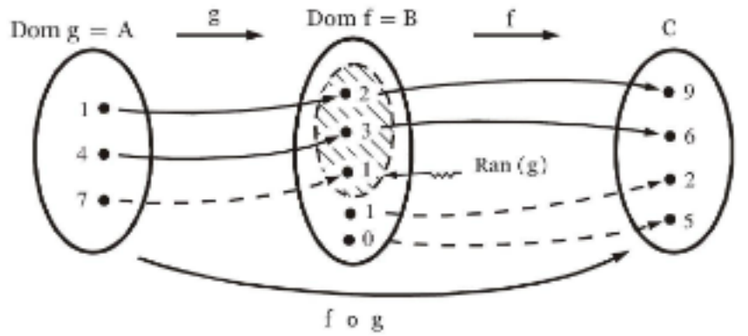
SOLUCIÓN .- $\text{Dom } f = \{2, 3, 0, 1\}$, $\text{Dom } g = \{1, 4, 7\}$ donde $g(1) = 2$, $g(4) = 3$, $g(7) = -1$, queremos evaluar

$(f \circ g)(x) = f(g(x))$ para aquellos valores $x \in \text{Dom } g = \{1, 4, 7\}$ donde esto sea posible:

$(f \circ g)(1) = f(g(1)) = f(2) = 9 \quad \Rightarrow \quad (f \circ g)(1) = 9$

$(f \circ g)(4) = f(g(4)) = f(3) = 6 \quad \Rightarrow \quad (f \circ g)(4) = 6$

$(f \circ g)(7) = f(g(7)) = f(-1)$ que no está definido, pues $-1 \notin \text{Dom } f$.



Por lo tanto $\text{Dom}(f \circ g) = \{1, 4\}$ y $f \circ g = \{(1,9), (4,6)\}$.

Note que la nueva función $f \circ g$ existirá siempre que $\text{Rang}(g) \cap \text{Dom } f \neq \varnothing$.

10.2 DEFINICIÓN FORMAL DE $f \circ g$

La función compuesta $f \circ g$ es aquella función tal que:

i) $\text{Dom}(f \circ g) = \{x \in \text{Dom } g \ / \ g(x) \in \text{Dom } f\}$
$= \text{Dom } g \cap \{x \ / \ g(x) \in \text{Dom } f\}$

$\wedge$ ii) $(f \circ g)(x) = f(g(x))$ es su regla de correspondencia.

Así, $f \circ g = \{(x, f(g(x))) / \ x \in \text{Dom}(f \circ g)\}$.

10.3 EJERCICIO .- Halle $(f \circ g)$ y $(g \circ f)$ para

$f = \{(x, \sqrt{x-1}\ ) \ / \ x \in [1, \infty\rangle\}$
$g = \{(2,-5), (0,1), (-4,6), (8,-3), (-7,10)\}$

SOLUCIÓN .- i) $f \circ g$: donde $f(x) = \sqrt{x-1}$, $x \in [1, \infty\rangle$.

Como $\text{Dom } g = \{0, 2, -4, 8, -7\}$ es finito, los x válidos para $\text{Dom}(f \circ g)$ son aquellas primeras componentes de los pares ordenados de de la función g cuyas segundas componentes se encuentren en el $\text{Dom } f = [1, \infty\rangle$; es decir, que no son < 1,

$$\text{Dom}(f \circ g) = \{0, -4, -7\}$$

$$f \circ g = \{(0, f(g(0))), (-4, f(g(-4))), (-7, f(g(-7)))\}$$
$$= \{(0, f(1)), (-4, f(6)), (-7, f(10))\}$$
$$= \{(0, \sqrt{(1)-1}\ ), (-4, \sqrt{(6)-1}\ ), (-7, \sqrt{(10)-1}\ )\}$$
$$= \{(0, 0), (-4, \sqrt{5}\ ), (-7, 3)\}$$

ii) $g \circ f$: $\text{Dom } g \circ f = \{x \in \text{Dom } f \ / \ f(x) \in \text{Dom } g\}$
$= \{x \in [1, \infty\rangle \ / \ \sqrt{x-1} \in \{2, 0, -4, 8, -7\}\}$

$\sqrt{x-1} = 0 \Rightarrow x = 1$; $\sqrt{x-1} = -4 \Rightarrow$ no hay tal x ;

$\sqrt{x-1} = 2 \Rightarrow x = 5$; $\sqrt{x-1} = -7 \Rightarrow$ no hay tal x ;

$\sqrt{x-1} = 8 \Rightarrow x = 65$;

luego, $\text{Dom}(g \circ f) = [1,\infty\rangle \cap \{1,5,65\} = \{1,5,65\}$

$$\begin{aligned} g \circ f &= \{(x, g(f(x))) \ / \ x \in \text{Dom}(g \circ f) = \{1,5,65\}\} \\ &= \{(1, g(f(1))), (5, g(f(5))), (65, g(f(65)))\} \\ &= \{(1, g(0)), (5, g(2)), (65, g(8))\} \\ &= \{(1,1), (5,-5), (65,-3)\} \end{aligned}$$

Observamos que: $f \circ g \neq g \circ f$.

10.4 EJERCICIO .- Dadas las funciones $g = \{(1,0),(3,3),(-1,4),(2,1)\}$, $h = \{(-1,-6),(2,-2),(3,9)\}$, halle una función f tal que $f \circ g = h$. ¿Cuáles son verdaderas? :

A) $f = \{(1,2),(3,9),(4,-6)\}$

B) $f = \{(1,-2),(3,9),(4,-6),(12,7)\}$

C) $f = \{(4,-6),(3,9),(1,-2)\}$. RPTA: (B) y (C).

SOLUCIÓN .- $\text{Dom}\, h = \{-1,2,3\}$; y como debe ser:

$$f \circ g = h \quad \Leftrightarrow \quad f(g(x)) = h(x), \ \forall \ x \in \text{Dom}\, h = \{-1,2,3\} ,$$

$$\begin{aligned} f(g(-1)) = h(-1) &\Rightarrow f(4) = -6 \Rightarrow (4,-6) \in f \\ f(g(2)) = h(2) &\Rightarrow f(1) = -2 \Rightarrow (1,-2) \in f \\ f(g(3)) = h(3) &\Rightarrow f(3) = 9 \Rightarrow (3,9) \in f \end{aligned}$$

Así, la alternativa (C) es correcta. Sin embargo, la función f de la alternativa (B) también es correcta. (Verifique que en este caso: $f \circ g = h$ también. ¿Por qué?) .

10.5 EJERCICIO .- Sea $f(x) = -3x^2 + 5x - 8$. Si $h \neq 0$, evalúe:

$$A = \frac{1}{h}[f(2+h) - f(2)] .$$

SOLUCIÓN .- $f(2) = -3(2)^2 + 5(2) - 8 = -10$,

$$f(2+h) = -3(2+h)^2 + 5(2+h) - 8 = -3h^2 - 7h - 10$$

$$A = \frac{1}{h}[f(2+h) - f(2)] = \frac{1}{h}[(-3h^2 - 7h - 10) - (-10)]$$

$$= \frac{1}{h}[-3h^2 - 7h] = -3h - 7 .$$

10.6 EJERCICIO .- Si $f(x) = x^2 + 2x + 2$, halle $g(x)$ tal que

$$f(g(x)) = x^2 - 4x + 5 .$$

SOLUCIÓN .- De la definición de f :

$f(g(x)) = [g(x)]^2 + 2g(x) + 2 = x^2 - 4x + 5$ .. (dato)

$\Rightarrow [g(x)+1]^2 + 1 = (x-2)^2 + 1 \Rightarrow g(x) + 1 = \pm(x-2)$

$\Rightarrow$ Dos soluciones: a) $g(x) = x - 3$, b) $g(x) = -x + 1$.

10.7 EJERCICIO .- Si $f(x) = x^2$, $x < 0$, halle $g(x)$ tal que

$$(f \circ g)(x) = 4x^2 - 12x + 9 .$$

SOLUCIÓN .- $f(u) = u^2$, $u < 0$, $\Rightarrow$ haciendo $u = g(x)$:

$$f(g(x)) = [g(x)]^2 , \quad u = g(x) < 0 \qquad .. \ (*)$$

De $(f \circ g)(x) = 4x^2 - 12x + 9 \Rightarrow f(g(x)) = (2x-3)^2$

$\Rightarrow [g(x)]^2 = (2x-3)^2 \Rightarrow |g(x)| = |2x-3|$

$\Rightarrow -g(x) = |2x-3|$ (por (*)), $\Rightarrow g(x) = -|2x-3|$.

10.8 EJERCICIO .- Si $f(x-1) = (x-2)^3 + 7(x-2)^2 + 17(x-2) + 15$. Halle $f(x)$.

SOLUCIÓN .- Factorizando por la regla de Ruffini, haciendo $x - 1 = u$,

$\Rightarrow (x-2) = (u-1)$:

$f(x-1) = [(x-2)+3][(x-2)^2 + 4(x-2) + 5] \Rightarrow$

$f(u) = [(u-1)+3][(u-1)^2 + 4(u-1) + 5] = (u+2)(u^2 + 2u + 2)$

$\Rightarrow f(x) = (x+2)(x^2 + 2x + 2)$, (regresando al símbolo x) .

10.9 EJERCICIO .- Si $(g \circ f)(x) = x + 2$, halle $g(x)$ tal que

$$f(x) = x^3 + 6x^2 + 12x + 8 .$$

SOLUCIÓN .- Como $f(x) = (x+2)^3$ y $g(f(x)) = x + 2$, entonces

$$x + 2 = \sqrt[3]{f(x)} , \quad g(f(x)) = x + 2 = \sqrt[3]{f(x)}$$

$\Rightarrow$ haciendo $u = f(x) \Rightarrow g(u) = \sqrt[3]{u}$,

$\Rightarrow g(x) = \sqrt[3]{x}$, (regresando al símbolo x).

10.10 EJERCICIO .- Si $f(x-2) = x^2 - x + 1$, $g(x-a) = x$, halle el valor de a de modo que $(f \circ g)(2) = (g \circ f)(a-2)$.

SOLUCIÓN .- Se verifica que $f(x) = x^2 + 3x + 3$, $g(x) = x + a$;

$$f(g(2)) = f(a+2) = (a+2)^2 + 3(a+2) + 3 = a^2 + 7a + 13$$

$$g(f(a-2)) = f(a-2) + a = a^2 - a + 1 + a = a^2 + 1$$

Y de la condición: $a^2 + 7a + 13 = a^2 + 1$ se concluye que $a = -12/7$.

$(x-2)^2 = 4 \quad \Leftrightarrow \quad x-2 = \pm 2 \quad \Leftrightarrow \quad x = 4\ ,\ x = 0$

$(x-2)^2 = 9 \quad \Leftrightarrow \quad x-2 = \pm 3 \quad \Leftrightarrow \quad x = 5\ ,\ x = -1$

$\Rightarrow \quad \mathrm{Dom}\,(g \circ f) = \{1, 3, 4, 0, 5, -1\}$

$$\begin{aligned} g \circ f &= \{\,(1, g(f(1))), (3, g(f(3))), (4, g(f(4))), (0, g(f(0))), (5, g(f(5))), \\ &\qquad (-1, g(f(-1)))\,\} \\ &= \{\,(1, g(1)), (3, g(1)), (4, g(4)), (0, g(4)), (5, g(9)), (-1, g(9))\,\} \\ &= \{(1,2), (3,2), (4,1), (0,1), (5,3), (-1,3)\}\ . \end{aligned}$$

10.16 EJERCICIO .- Encuentre $f \circ g$, si

$$f(x) = \begin{cases} 4x-6\ , & x \in [0,\ 2] \\ -x+2\ , & x \in \langle 2,\ 6]\ , \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} x^2\ , & x \in [1,\ 4] \\ 5\ , & x \in \langle 4,\ 8]\ . \end{cases}$$

SOLUCIÓN .- Como se puede denotar:

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x) = 4x-6\ , & x \in [0,\ 2] = \mathrm{Dom}\, f_1 \quad \ldots \quad (f_1) \\ f_2(x) = -x+2\ , & x \in \langle 2,\ 6] = \mathrm{Dom}\, f_2 \quad \ldots \quad (f_2) \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} g_1(x) = x^2\ , & x \in [1,\ 4] = \mathrm{Dom}\, g_1 \quad \ldots \quad (g_1) \\ g_2(x) = 5\ , & x \in \langle 4,\ 8] = \mathrm{Dom}\, g_2 \quad \ldots \quad (g_2) \end{cases}$$

Extendiendo la propiedad del Ejercicio [10.12] y la NOTA [10.13] :

i) $\mathrm{Dom}\,(f_1 \circ g_1) = \{x \in \mathrm{Dom}\, g_1 \ /\ g_1(x) \in \mathrm{Dom}\, f_1\}$

$= \{x \in [1,4] \ /\ x^2 \in [0,2]\}$

$= \{x \in [1,4] \ /\ x \in [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]\} = [1,4] \cap [-\sqrt{2}, \sqrt{2}] = \boxed{[1, \sqrt{2}]}$

ii) $\mathrm{Dom}\,(f_2 \circ g_1) = \{x \in \mathrm{Dom}\, g_1 \ /\ g_1(x) \in \mathrm{Dom}\, f_2\}$

$= \{x \in [1,4] \ /\ x^2 \in \langle 2,6]\}$

$= [1,4] \cap ([-\sqrt{6}, -\sqrt{2}\,\rangle \cup \langle \sqrt{2}, \sqrt{6}\,]) = \boxed{\langle \sqrt{2}, \sqrt{6}\,]}$

iii) $\mathrm{Dom}\,(f_1 \circ g_2) = \{x \in \mathrm{Dom}\, g_2 \ /\ g_2(x) = 5 \in \mathrm{Dom}\, f_1\}$

$= \{x \in \langle 4,8] \ /\ 5 \in [0,2]\}$

$= \{x \in \langle 4,8] \ /\ \underline{\mathrm{F}\,(FALSO)}\} = \varnothing = \boxed{\varnothing}$

iv) $\mathrm{Dom}\,(f_2 \circ g_2) = \{x \in \mathrm{Dom}\, g_2 \ /\ g_2(x) = 5 \in \mathrm{Dom}\, f_2\}$

$= \{x \in \langle 4,8] \ /\ 5 \in \langle 2,6]\}$

$= \{x \in \langle 4,8] \ /\ \underline{\mathrm{V}\,(VERDADERO)}\} = \boxed{\langle 4,8]}$

$\Rightarrow \quad \mathrm{Dom}\,(f \circ g) = [1, \sqrt{2}\,] \cup \langle \sqrt{2}, \sqrt{6}\,] \cup \langle 4, 8]\ ,$

y manteniendo esta separación para las correspondientes funciones parciales,

$$(f \circ g)(x) = \begin{cases} f_1(g_1(x)) = f_1(x^2) = 4x^2 - 6\ , & x \in [1,\ \sqrt{2}\,] \\ f_2(g_1(x)) = f_2(x^2) = -x^2 + 2\ , & x \in \langle \sqrt{2},\ \sqrt{6}\,] \\ f_2(g_2(x)) = f_2(5) = -3\ , & x \in \langle 4,\ 8] \end{cases}\ .$$

10.17 NOTA .- En (iii) : F = Falso $\Leftrightarrow$ $\varnothing$ (Conjunto Vacío)
En (iv) : V = Verdadero $\Leftrightarrow$ U (Universo)

10.18 EJERCICIO .- Para las funciones dadas en [10.16], verifique que

$(g \circ f)(x) = g_1(f_1(x)) = (4x-16)^2, \quad x \in [7/4,\ 2]$.

10.19 EJERCICIO .- Si $(f \circ g)(x) = x^{x^{x+1}}$ y $g(x) = x^x$, halle $f(x)$.

SOLUCIÓN .- Haciendo $g(x) = x^x = u$:

$f(u) = f(g(x)) = x^{x^{x+1}} = x^{x \cdot x^x} = (x^x)^{x^x} = (u)^u$

$\Rightarrow \quad f(x) = x^x$, regresando al símbolo x en lugar del símbolo u .

10.20 EJERCICIO .- Halle todas las funciones lineales $f(x)$ tales que

$$(f \circ f)(\tfrac{1}{x}) = \frac{9-4x}{x}\ , \quad \forall\ x \neq 0\ .$$

SOLUCIÓN .- $f(x) = mx + b$, $m \neq 0$, entonces :

$(f \circ f)(u) = m(mu + b) + b = m^2u + b(m+1)$,

$\Rightarrow$ si $x \neq 0$,

Haciendo $u = \frac{1}{x}$: $(f \circ f)(\frac{1}{x}) = \frac{m^2}{x} + b(m+1) = \frac{9-4x}{x} = \frac{9}{x} - 4$

$\Rightarrow \quad b(m+1)x + m^2 = -4x + 9\ , \quad \forall\ x \neq 0\ ,$

$\Rightarrow \quad m^2 = 9 \quad \wedge \quad b(m+1) = -4 \quad \Rightarrow$

Dos soluciones: a) $m = 3$, $b = -1$ y b) $m = -3$, $b = 2$

Por lo tanto, a) $f(x) = 3x - 1$ y b) $f(x) = -3x + 2$.

10.21 EJERCICIO .- Demuestre que: $\left[\!\left[\dfrac{|x| - 2}{3 - x} \right]\!\right] = -1\ , \quad \forall\ x \in \langle -1,\ 1\rangle$.

SOLUCIÓN .-

a) Si $x \in \langle -1,\ 0\rangle$: $|x| = -x$, $\dfrac{-x-2}{3-x} = 1 - \dfrac{5}{3-x}$; además,

$x \in \langle -1,\ 0\rangle \quad \Leftrightarrow \quad -5/(x-3) \in \langle -5/3,\ -5/4\rangle \subset [-2,\ -1\rangle \quad \Rightarrow$

$$\left[\!\left[\frac{|x|-2}{3-x} \right]\!\right] = \left[\!\left[1 - \frac{5}{3-x} \right]\!\right] = 1 + \left[\!\left[\frac{-5}{3-x} \right]\!\right] = 1 + (-2) = -1 \quad (¿?)$$

b) Si $x \in [0, 1\rangle$: $|x| = x$, $\dfrac{x-2}{3-x} = -1 + \dfrac{1}{3-x}$; además,

$$x \in [0, 1\rangle \quad \Leftrightarrow \quad -x \in \langle -1, 0] \quad \Leftrightarrow \quad 3 - x \in \langle 2, 3]$$

$\Leftrightarrow \quad 1/(3-x) \in [1/3, 1/2\rangle \subset [0, 1\rangle$. Por lo tanto,

$$\left[\!\left[\frac{|x|-2}{3-x} \right]\!\right] = \left[\!\left[-1 + \frac{1}{3-x} \right]\!\right] = -1 + \left[\!\left[\frac{1}{3-x} \right]\!\right] = (-1) + (0) = -1$$

10.22 EJERCICIO .- Dadas las funciones siguientes f y g :

$$f(x) = \begin{cases} \left[\!\left[\dfrac{|x|-2}{3-x} \right]\!\right] , & x \in \langle -1, 1\rangle \\ \sqrt{x^2 + 2x} , & x \in [1, 2\rangle \end{cases} , \quad g(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{x-1} , & x \in [-2, -1\rangle \\ |x-1| , & x \in \langle 0, 3\rangle \end{cases}$$

y por el Ejercicio [10.21], se tiene que:

$$f(x) = \begin{cases} -1 , & x \in \langle -1, 1\rangle \quad \ldots (f_1) \\ \sqrt{(x+1)^2 - 1} , & x \in [1, 2\rangle \quad \ldots (f_2) \end{cases}$$

i) $\text{Dom}(f_1 \circ g_1) = \{ x \in [-2, -1\rangle / \ \dfrac{2}{x-1} \in \langle -1, 1\rangle \ \} \quad \ldots (*)$

donde $\dfrac{2}{x-1} \in \langle -1, 1\rangle \quad \Leftrightarrow \quad -1 < \dfrac{2}{x-1} < 1 \quad \Leftrightarrow$

$$\left(\frac{2}{x-1} + 1 > 0 \ \wedge \ \frac{2}{x-1} - 1 < 0\right) \quad \Leftrightarrow \quad \left(\frac{x+1}{x-1} > 0 \ \wedge \ \frac{x-3}{x-1} > 0\right)$$

$\Leftrightarrow \quad x \in (\langle -\infty, -1\rangle \cup \langle 1, \infty\rangle) \cap (\langle -\infty, 1\rangle \cup \langle 3, \infty\rangle) =$

$= \langle -\infty, -1\rangle \cup \langle 3, \infty\rangle$. Luego, en $(*)$:

$\text{Dom}(f_1 \circ g_1) = [-2, -1\rangle \cap (\langle -\infty, -1\rangle \cup \langle 3, \infty\rangle) = [-2, -1\rangle$.

Análogamente,

ii) $\text{Dom}(f_1 \circ g_2) = \langle 0, 2\rangle$, iii) $\text{Dom}(f_2 \circ g_1) = \varnothing$ (Vacío)

iv) $\text{Dom}(f_2 \circ g_2) = [2, 3\rangle$.

Por lo tanto,

$$(f \circ g)(x) = \begin{cases} -1 , & x \in [-2, -1\rangle \cup \langle 0, 2\rangle \\ \sqrt{x^2 - 1} , & x \in [2, 3\rangle \end{cases} .$$

Y se puede verificar fácilmente que:

$$(g \circ f)(x) = \left| 1 - \sqrt{x^2 - 1} \right| , \quad \text{para} \quad x \in [1, 2\rangle .$$

10.23 EJERCICIO .- Si $f = \{(0, -4), (-2, 1), (5, 4), (2, 5), (4, 8)\}$, y

$g = \{(2, 4), (5, 3), (1, 2), (3, -3)\}$, calcule el valor de

$$A = \left[\frac{(f \circ g)(1)(g \circ f)(2) - f^3(0) + 2f(-2)}{g(5)(f \circ f)(5) - (f^2 - g)(2)} \right]^{1/3}$$

SOLUCIÓN .-

$$A = \left[\frac{f(2)g(5) - (-64) + 2(1)}{3f(4) - (25 - 4)} \right]^{1/3} = \left[\frac{(5)(3) + 64 + 2}{3(8) - 21} \right]^{1/3} = \left(\frac{81}{3}\right)^{1/3} = 3$$

10.24 EJERCICIO .- Si $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 , & x \leq 0 \\ x + 2 , & x > 0 , \end{cases}$ halle $f \circ f$.

SOLUCIÓN.-

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x) = x^2 - 1 , & x \in \langle -\infty, 0] = \text{Dom } f_1 \quad \ldots (f_1) \\ f_2(x) = x + 2 , & x \in \langle 0, \infty\rangle \ = \text{Dom } f_2 \quad \ldots (f_2) \end{cases}$$

$$f \circ f = (f_1 \circ f_1) \cup (f_1 \circ f_2) \cup (f_2 \circ f_1) \cup (f_2 \circ f_2)$$

i) $\text{Dom}(f_1 \circ f_1) = \{ x \in \text{Dom } f_1 / \ f_1(x) \in \text{Dom } f_1 \ \}$

$= \{ x \in \langle -\infty, 0] / \ (x^2 - 1) \in \langle -\infty, 0] \ \} \quad (x^2 - 1 \leq 0)$

$= \{ x \leq 0 / \ x^2 \leq 1 \ \} = \langle -\infty, 0] \cap ([-1, 1]) = \boxed{[-1, 0]}$

ii) $\text{Dom}(f_1 \circ f_2) = \{ x \in \text{Dom } f_2 / \ f_2(x) \in \text{Dom } f_1 \ \}$

$= \{ x \in \langle 0, \infty\rangle / \ x + 2 \in \langle -\infty, 0] \ \} \quad (x + 2 \leq 0)$

$= \{ x > 0 / \ x \leq -2 \ \} = \langle 0, \infty\rangle \cap \langle -\infty, -2] = \boxed{\varnothing}$

iii) $\text{Dom}(f_2 \circ f_1) = \{ x \in \text{Dom } f_1 / \ f_1(x) \in \text{Dom } f_2 \ \}$

$= \{ x \in \langle -\infty, 0] / \ (x^2 - 1) \in \langle 0, \infty\rangle \ \} \quad (x^2 - 1 > 0)$

$= \{ x \leq 0 / \ x^2 > 1 \ \} = \langle -\infty, 0] \cap (\langle -\infty, -1\rangle \cup \langle 1, \infty\rangle)$

$= \boxed{\langle -\infty, -1\rangle}$

iv) $\text{Dom}(f_2 \circ f_2) = \{ x \in \text{Dom } f_2 / \ f_2(x) \in \text{Dom } f_2 \ \}$

$= \{ x \in \langle 0, \infty\rangle / \ (x + 2) \in \langle 0, \infty\rangle \ \} \quad (x + 2 > 0)$

$= \{ x > 0 / \ x > -2 \} = \langle 0, \infty\rangle \cap \langle -2, \infty\rangle = \boxed{\langle 0, \infty\rangle}$

Y como $(f_1 \circ f_1)(x) = f_1(f_1(x)) = f_1(x^2 - 1) = (x^2 - 1)^2 - 1$, entonces

$$(f \circ f)(x) = \begin{cases} (f_1 \circ f_1)(x) = f_1(f_1(x)) = x^4 - 2x^2 , & x \in [-1, 0] \\ f_2(f_1(x)) = f_1(x) + 2 = x^2 + 1 , & x \in \langle -\infty, -1\rangle \\ f_2(f_2(x)) = f_2(x) + 2 = x + 4 , & x \in \langle 0, \infty\rangle \end{cases}$$

10.25 PROPIEDADES DE LA COMPOSICIÓN DE FUNCIONES

Dadas las funciones f, g, h, I (Identidad)

1) $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$ [ASOCIATIVA]
2) Si I es la función identidad: $\forall$ función f
$f \circ I = f \quad \wedge \quad I \circ f = f$
3) $(f + g) \circ h = (f \circ h) + (g \circ h)$
4) $(fg) \circ h = (f \circ h) \cdot (g \circ h)$
5) $f \circ g \neq g \circ h$, en general.
6) $I^n \circ I^m \neq I^{nm}$, $n, m, \in \mathbb{Z}^+$.
7) $I^n \circ (f + g) = (f + g)^n$, $n \in \mathbb{Z}^+$.
8) $I^{1/n} \circ I^n = |\ |$, para n PAR $\in \mathbb{Z}^+$.
9) $I^{1/n} \circ I^n = I^n \circ I^{1/n} = I$, $n \in \mathbb{Z}^+$, IMPAR.

10.26 EJEMPLO .- Si $f = 2I^2 - 5I + 3$, $g = I^2 + 2I - 6$,

entonces $f \circ g = (2I^2 - 5I + 3) \circ (I^2 + 2I - 6)$

$= 2I^2 \circ (I^2 + 2I - 6) - 5I \circ (I^2 + 2I - 6) + 3 \circ (I^2 + 2I - 6)$

$= 2(I^2 + 2I - 6)^2 - 5(I^2 + 2I - 6) + 3$

$= 2I^4 + 8I^3 - 21I^2 - 58I + 105$.

10.27 EJERCICIO .- Si $(f \circ g \circ h)(x) = \left[\!\left[\sqrt{2x^2 - 1} \right]\!\right]$, donde

$f(x) = \sqrt{x}$, $h(x) = x^2$, Halle $g(x)$.

SOLUCIÓN .- $f(g(h(x))) = \sqrt{g(h(x))} = \sqrt{g(x^2)} = \left[\!\left[\sqrt{2x^2 - 1} \right]\!\right]$

$\Rightarrow \quad g(x^2) = \left[\!\left[\sqrt{2(x^2) - 1} \right]\!\right]^2 \quad \Rightarrow \quad g(u) = \left[\!\left[\sqrt{2u - 1} \right]\!\right]^2$

haciendo $x^2 = u$. Luego, $g(x) = \left[\!\left[\sqrt{2x - 1} \right]\!\right]^2$.

10.28 EJERCICIO .- Si $g = \{(-2, 0), (-1, 3), (2, 1), (3, -2), (4, 2), (5, 0)\}$,

$h(x) = x^2 + 2$, $x \in \mathbb{Z}$, halle la función $g \circ h$.

SOLUCIÓN .- $\text{Dom}\, g = \{-2, -1, 2, 3, 4, 5\}$, $\text{Dom}\, h = \mathbb{Z}$,

$\text{Dom}(g \circ h) = \{x \in \text{Dom}\, h \ / \ h(x) \in \text{Dom}\, g\} =$

$= \{x \in \mathbb{Z} \ / \ x^2 + 2 \in \{-2, -1, 2, 3, 4, 5\}\}$, donde

$x^2 + 2 = -2$ (no hay tal x) ; $x^2 + 2 = 3 \Rightarrow x = \pm 1$

$x^2 + 2 = -1$ (no hay tal x) ; $x^2 + 2 = 4 \Rightarrow x = \pm\sqrt{2}$

$x^2 + 2 = 2 \Rightarrow x = 0$; $x^2 + 2 = 5 \Rightarrow x = \pm\sqrt{3}$;

Luego, $\text{Dom}(g \circ h) = \{x \in \mathbb{Z} / \ x \in \{0, \pm 1, \pm\sqrt{2}, \pm\sqrt{3}\}\} = \{0, -1, 1\}$

$\Rightarrow \quad g \circ h = \{(0, g(h(0))), (-1, g(h(-1))), (1, g(h(1)))\}$

$= \{(0, g(2)), (-1, g(3)), (1, g(3))\}$

$= \{(0, 1), (-1, -2), (1, -2)\}$.

10.29 EJERCICIO .- Si g y h son las funciones del Ejercicio [10.28] previo, y si $f(x) = x^2 - 1$, $x \in \mathbb{Z}$, halle la función $f \circ g \circ h$.

SOLUCIÓN .- $f \circ g \circ h = f \circ (g \circ h)$. Sabiendo que $g \circ h = \{(0, 1), (1, -2), (-1, -2)\}$, vemos que las tres imágenes $(g \circ h)(x)$ son números enteros. Luego,

$\text{Dom}\, f \circ (g \circ h) = \{x \in \text{Dom}(g \circ h) / \ (g \circ h)(x) \in \text{Dom}\, f\}$

$= \{x \in \{0, 1, -1\} / \ (g \circ h)(x) \in \mathbb{Z}\} = \{0, 1, -1\}$

$f \circ (g \circ h) = \{(0, f(g \circ h(0))), (1, f(g \circ h(1))), (-1, f(g \circ h(-1)))\}$

$= \{(0, f(1)), (1, f(-2)), (-1, f(-2))\}$

$= \{(0, (1)^2 - 1), (1, (-2)^2 - 1), (-1, (-2)^2 - 1)\}$

$\therefore \quad f \circ (g \circ h) = \{(0, 0), (1, 3), (-1, 3)\}$.

10.30 EJERCICIO .- Si $f(x) = x^2$, $g(x) = \sqrt{1 - x}$,

$[h \circ g \circ f](x) = \sqrt{3x + 1} \ / \left[\!\left[x + 2 \right]\!\right]$, halle $(g \circ h)(0)$.

SOLUCIÓN .- CALCULO DE $h(0)$: vemos que $0 = g(1)$, $1 = f(1)$

$\Rightarrow \quad h(0) = h(g(1)) = h(g(f(1))) = (h \circ g \circ f)(1)$.

Del dato se tiene que $(h \circ g \circ f)(1) = \sqrt{3(1) + 1} \ / \left[\!\left[(1) + 2 \right]\!\right] = 2/3$

Por lo tanto $(g \circ h)(0) = g(h(0)) = g(2/3) = \sqrt{1 - (2/3)} = 1/\sqrt{3}$.

Observe que también $1 = f(-1)$, pero $-1 \notin \text{Dom}(h \circ g \circ f)$.

10.31 EJERCICIO .- Dadas las funciones

$$f(x) = \begin{cases} x & , \ x \in \langle -\infty, 1] \\ -1 & , \ x \in \langle 1, \infty \rangle \end{cases} \quad , \quad g(x) = \begin{cases} x^2 - 8 & , \ x < 0 \\ \left[\!\left[x \right]\!\right] & , \ x \geq 0 \end{cases}$$

compruebe que:

$\text{Dom}(f_1 \circ g_1) = [-3, 0\rangle$, $\text{Dom}(f_2 \circ g_1) = \langle -\infty, -3\rangle$

$\text{Dom}(f_1 \circ g_2) = [0, 2\rangle$, $\text{Dom}(f_2 \circ g_2) = [2, \infty\rangle$.

$$(f \circ g)(x) = \begin{cases} x^2 - 8 & , \quad x \in [-3, 0\rangle \\ -1 & , \quad x \in \langle -\infty, -3\rangle \cup [2, \infty\rangle \\ [\![x]\!] & , \quad x \in [0, 2\rangle \end{cases}.$$

10.32 EJERCICIO .- Dadas las funciones

$$f(x) = \begin{cases} |x^2 - 1| & , \quad x < 3 \\ \sqrt{x^2 + 1} & , \quad x \geq 3 \end{cases}, \quad g(x) = \begin{cases} x & , \quad x \geq 4 \\ |x| - x & , \quad x \leq 0 \end{cases}$$

compruebe que: $|x| - x = -2x$, para $x \leq 0$,

$\text{Dom}(f_1 \circ g_1) = \varnothing$, $\text{Dom}(f_2 \circ g_1) = [4, \infty\rangle$

$\text{Dom}(f_1 \circ g_2) = \langle -3/2, 0]$, $\text{Dom}(f_2 \circ g_2) = \langle -\infty, -3/2]$.

$$\Rightarrow \quad (f \circ g)(x) = \begin{cases} \sqrt{[\![x]\!]^2 - 1} & , \quad x \in [4, \infty\rangle \\ |4x^2 - 1| & , \quad x \in \langle -3/2, 0] \\ \sqrt{4x^2 + 1} & , \quad x \in \langle -\infty, -3/2] \end{cases}$$

10.33 EJERCICIO .- Si $(g \circ f)(x) = \text{Sen}\sqrt{x^2 + 1}$, halle $g(x)$ de modo que se cumpla que $f(x) = \sqrt{x^2 + 1} - 1$.

SOLUCIÓN .- $\sqrt{x^2 + 1} = f(x) + 1$, entonces

$$g(f(x)) = \text{Sen}\sqrt{x^2 + 1} = \text{Sen}(f(x) + 1) ;$$

y haciendo $u = f(x)$: $g(u) = \text{Sen}(u + 1) \Rightarrow g(x) = \text{Sen}(x + 1)$.

10.34 EJERCICIO .- Dadas las funciones reales definidas en $\mathbb{R}$,

$f(x - 1) = 3x^2 + ax + 12$, $g(x + 1) = 5x + 7$,

halle el valor de a tal que $(f \circ g)(-2) = -4a$.

SOLUCIÓN.- $g(-2) = g((-3) + 1) = 5(-3) + 7 = -15 + 7 = -8$,

se verifique que $g(x) = 5x + 2$. Y como $f(g(-2)) = -4a$

entonces $f(-8) = 3(-8)^2 + a(-8) + 12 = -4a$

$\Rightarrow \quad 204 = 4a \quad \Rightarrow \quad a = 51$.

10.35 EJERCICIO .- Si existe, halle $g \circ f$ para las funciones

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 1 & , \quad \text{si} \quad x \quad \text{es entero par (en } \mathbb{Z}\text{).} \\ 2x & , \quad \text{si} \quad x \quad \text{es entero impar (en } \mathbb{Z}\text{).} \\ 0 & , \quad \text{si} \quad x \quad \text{no es entero.} \end{cases}$$

$$g(x) = \sqrt{[\![x]\!]^2 - [\![x]\!]} \ .$$

SOLUCIÓN .- $[\![x]\!]([\![x]\!] - 1) \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad [\![x]\!] \geq 1$ ó $[\![x]\!] \leq 0 \quad \Leftrightarrow$ $x \geq 1$ ó $x < 1 \quad \Leftrightarrow \quad x \in \langle -\infty, 1) \cup [1, \infty\rangle = \mathbb{R}$. Así, $\text{Dom}\, g = \mathbb{R}$

Además, si $x \in \mathbb{Z}$ entonces

$$\begin{cases} 2x \in \mathbb{Z} & \Rightarrow \quad [\![2x]\!] = (2x) \\ 2x + 1 \in \mathbb{Z} & \Rightarrow \quad [\![2x + 1]\!] = (2x + 1) \end{cases}$$

Y por lo tanto,

$$(g \circ f)(x) = \begin{cases} \sqrt{(2x + 1)^2 - (2x + 1)} = \sqrt{4x^2 + 2x} & , \quad \text{si } x \text{ es entero par} \\ \sqrt{(2x)^2 - (2x)} = \sqrt{4x^2 - 2x} & , \quad \text{si } x \text{ es entero impar} \\ 0 = 0 & , \quad \text{si } x \text{ no es entero.} \end{cases}$$

SERIE DE EJERCICIOS

1. Sean $f = \{(0,1), (1,2), (2,3), (4,3), (5,2), (0,1)\}$, $g = \{(6,7), (5,4), (4,3), (2,4), (1,4), (0,7)\}$, halle $\text{Dom}(f \circ g)$, $\text{Dom}(g \circ f)$, así como las funciones compuestas $f \circ g$ y $g \circ f$.
2. Si $f(x + 1) = 3x + 1$, $g(x) = 2x - 3$, halle $(f \circ g)(x + 1)$
3. Sean $f(x) = ax + 2$, $g(x) = x - b$, $a \neq 0$, $b \neq 0$. Si $f \circ g = g \circ f$ halle $b(a - 1)$.
4. Sean $f(x) = x^2 + 2x$, $g(x + 1) = x^2$, halle $f((x - 1)^2) - 6g(x)$
5. Sean f y g definidas por $f(x) = mx + b$, $m \neq 0$, $g(x) = nx + c$, $n \neq 0$. ¿Cuáles son verdaderas? :
   a) $f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2) \quad \Leftrightarrow \quad b = 0$.
   b) $(fg)(x) = x^2 + (b + c)x + bc \quad \Leftrightarrow \quad m/n = 1$.
   c) $(f + g)(x) = b + c$, $\forall\, x$ real $\Leftrightarrow \quad m = -n$.
   d) $f(g(x)) = mnx + mc$.
6. Halle el dominio y el rango de $f \circ g$, donde $f(x) = \sqrt{3x}$, $g(x) = 2x - 1$
7. Sean $f(x) = 2x^2 - 1$, $g(x) = 4x^3 - 3x$, $x \in \mathbb{R}$. Pruebe que $f \circ g = g \circ f$.
8. Sea $f(x) = 1/(1 - x)$. a) ¿Cuál es el dominio de f ?
   b) ¿Cuál es dominio de $f \circ f$ y de $f \circ f \circ f$?
   c) Pruebe que $(f \circ f \circ f)(x) = x$, $\forall\, x \in \text{Dom}(f \circ f \circ f)$.
9. Si $f(x) = 2^{x+1}$, calcule el valor de x para el cual $(f \circ f)(x) = 4$.
10. Sea $f(x + 7) = f(x) + f(7)$, $f(0) = 0$, $\forall\, x$ real. ¿Cuáles son falsas?

a) $f(-7) = -f(7)$, b) $f(35) = f(14) + 3f(7)$

c) $f(63)/f(7) = 9$, si $f(7) \neq 0$.

11. Si $f(x) = \sqrt{4+x}$, $x \in [0, 6]$; $g(x) = x^2 + 2$, $x \in [-1, 3]$, halle $f \circ g$ y $g(x) = (2x+1)/x$, $x \geq 1/2$.

12. Sean $f(x) = \sqrt{x}$, $x \geq 0$, $g(x) = [\![x]\!]$, $x \in \mathbb{R}$, ¿cuáles son verdaderas? :

a) $\text{Dom}\, f \circ g = \text{Dom}\, g \circ f$; b) $\text{Rang}\,(f \circ g) = [0, \infty\rangle$;

c) $\exists\, y > 0 \;/\; \nexists\, x \in [0, \infty\rangle \;/\; (f \circ g)(x) = y$.

13. Si $f(x) = 1/(x-2)$, $x \geq 3$; $g(x) = (2x+1)/x$, $x \geq 1/2$, halle $g \circ f$ y $f \circ g$.

14. Sean $f(x) = \sqrt{1+x}$, $x \in [-1, 2\rangle$,

$$g(x) = \begin{cases} [\![x]\!] & , \quad x < 0 \\ x^2 - 1 & , \quad x \geq 0 \end{cases} ;$$ halle $f \circ g$ y grafíquela.

15. Sean $$f(x) = \begin{cases} x^2 & , \quad x < 1 \\ -x^3 & , \quad x \geq 2 \end{cases} , \quad g(x) = \begin{cases} -x & , \quad x < 2 \\ 2x & , \quad x \geq 4 , \end{cases}$$

halle $g \circ f$.

16. Sean $f(x) = x^2$, $g(x) = 3x$, $h(x) = x - 5$, halle el valor de $\underline{x}$, tal que $[h \circ f \circ (g+h)](\underline{x}) = 0$.

17. Halle $(f \circ g)$ y $(g \circ f)$, si existen, donde

$$f(x) = \begin{cases} 1/(x-1) \;,\; x \in \langle -1, 1\rangle \\ |x^2 + 1| \;,\; x \in \langle 1, 2\rangle \end{cases} , \; g(x) = \begin{cases} [\![x]\!] & , \; x \in [0, 1\rangle \\ \sqrt{x^2 - 1} & , \; x \in [1, 3\rangle \end{cases}$$

18. Sean $f(x) = \sqrt{x-5}$, $g(x) = 3/(x - [\![x]\!])$, $x \notin \mathbb{Z}$, halle $\text{Dom}\,(f \circ g)$.

19. Si $$f(x) = \begin{cases} \left[\!\left[\sqrt{1/|x+2|} \right]\!\right] & , \quad \text{si} \quad -1 < x < 1 \\ |x| & , \quad \text{si} \quad x \geq 1 \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} x^2 [\![x^2]\!] - 2|x| & , \quad \text{si} \quad -\sqrt{2} < x \leq 0 \\ x [\![|x-3|]\!] + 2 & , \quad \text{si} \quad 2 < x < 4 , \end{cases}$$

halle $g \circ f$.

20. Dadas las funciones $f(x) = x^2 + 2x + 3$, $g(x) = x - 5$, y la función $h(x) = 2x^2 + x$, evalúe

$$A = \left[\frac{(f \circ g)(3) + (g \circ f)(1)(f \circ h)(-1) - (h \circ g)(4)}{(f \circ g \circ h)(0) - (h \circ f \circ g)(4)} \right]^{-3} , \quad \text{y}$$

$$B = \left[\frac{(f \circ g)(3) + (h \circ g)(2)}{(h \circ f)(-1)} \right] (f \circ f)(0) .$$

21. Si $f(x) = \sqrt{x}$; $g(x) = x^2$, $x > 0$; $(f \circ g \circ h)(x) = \sqrt{2x^2 - 1}$. Halle $h(1) + h(2)$.

22. Sean $f(x) = \sqrt{x^2 - 4}$, $g(x) = x^2$. Si $\text{Rang}\,(g) = \{ x \in \mathbb{R} \;/\; x^3 - 3x - 2 \geq 0 , \; x \geq 0 \}$, y si el dominio de f es el conjunto

$$\text{Dom}\, f = \{ x \in \mathbb{R} \;/\; \sqrt{\sqrt{x^2 - 18x + 81} - \sqrt{x^2 - 10x + 25}} \cdot (x-4) \geq 0 \} ,$$

halle $f \circ g$.

23. Halle una función f de manera que $f \circ g = F$, así como el dominio más grande posible de F, donde:

a) $g(x) = \dfrac{1-x}{1+x}$, y $F(x) = \dfrac{1+x}{1-x}$.

b) $g(x) = x^2$, y $F(x) = ax^2 + b$, $a \neq 0$.

c) $g(x) = -x^2$, y $F(x) = \sqrt{a^2 - x^2}$, $a > 0$.

24. Halle una función g tal que $f \circ g = F$, donde:

a) $f(x) = x^2$, y $F(x) = \left(1 - \dfrac{1}{x^4}\right)^2$

b) $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$, y $F(x) = a^2 x^2 + [\, 1/(a^2 x^2) \,]$

c) $f(x) = x^2 + 1$, y $F(x) = (2x^3 - 1)^2 + 1$.

25a. Si $f(x) = x^2 + 1$, halle dos funciones $g(x)$ para las cuales $f(g(x)) = 4x^2 - 16x + 17$.

25b. Sean $g(x) = x^3$, $(g \circ f)(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$, halle $f(x)$.

25c. Si $f(x) = \sqrt{2x-1}$, $g(x) = \sqrt{2x^2 - 7}$, halle una función $h(x)$ tal que $(f \circ h)(x) = g(x)$.

26. Si $g = \{ (8, 7), (4, 4), (5, -1), (3, 5), (-2, -1), (-3/4, 6) \}$, y

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x-1} & , \quad x \in [1, 6\rangle \\ (1-x)/4 & , \quad x \in [-3, 0] \;; \end{cases}$$

halle las funciones compuestas $f \circ g$ y $g \circ f$, si existen.

27. Sean $$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x-2} \cdot \left[\!\left[\dfrac{|x-2| + 4x^2 - x - 2}{x^2 - 1} \right]\!\right] & , \; 2 \leq x \leq 6 \\ (-x) & , \quad \text{si} \quad 0 < x < 2 \quad , \end{cases}$$

$g(x) = 3x^2 - x$, $x \in \mathbb{R} - [-3, -1\rangle$; halle $g \circ f$.

28. Sean $f(x) = \sqrt{x^2 - 4}$, $g(x) = \sqrt{x + 2}$, halle el dominio y la regla de correspondencia de la función h definida por:

$$h(x) = f(x + 2) / [2g(x) - f(x)] .$$

CLAVE DE RESPUESTAS

1. $f \circ g = \{(5, 3), (2, 3), (1, 3)\}$, $g \circ f = \{(0, 4), (1, 4), (5, 4), (6, 4)\}$
2. $f(x) = 3x - 2$, $f(g(x + 1)) = f(2x - 1) = 6x - 5$.
3. $b(a - 1) = 0$.
4. $(x - 1)^2 (x - 3)(x + 1)$.
5. Sólo (a) y (c).
6. $\text{Dom} = [1/2, \infty\rangle$, $\text{Rang} = [0, \infty\rangle$
8. a) $\mathbb{R} - \{1\}$, b) $\text{Dom}(f \circ f) = \mathbb{R} - \{0, 1\}$; $f(f(x)) = 1 - (1/x) \Rightarrow$ $f(f(f(x))) = x$, $\forall\, x \in \text{Dom}(f \circ f \circ f)$.
9. $x = -1$.
10. Para $x = -7$: $f(-7 + 7) = f(-7) + f(7)$. Luego (a) , (b) y (c) son verdaderas.
11. $\text{Dom}\, f \circ g = [-1, 3] \cap [-2, 2] = [-1, 2]$.

    $(f \circ g)(x) = \sqrt{x^2 + 6}$, $x \in [-1, 2]$, $(g \circ f)(x) = x + 6$, $x \in [0, 5]$
12. Sólo (a) y (c). En (c): $y = 1/2$.
13. $(g \circ f)(x) = x$, $\forall\, x \subset [3, 4]$; $(f \circ g)(x) = x$, $\forall\, x \in \langle 1/2, 1]$
14. $$(f \circ g)(x) = \begin{cases} 0 , & x \in [-1, 0\rangle \\ x , & x \in [0, \sqrt{3}\rangle . \end{cases}$$
15. $$(g \circ f)(x) = \begin{cases} -x^2 , & x \in \langle -\sqrt{2}, 1\rangle \\ 2x^2 , & x \in \langle -\infty, -2] \\ x^3 , & x \in [2, \infty\rangle \end{cases}$$
16. $x = (5 \pm \sqrt{5}) / 4$.
17. $$(f \circ g)(x) = \begin{cases} -1 , & x \in [0, 1\rangle \\ 1/(\sqrt{x^2 - 1} - 1) , & x \in [1, \sqrt{2}\rangle \\ x^2 , & x \in \langle \sqrt{2}, \sqrt{5}\rangle \end{cases}$$

    $(g \circ f)(x) = \sqrt{x^4 + 2x^2}$, $x \in \langle 1, \sqrt{2}\rangle$.
18. $\text{Dom}\, f = [5, \infty\rangle$, $\text{Dom}\, g = \mathbb{R} - \mathbb{Z}$, $g(x) > 0$,

    entonces: $x \in \text{Dom}\, g \wedge g(x) = 3/(x - [\![x]\!]) \in \text{Dom}\, f \Leftrightarrow$

    $x \in \mathbb{R} - \mathbb{Z} \wedge 3/(x - [\![x]\!]) \geq 5 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R} - \mathbb{Z} \wedge 0 < (x - [\![x]\!]) \leq \frac{3}{4}$

(pues $0 < x - [\![x]\!] < 1$, $\forall\, x \notin \mathbb{Z}$) $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ $(x \in \mathbb{R} - \mathbb{Z}) \wedge (n < x \leq \frac{3}{5} + n) \wedge ([\![x]\!] = n , n \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ $x \in \langle n, n + \frac{3}{5}]$, $n \in \mathbb{Z}$.

Por lo tanto, $\text{Dom}(f \circ g) = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} \langle n, n - \frac{3}{5}]$.

19. $\left[\!\left[1/\sqrt{|x + 2|} \right]\!\right] = 0$, si $x \in \langle -1, 1\rangle$; y si $2 < x < 4$

entonces $-1 < x - 3 < 1 \Rightarrow 0 \leq |x - 3| < 1 \Rightarrow [\![\, |x - 3| \,]\!] = 0$

$$\Rightarrow \quad (g \circ f)(x) = \begin{cases} 0 , & \text{si} \quad x \in \langle -1, 1\rangle \\ 2 , & \text{si} \quad x \in \langle 2, 4\rangle \end{cases}$$

20. $A = 1$, $B = 162/5$.
21. $\sqrt{2x^2 - 1} = f(g(h(x))) = \sqrt{g(h(x))} = \sqrt{[h(x)]^2}$, si $h(x) > 0$,

    $= |h(x)| = h(x)$, pues $h(x) > 0$, $\Rightarrow$

    $\Rightarrow$ $h(1) = 1$, $h(2) = \sqrt{7}$ $\Rightarrow$ $h(1) + h(2) = 1 + \sqrt{7}$.
22. $x^3 - 3x - 2 = (x + 1)^2 (x - 2) \geq 0 \Leftrightarrow x \in \{-1\} \cup [2, \infty\rangle \Leftrightarrow$

    $\text{Rang}(g) = [2, \infty\rangle$. Y como $g(x) = x^2 \in [2, \infty\rangle = \text{Rang}(g) \Rightarrow$

    $\text{Dom}(g) = \langle -\infty, -\sqrt{2}] \cup [\sqrt{2}, \infty\rangle$. Además,

    $$\sqrt{x^2 - 18x + 81} - \sqrt{x^2 - 10x + 25} = |x - 9| - |x - 5| \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 7$$

    que es el ***Universo*** de la expresión subradical.

    Luego, $\text{Dom}\, f = \langle -\infty, 7] \cap [4, \infty\rangle = [4, 7]$,

    $\text{Dom}(f \circ g) = [-\sqrt{7}, -2] \cup [2, \sqrt{7}]$.

    $\therefore$ $(f \circ g)(x) = f(x^2) = \sqrt{x^4 - 4}$, $\forall\, x \in [-\sqrt{7}, -2] \cup [2, \sqrt{7}]$
23. a) $f(x) = 1/x$, $x \neq 0$, $\text{Dom}\, F = \mathbb{R} - \{0, 1\}$.

    b) $f(x) = ax + b$, $x \geq 0$, $\text{Dom}\, F = \mathbb{R}$.

    c) $f(x) = \sqrt{a^2 + x}$, $x \leq 0$, $\text{Dom}\, F = \mathbb{R}$.
24. a) $g(x) = 1 - (1/x^4)$, $x \neq 0$ ó $g(x) = -1 + (1/x^4)$, $x \neq 0$.

    b) $a^2 x^2 + \frac{1}{a^2 x^2} = g(x) + \frac{1}{g(x)} \Rightarrow \frac{1}{a^2 x^2} - \frac{1}{g(x)} = g(x) - a^2 x^2$

    y dando común denominador: $\frac{1}{a^2 x^2 g(x)} [g(x) - a^2 x^2] = [g(x) - a^2 x^2]$

$\Rightarrow \quad g(x) = a^2x^2 \ , \ x \in \mathbb{R} \ , \quad o \quad g(x) = \dfrac{1}{a^2x^2} \ , \quad x \neq 0 \ .$

c) $g(x) = 2x^3 - 1 \ , \ x \in \mathbb{R} \ , \quad o \quad g(x) = 1 - 2x^3 \ , \ x \in \mathbb{R} \ .$

25. a) $g(x) = 2x - 4 \quad o \quad g(x) = -2x + 4.$

b) $f(x) = x - 1 \ ,$ c) $h(x) = x^2 - 3.$

26. $f \circ g = \{(4, \sqrt{3}), (5, 1/2), (3, 2), (-2, 1/2)\}$. No existe $g \circ f$.

27. $$f(x) = \begin{cases} 4\sqrt{x-2} & , \quad 2 \leq x \leq 6 \\ -x & , \quad 0 < x < 2 \ , \end{cases}$$

$$(g \circ f)(x) = \begin{cases} 48(x-2) - 4\sqrt{x-2} & , \quad x \in [2, 6] \\ 3x^2 + x & , \quad x \in \langle 0, 1 \rangle . \end{cases}$$

28. $\text{Dom}(h) = [2, 6\rangle \cup \langle 6, \infty\rangle$

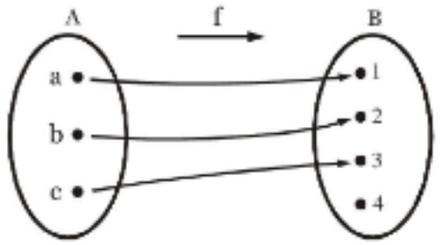
$\Rightarrow \quad h(x) = \sqrt{x^2 + 4x}\ [\ 2\sqrt{x+2} - \sqrt{x^2 - 4}\ ] \ .$

11. FUNCIONES INYECTIVAS, SURYECTIVAS Y BIYECTIVAS

11.1 FUNCIÓN INYECTIVA (UNIVALENTE)

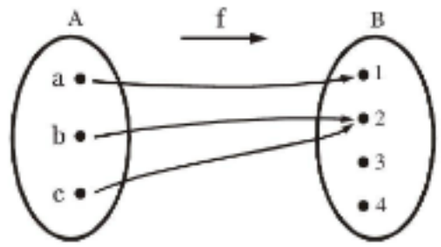
Dada $f : A \to B$ una función de A en B se dice que f es una ***FUNCIÓN INYECTIVA o UNIVALENTE*** si cada elemento $f(a)$ del rango $f(A)$ es la imagen de ***solamente un elemento*** $\underline{a}$ en el Dominio de f. [$\text{Dom}\, f = A$].

Es decir, f es INYECTIVA si para cada par de elementos $x_1 , x_2 \in \text{Dom}\, f$, distintos $x_1 \neq x_2$, ***sus imágenes también son DISTINTAS*** : $f(x_1) \neq f(x_2)$.



FUNCIÓN INYECTIVA

Una función f ***NO ES INYECTIVA*** si existen dos elementos ***distintos*** x_1 , x_2, $x_1 \neq x_2$, en el dominio de f , que tienen ***la misma imagen***: $f(x_1) = f(x_2)$.



FUNCIÓN NO INYECTIVA

11.2 DEFINICIÓN FORMAL .- Una función f es ***INYECTIVA*** , si

$$f(x_1) = f(x_2) \quad \Rightarrow \quad x_1 = x_2$$

para $x_1 , x_2 \in \text{Dom}\, f$,

o equivalentemente, f es ***INYECTIVA*** si para cada $x_1 , x_2 \subset \text{Dom}\, f$:

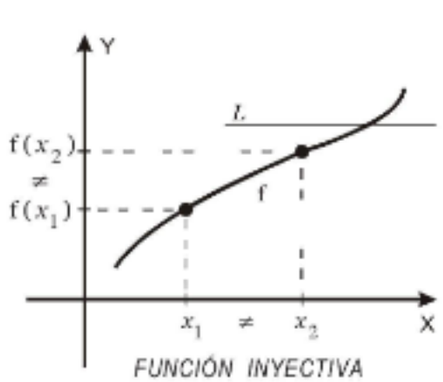
$$x_1 \neq x_2 \quad \Rightarrow \quad f(x_1) \neq f(x_2) \ .$$

11.3 EJEMPLOS .- a) La función $f = \{(1,1), (2,4), (3,5), (4,6)\}$ es inyectiva.

b) La función $f = \{(1,1), (2,4), (3,5), (4,5)\}$ no es ***inyectiva*** pues existe un par de elementos $x_1 = 3$ y $x_2 = 4$, distintos, ***que tienen la misma imagen*** :

$$x_1 = 3 \neq x_2 = 4 \quad \wedge \quad f(3) = f(4) = 5.$$

11.4 CONCLUSIÓN . Una función real f es ***INYECTIVA*** si es que ***NO CONTIENE*** dos pares ordenados con la misma segunda componente.



FUNCIÓN INYECTIVA

FUNCIÓN NO INYECTIVA

11.5 PROPIEDADES DE LAS FUNCIONES INYECTIVAS

1. En el plano XY, se reconoce a una ***FUNCIÓN INYECTIVA*** f cuando ***TODA RECTA HORIZONTAL L corta a la gráfica de f a lo más en un punto.***

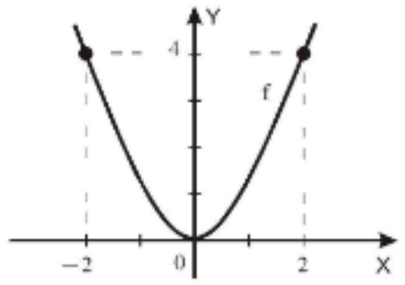
2. Para probar analíticamente que una función f ***NO ES INYECTIVA***, es suficiente presentar ***un contraejemplo***; es decir, basta indicar dos puntos distintos de su Dominio que tengan ***la misma imagen.***

   Por ejemplo, la función $f(x) = x^2$, $x \in \mathbb{R}$, ***NO ES INYECTIVA*** pues tiene dos puntos distintos con la misma segunda componente:

   $(-2, 4) \in f \ \wedge \ (2, 4) \in f$,

   o sea que f satisface:

   $f(-2) = 4 \ \wedge \ f(2) = 4$.



3. Para demostrar que una función f es *INYECTIVA*, se parte de la hipótesis:
   $f(x_1) = f(x_2)$ con $x_1, x_2 \in \text{Dom } f$, y mediante la definición de f y de algunas operaciones adecuadas ***se debe llegar a la igualdad***: $x_1 = x_2$

   Por ejemplo, la función $f(x) = x^3 - 5$, $x \in \mathbb{R}$, es *INYECTIVA*, pues partiendo de la igualdad

   $f(x_1) = f(x_2) \ \Rightarrow \ x_1^3 - 5 = x_2^3 - 5 \ \Rightarrow \ x_1^3 = x_2^3$

   $\Rightarrow \ \sqrt[3]{x_1^3} = \sqrt[3]{x_2^3} \ \Rightarrow \ x_1 = x_2$.

11.6 EJERCICIO .- Demuestre que la función f es inyectiva:

$$f(x) = 1 - \sqrt{x^2 - 4x - 5} \ , \quad x \leq -1 \ .$$

SOLUCIÓN .- Completando cuadrados: $f(x) = 1 - \sqrt{(x-2)^2 - 9}$.

Entonces $\forall \ x_1, x_2 \in \text{Dom } f = \langle -\infty, -1]$: ... (*)

$$f(x_1) = f(x_2) \ \Rightarrow \ 1 - \sqrt{(x_1 - 2)^2 - 9} = 1 - \sqrt{(x_2 - 2)^2 - 9}$$

$$\Rightarrow \ \sqrt{(x_1 - 2)^2 - 9} = \sqrt{(x_2 - 2)^2 - 9}$$

$$\Rightarrow \ (x_1 - 2)^2 - 9 = (x_2 - 2)^2 - 9$$

$$\Rightarrow \ (x_1 - 2)^2 = (x_2 - 2)^2 \ \Rightarrow \ |x_1 - 2| = |x_2 - 2|$$

[y como por (*): $x_1 \leq -1$, $x_2 \leq -1 \ \Rightarrow \ x_1 - 2 \leq -3 < 0$, y

$x_2 - 2 \leq -3 < 0 \ \Rightarrow \ |x_1 - 2| = 2 - x_1$, $|x_2 - 2| = 2 - x_2$]

$$\Rightarrow \ 2 - x_1 = 2 - x_2 \ \Rightarrow \ -x_1 = -x_2$$

$$\Rightarrow \ x_1 = x_2 \ .$$

Así, hemos verificado que: $f(x_1) = f(x_2) \ \Rightarrow \ x_1 = x_2$, para todo $x_1, x_2 \in \text{Dom } f$, y que por lo tanto f es una función inyectiva.

11.7 EJERCICIO .- Demuestre que la función $f(x) = \dfrac{x-1}{x+2}$, $x \neq -2$, es inyectiva.

SOLUCIÓN .-

$$f(x) = \frac{x-1}{x+2} = \frac{x+2-2-1}{x+2} = 1 - \frac{3}{x+2} \ .$$ Entonces,

$$\forall \ x_1, x_2 \ (\neq -2): \quad f(x_1) = f(x_2) \ \Rightarrow \ 1 - \frac{3}{x_1 + 2} = 1 - \frac{3}{x_2 + 2}$$

$$\Rightarrow \ -\frac{3}{x_1 + 2} = -\frac{3}{x_2 + 2}$$

$$\Rightarrow \ \frac{1}{x_1 + 2} = \frac{1}{x_2 + 2} \ \Rightarrow \ x_1 + 2 = x_2 + 2$$

$$\Rightarrow \ x_1 = x_2 \ .$$

Por lo tanto, f resulta ser inyectiva.

11.8 EJERCICIO .- Demuestre que $f(x) = x^2 - 3$, $x \in \langle -\infty, 0]$, es inyectiva.

SOLUCIÓN .- Sean $x_1, x_2 \in \text{Dom } f = \langle -\infty, 0]$ ... (*),

si $f(x_1) = f(x_2)$

$\Rightarrow \ x_1^2 - 3 = x_2^2 - 3$

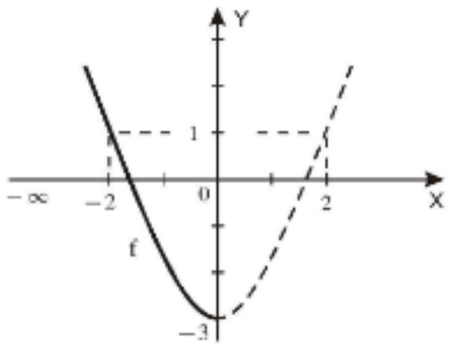
$\Rightarrow \ x_1^2 = x_2^2$

$\Rightarrow \ |x_1| = |x_2|$

$\Rightarrow \ -x_1 = -x_2$ ... de (*)

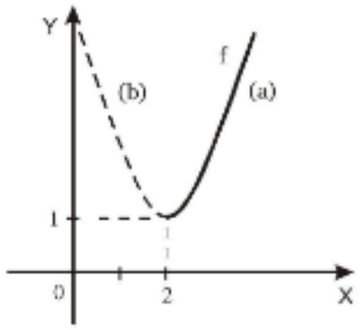
$\Rightarrow \ x_1 = x_2$

resultando así que f es inyectiva sobre $\langle -\infty, 0]$.



11.9 EJERCICIO .- Halle un dominio de la función $f(x) = x^2 - 4x + 5$, en el que f sea inyectiva.

SOLUCIÓN .- $f(x) = x^2 - 4x + 5 = (x-2)^2 + 1$ corresponde a una parábola con vértice en el punto $(2,1)$.



Así, f será inyectiva para:

a) $\text{Dom}\, f = [2, \infty\rangle$

o para

b) $\text{Dom}\, f = \langle -\infty, 2]$.

11.10 EJERCICIO .- *Si* f y g ***son inyectivas, y si existe*** f o g , ***demuestre que*** f o g ***es inyectiva también.***

SOLUCIÓN .- f y g inyectivas implican que:

$$g(x_1) = g(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2 \quad \ldots (*)$$

y $$f(w_1) = f(w_2) \Rightarrow w_1 = w_2 \quad \ldots (**)\,.$$

Haciendo $w = g(x)$:

$$f(g(x_1)) = f(g(x_2)) \Rightarrow g(x_1) = g(x_2) \quad \ldots \text{de } (**)$$
$$\Rightarrow x_1 = x_2 \quad \ldots \text{de } (*)\,.$$

Así, $f(g(x_1)) = f(g(x_2))$ implica que $x_1 = x_2$, y por lo tanto, resulta la función f o g ser inyectiva también.

11.11 NOTA . Cuando se desea demostrar que una función f es ***INYECTIVA EN EL CASO*** en que f es la unión de varias funciones parciales como:

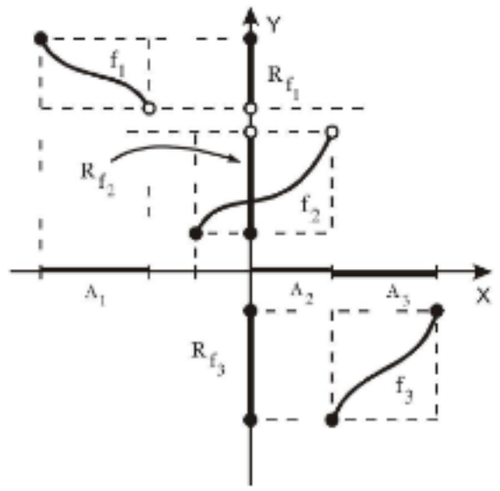
$$f(x) = \begin{cases} f_1(x) & , \quad x \in A_1 = \text{Dom}\, f_1 \\ f_2(x) & , \quad x \in A_2 = \text{Dom}\, f_2 \\ f_3(x) & , \quad x \in A_3 = \text{Dom}\, f_3 \end{cases}$$

donde los dominios A_1, A_2, A_3 ***son disjuntos entre sí***, se procede de la siguiente manera:

1º) Se prueba que cada función parcial f_i, $i = 1, 2, 3$, es inyectiva sobre su dominio correspondiente.

2º) Luego, como en el caso de la figura, *SE DEBE VERIFICAR QUE LOS RANGOS DE LAS FUNCIONES* f_1, f_2, f_3 *NO SE INTERSECTEN ENTRE SÍ.*

(Es decir, los rangos deben ser *DISJUNTOS DOS A DOS*).



La gráfica de la función f de la figura corresponde a una FUNCIÓN INYECTIVA , pues:

$$R_{f_1} \cap R_{f_2} = \varnothing \ ,$$
$$R_{f_1} \cap R_{f_3} = \varnothing \ ,$$
$$R_{f_2} \cap R_{f_3} = \varnothing \ .$$

Así, vemos de la gráfica que no es suficiente que se cumpla que

$$R_{f_1} \cap R_{f_2} \cap R_{f_3} = \varnothing$$

para que f ***sea inyectiva.***

Este criterio (1º y 2º) se aplica análogamente a funciones que están constituidas por la unión de dos, tres o más funciones parciales.

11.12 EJERCICIO .- Demuestre que la función f es inyectiva:

$$f(x) = \begin{cases} 2/\sqrt{x} & , \quad x \in \langle 4, \infty\rangle \quad \ldots (f_1) \\ -x^2 & , \quad x \leq 0 \quad \ldots (f_2) \end{cases}$$

SOLUCIÓN .- Verificando que f_1 y f_2 son inyectivas:

a) $\forall\, x_1, x_2 \in \langle 4, \infty\rangle = \text{Dom}\, f_1$:

$$f_1(x_1) = f_1(x_2) \Rightarrow 2/\sqrt{x_1} = 2/\sqrt{x_2} \Rightarrow \sqrt{x_1} = \sqrt{x_2}$$
$$\Rightarrow x_1 = x_2 \ .$$

b) $\forall\, x_1, x_2 \in \langle -\infty, 0] = \text{Dom}\, f_2$:

$$f_2(x_1) = f_2(x_2) \Rightarrow -x_1^2 = -x_2^2 \Rightarrow x_1^2 = x_2^2$$
$$\Rightarrow |x_1| = |x_2| \overset{¿?}{\Rightarrow} -x_1 = -x_2$$
$$\Rightarrow x_1 = x_2 \ .$$

Y como podemos verificar además, en forma sencilla, que: $\text{Rang}\,(f_1) = \langle 0, 1\rangle$ y

$\text{Rang}(f_2) = \langle -\infty , 0]$, tales que su intersección es VACÍA , de modo que por la NOTA [11.11] f resulta ser una función inyectiva.

11.13 EJERCICIO .- Demuestre que la función f es inyectiva:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{4x^2+1}{x^2} & , \quad x < 0 & \ldots (f_1) \\ 4x - x^2 & , \quad x \in [0, 2] & \ldots (f_2) \\ 2 - x & , \quad x \in \langle 2, 3] & \ldots (f_3) \\ \dfrac{x-2}{3-x} & , \quad x > 3 & \ldots (f_4) \end{cases}$$

SOLUCIÓN .-

a) f_1 es INYECTIVA: Sean $x_1 , x_2 \in \langle -\infty , 0 \rangle$, $\ldots (*)$

$$f_1(x_1) = f_1(x_2) \Rightarrow 4 + (1/x_1^2) = 4 + (1/x_2^2) \Rightarrow 1/x_1^2 = 1/x_2^2$$
$$\Rightarrow x_1^2 = x_2^2 \Rightarrow |x_1| = |x_2| \text{ , y por } (*): \Rightarrow -x_1 = -x_2 \Rightarrow x_1 = x_2 .$$

Además, se prueba que: $\text{Rang}(f_1) = \langle 4 , \infty \rangle$.

b) $f_2(x) = 4 - (x-2)^2$ es INYECTIVA: Sean $x_1 , x_2 \in [0, 2]$ $\ldots (**)$

$$f_2(x_1) = f_2(x_2) \Rightarrow 4 - (x_1 - 2)^2 = 4 - (x_2 - 2)^2$$
$$\Rightarrow (x_1 - 2)^2 = (x_2 - 2)^2 \Rightarrow |x_1 - 2| = |x_2 - 2|$$
$$(**) \Rightarrow 2 - x_1 = 2 - x_2 \Rightarrow -x_1 = -x_2$$
$$\Rightarrow x_1 = x_2 .$$

Además, se verifica que: $\text{Rang}(f_2) = [0, 4]$.

c) $f_3(x) = 2 - x$: se prueba fácilmente que es INYECTIVA sobre su Dominio $\langle 2, 3]$, y que su $\text{Rang}(f_3) = [-1, 0 \rangle$.

d) $f_4(x) = -\left(\dfrac{x-2}{x-3}\right) = -\left[1 + \dfrac{1}{x-3}\right] = -1 - \dfrac{1}{x-3}$, es INYECTIVA:

Sean $x_1 , x_2 \in \text{Dom}(f_4) = \langle 3, \infty \rangle$:

$$f_4(x_1) = f_4(x_2) \Rightarrow -1 - \frac{1}{x_1 - 3} = -1 - \frac{1}{x_2 - 3}$$
$$\Rightarrow \frac{1}{x_1 - 3} = \frac{1}{x_2 - 3} \Rightarrow x_1 = x_2 .$$

Además, se prueba que el rango de f es $\text{Rang}(f) = \langle -\infty , -1 \rangle$.

Así, podemos ver que las cuatro funciones parciales son INYECTIVAS y que los cuatro rangos parciales correspondientes ***SON DISJUNTOS DOS A DOS*** , donde

$$\text{Rang}(f) = \langle 4 , \infty \rangle \cup [0 , 4] \cup [-1 , 0 \rangle \cup \langle -\infty , -1 \rangle ,$$

y donde
$$\text{Rang}(f_1) \cap \text{Rang}(f_2) = \langle 4 , \infty \rangle \cap [0 , 4] = \varnothing$$
$$\text{Rang}(f_1) \cap \text{Rang}(f_3) = \langle 4 , \infty \rangle \cap [-1 , 0 \rangle = \varnothing$$
$$\text{Rang}(f_1) \cap \text{Rang}(f_4) = \langle 4 , \infty \rangle \cap \langle -\infty , -1 \rangle = \varnothing$$
$$\text{Rang}(f_2) \cap \text{Rang}(f_3) = [0 , 4] \cap [-1 , 0 \rangle = \varnothing$$
$$\text{Rang}(f_2) \cap \text{Rang}(f_4) = [0 , 4] \cap \langle -\infty , -1 \rangle = \varnothing$$
$$\text{Rang}(f_3) \cap \text{Rang}(f_4) = [-1 , 0 \rangle \cap \langle -\infty , -1 \rangle = \varnothing$$

entonces debido a la NOTA [11.11] , tenemos que f resulta ser inyectiva.

11.14 NOTA .- Si una función está constituica por la unión de dos o más ***funciones inyectivas*** , por ejemplo $f = f_1 \cup f_2 \cup f_3$, ***no es suficiente que la intersección conjunta de los TRES RANGOS sea vacía para que la función f sea inyectiva sino que deben tener INTERSECCIÓN VACÍA los rangos tomados DE DOS EN DOS.***

Es decir, si f_1 , f_2 y f_3 son inyectivas , y

$$\text{Rang}(f_1) \cap \text{Rang}(f_2) \cap \text{Rang}(f_3) = \varnothing \underset{\text{(no implica q')}}{\not\Rightarrow} \text{ f sea inyectiva .}$$

Por ejemplo,

$$f(x) = \begin{cases} x & , \quad x \in [0 , 2] & \ldots (f_1) \\ x + 1 & , \quad x \in \langle 2 , 3] & \ldots (f_2) \\ 5 - x & , \quad x \in \langle 3 , 6] & \ldots (f_3) \end{cases}$$

que por ser f_1 creciente, f_2 creciente, y f_3 decreciente, entonces las tres funciones parciales son inyectivas, y donde sus rangos son:

$$\text{Rang}(f_1) = [0 , 2] , \quad \text{Rang}(f_2) = \langle 3 , 4] , \quad \text{Rang}(f_3) = [-1 , 2 \rangle .$$

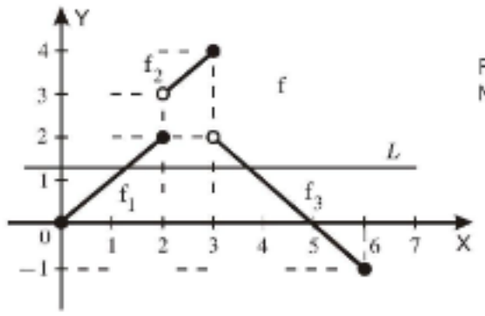
Aquí tenemos que la intersección conjunta de los tres rangos es VACÍA:

$$\text{Ran}(f_1) \cap \text{Ran}(f_2) \cap \text{Ran}(f_3) = ([0 , 2] \cap \langle 3 , 4]) \cap [-1 , 2 \rangle$$
$$= \varnothing \cap [-1 , 2 \rangle = \varnothing$$

pero sin embargo, la función f ***NO ES INYECTIVA*** , pues al intersectar los rangos POR PARES, resulta que, en particular,

$$\text{Ran}(f_1) \cap \text{Ran}(f_3) = [0 , 2] \cap [-1 , 2 \rangle = [0 , 2 \rangle \neq \varnothing$$

Esto genera que por ejemplo, se tenga: $f(1) = 1 = f(4)$ y tal como vemos en la figura, esta función f no es inyectiva.



FUNCIÓN f
NO INYECTIVA.

11.15 EJERCICIO . Pruebe que $f(x) = x + \sqrt{x^2+1}$, $x > 1$, es una función inyectiva.

SOLUCIÓN .- Sean $x_1 , x_2 \in \text{Dom}\, f = \langle 1, \infty \rangle$. Entonces, asumiendo que

$$f(x_1) = f(x_2) \quad \Rightarrow \quad x_1 + \sqrt{x_1^2+1} = x_2 + \sqrt{x_2^2+1}$$

$$\Rightarrow \quad x_1 - x_2 = \sqrt{x_2^2+1} - \sqrt{x_1^2+1} = \frac{x_2^2 - x_1^2}{\sqrt{x_2^2+1} + \sqrt{x_1^2+1}}$$

$$\Rightarrow \quad -(x_2 - x_1) = (x_2 - x_1)\left[\frac{x_1 + x_2}{\sqrt{x_1^2+1} + \sqrt{x_2^2+1}}\right] \quad \ldots \quad (*)$$

$$\Rightarrow \quad (x_2 - x_1 = 0) \quad \vee \quad \left(-1 = \frac{x_1 + x_2}{\sqrt{x_1^2+1} + \sqrt{x_2^2+1}}\right)$$

pero la igualdad de la derecha no es correcta pues todo el segundo miembro es estrictamente positivo, ya que $x_1 > 1$ y $x_2 > 1$. Por lo tanto, sólo es válida la proposición de la izquierda: $x_2 - x_1 = 0$ lo cual implica que $x_1 = x_2$.
De este modo resulta que esta función f es inyectiva.

11.16 EJERCICIO .- Dadas las funciones $f(x) = \sqrt{48 + 2x - x^2}$, $|x+1| \leq 5$,
$g(x) = -1 + \frac{3}{x+3}$, $x \in \langle -3, 3]$, halle $f \circ g$,
y pruebe que $f \circ g$ no es inyectiva.

SOLUCIÓN .- Se verifica que: $f(x) = \sqrt{49 - (x-1)^2}$, y que

$$(f \circ g)(x) = \sqrt{49 - [-2 + \frac{3}{x+3}]^2} \quad , \quad x \in [-\frac{12}{5}, 3] = \text{Dom}\, f \circ g \ .$$

Vemos que si $x_1 = 0$ y $x_2 = -2$ ambos en el $\text{Dom}\,(f \circ g)$, entonces
$(f \circ g)(0) = (f \circ g)(-2) = \sqrt{48}$. Luego, $(f \circ g)$ no es inyectiva.

11.17 EJERCICIO .- Sea $f : X \to Y$, demuestre que f es inyectiva si y sólo si, ***para todo subconjunto*** $A \subset X$: $f^{-1}[f(A)] = A$.

SOLUCIÓN .- Por doble inclusión:
a) Si f es inyectiva:
a1) Sea $x \in f^{-1}[f(A)] \Rightarrow f(x) \in [f(A)]$
$\Rightarrow$ ***existe*** $c \in A$ tal que $f(x) = f(c)$
$\Rightarrow$ $x = c$ (pues f es inyectiva)
$\Rightarrow$ $c = x \in A$ $\therefore$ $f^{-1}[f(A)] \subset A$.
a2) Sea $x \in A \Rightarrow f(x) \in f(A) \Rightarrow x \in f^{-1}[f(A)]$
$\therefore$ $A \subset f^{-1}[f(A)]$.

b) HIPÓTESIS: $\forall\, A \subset X$, $f^{-1}[f(A)] = A$ entonces, en particular,
$\forall\, x \in X \Rightarrow \{x\} \subset X \Rightarrow f^{-1}[f(\{x\})] = \{x\}$;
entonces, sean $x_1 , x_2 \in X$ tales que $f(x_1) = f(x_2)$
$\Rightarrow$ $f(x_1) \in f(\{x_2\})$
$\Rightarrow$ $x_1 \in f^{-1}[f(\{x_2\})] = \{x_2\}$
$\Rightarrow$ $x_1 = x_2$
$\therefore$ f es inyectiva.

11.18 EJERCICIO .- Utilizando la propiedad: $x^2 + a^2 > x^2$, $\forall\, a \neq 0$,
demuestre que la función $f(x) = 2x + \sqrt{4 + x^2}$, para
$x \in \langle -3, 2 \rangle$, es inyectiva.

SOLUCIÓN .- Sean $x_1 , x_2 \in \langle -3, 2 \rangle$, asumiendo que

$$f(x_1) = f(x_2) \quad \Rightarrow \quad 2x_1 + \sqrt{4 + x_1^2} = 2x_2 + \sqrt{4 + x_2^2}$$

$$\Rightarrow \quad -2(x_2 - x_1) = (x_2 - x_1)\left[\frac{x_1 + x_2}{\sqrt{4 + x_1^2} + \sqrt{4 + x_2^2}}\right] \quad \ldots (*)$$

$$\Rightarrow \quad \text{a1)} \quad x_2 - x_1 = 0 \quad \text{o} \quad \text{a2)} \quad x_2 - x_1 \neq 0 \qquad \ldots (\alpha)$$

Si suponemos que es válida [a2] de (α) , cancelando en $(*)$, se obtiene:

$$-2 \;=\; (x_1 + x_2)\,/\,[\,\sqrt{4 + x_1^2} + \sqrt{4 + x_2^2}\,] \;=\; A \quad ,$$

y se puede verificar que

$$\frac{|x_1|}{\sqrt{4 + x_1^2} + \sqrt{4 + x_2^2}} \;\leq\; \frac{|x_1|}{\sqrt{4 + x_1^2}} < 1 \qquad \text{[dato]}$$

entonces

$$0 \;\leq\; |A| \;\leq\; \frac{|x_1 + x_2|}{\sqrt{4+x_1^2} + \sqrt{4+x_2^2}} \;\leq\; \frac{|x_1|}{\sqrt{4+x_1^2}} + \frac{|x_2|}{\sqrt{4+x_2^2}} < 1 + 1 = 2$$

$$\Rightarrow \quad 0 \leq |A| < 2 \quad \Rightarrow \quad -2 < A < 2 \,.$$

Pero, de arriba $A = -2$, lo cual es una contradicción, y por lo tanto, la posibilidad [a2] no procede, cumpliéndose así solamente la posibilidad [a1] , es decir, que $x_2 - x_1 = 0 \;\Rightarrow\; x_2 = x_1$, y que por lo tanto f es inyectiva.

11.19 EJERCICIO .- Determine si es inyectiva la siguiente función:

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{-x^3} & , \quad x < 0 \qquad \ldots\ (f_1) \\ -5x^2 + 7x - 3 & , \quad x > 0 \qquad \ldots\ (f_2) \end{cases}$$

SOLUCIÓN .- La función f no es inyectiva debido a que su segunda función parcial f_2 no lo es, pues completando cuadrados:

$$f_2(x) \;=\; -5\,(x - \tfrac{7}{10})^2 - \tfrac{55}{100} \quad , \text{ para } \quad x \in \langle 0, \infty \rangle \,,$$

tenemos que, en particular: $f_2(\frac{6}{10}) = f_2(\frac{8}{10}) = -3/5$.

NOTA .- ***Para un cálculo rápido del RANGO de una cierta clase de funciones inyectivas, que se presentan con mucha frecuencia, ver la SECCIÓN*** [11.34] ***de este capítulo.***

11.20 FUNCIONES SURYECTIVAS (EPIYECTIVAS)

Una función $f : A \to B$ se dice que es una **FUNCIÓN SURYECTIVA** *(o SOBREYECTIVA, o SOBRE)* si el RANGO de f coincide con el conjunto de llegada B ; es decir, si

$$\text{Rang}(f) = B \quad , \text{ donde } \quad \text{Rang}(f) = f(A)$$

Por ejemplo, la función $f : [-1, 2] \to [0, 4]$, tal que $f(x) = x^2$, es SURYECTIVA, pues

$\forall\, x \in \text{Dom}\, f$:

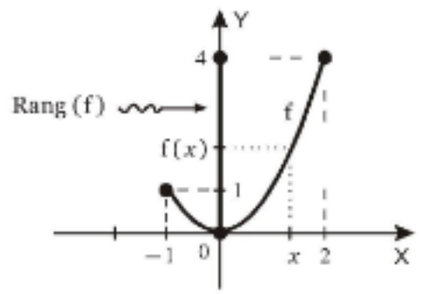
$-1 \leq x \leq 2$

$\Rightarrow \quad 0 \leq x^2 \leq 4$

$\Rightarrow \quad f(x) = x^2 \in [0, 4]$

es decir

$\text{Rang}(f) = [0, 4] = B$.



En cambio, la función $g : [-1, 2] \to [0, 5] = B$, tal que $g(x) = x^2$ con $x \in [-1, 2] = \text{Dom}\, g$, no es suryectiva pues $\text{Rang}(g) = [0, 4] \neq B = [0, 5]$.

11.21 NOTA .- De la definición de FUNCIÓN SURYECTIVA , se sigue que toda función de la forma $f : A \to \text{Rang}(f)$ siempre será SURYECTIVA, pues $\text{Rang}(f)$ coincide precisamente con el conjunto de llegada.

11.22 EJERCICIO .- Demuestre que $f : [0, 2) \to \langle -\infty, 0]$, tal que $f(x) = x/(x-2)$, es suryectiva.

SOLUCIÓN .- $A = [0, 2\rangle = \text{Dom}\, f$, $B = \langle -\infty, 0]$, entonces

$$y = f(x) = x/(x-2) \quad \Leftrightarrow \quad xy - 2y = x \quad \Leftrightarrow \quad x = 2y/(y-1)$$

y como $x = 2y/(y-1) \in [0, 2\rangle = A \quad \Leftrightarrow \quad 0 \leq 2y/(y-1) < 2$

$$\Leftrightarrow \quad y/(y-1) \geq 0 \;\wedge\; y/(y-1) < 1$$

$$\Leftrightarrow \quad y \in (\langle -\infty, 0] \cup \langle 1, \infty\rangle) \cap \langle -\infty, 1\rangle = \langle -\infty, 0]$$

$$\Leftrightarrow \quad y \in \langle -\infty, 0] = \text{Rang}(f) = B.$$

Luego, f es suryectiva.

Como vemos, para comprobar que una función $f : A \to B$ es suryectiva, basta hallar el rango de f , y ver si coincide con el conjunto de llegada B.

11.23 EJERCICIO.- Si $f : \mathbb{R} \to B$ es una función suryectiva tal que $f(x) = |x - 2| - x$, halle el conjunto B.

SOLUCIÓN .- $\mathbb{R} = \langle -\infty, 2\rangle \cup [2, \infty\rangle$. Calculando por partes:

a) $\forall\, x \in \langle -\infty, 2\rangle$: $|x - 2| = 2 - x$, entonces:

$$x < 2 \quad \Leftrightarrow \quad -x > -2 \quad \Leftrightarrow \quad 1 - x > -1$$

$$\Leftrightarrow \quad 2(1 - x) > -2$$

$\Leftrightarrow \quad f(x) = |x-2| - x = (2-x) - x = 2(1-x) \in \langle -2, \infty \rangle$.

b) $\forall\ x \in [2, \infty\rangle$: $|x-2| = x-2$, entonces,

$f(x) = (x-2) - x = -2 \quad \Leftrightarrow \quad f(x) \in \{-2\}$.

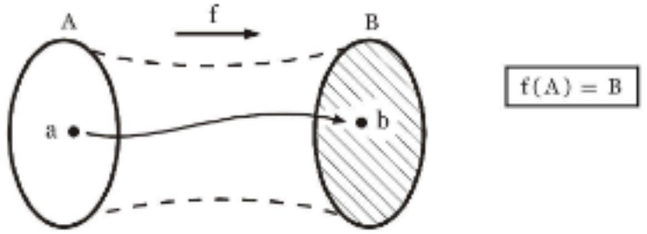
Así, de (a) y (b), tenemos que el $\text{Rang}(f) = \langle -2, \infty \rangle \cup \{-2\} = [-2, \infty\rangle$.
Como f debe ser suryectiva, entonces $B = [-2, \infty\rangle$.

11.24 EJERCICIO .- Dada la función $f: A \to B$ donde A y B son conjuntos finitos, ¿cuáles son verdaderas? :

I) f inyectiva $\Rightarrow$ $n(A) \leq n(B)$ [n = número de elementos]
II) f suryectiva $\Rightarrow$ $n(B) \leq n(A)$
III) $n(B) \leq n(A) \Rightarrow$ f es suryectiva.

RESPUESTA: Sólo (I) y (II).

11.25 TEOREMA .- Una función $f: A \to B$ es SURYECTIVA si y sólo si para cada elemento $b \in B$ existe un elemento $a \in \text{Dom}\, f = A$ (al menos uno), tal que $\boxed{b = f(a)}$.



$\boxed{f(A) = B}$

Así : f **es SURYECTIVA** $\Leftrightarrow \quad B = f(A) = \text{Rang}(f)$.

11.26 EJERCICIO .- Sean $A = \{1,2,3\}$ y $B = \{1,2,3,4\}$.
Si $f = \{(3,1),(x,3),(2,3)\}$ es una función de A en B, $g = \{(3,1),(y,z),(1,3)\}$ es una función inyectiva de A en A, y si $h = \{(1,1),(2,w),(3,2),(4,2)\}$ es una función suryectiva de B en A, halle el valor de: $yz - (x-w)$.

SOLUCIÓN .- Por ser f función de A en B: $x = 1$; y por ser g una función inyectiva de A en A: $(y,z) = (2,2) \Rightarrow y = 2$, $z = 2$; y por ser h una función suryectiva de B en A: $w = 3$, para que el rango de h sea $\text{Rang}(h) = A = \{1,2,3\}$. Por lo tanto,

$$yz - (x-w) = (2)(2) - (1-3) = 4 - (-2) = 6 .$$

11.27 EJERCICIO .- Sea $f: X \to Y$. Demuestre que f es SURYECTIVA si y sólo si, ***para cualquier subconjunto*** $B \subset Y$:

$$f(f^{-1}(B)) = B .$$

SOLUCIÓN .- ($\Rightarrow$) Suponiendo que f es suryectiva:

Sea $y \in f(f^{-1}(B)) \quad \Leftrightarrow \quad y = f(z)$, para algún $z \in f^{-1}(B) \subset X$

$\Leftrightarrow \quad y = f(z)$, $f(z) \in B$, $z \in X \quad \Leftrightarrow \quad y \in B$ [dato]

Luego, $f(f^{-1}(B)) = B$, por la doble inclusión.

($\Leftarrow$) Suponiendo que $f(f^{-1}(B)) = B$, $\forall\ B \subset Y$,

y tomando en particular $B = Y$: $f(f^{-1}(Y)) = Y$,

y como $f^{-1}(Y) = X = \text{Dom}\, f$, entonces $f(X) = Y$;

Esto indica que la función $f: X \to Y$ es SURYECTIVA .

11.28 FUNCIONES BIYECTIVAS

Una función $f: A \to B$ se llama ***FUNCIÓN BIYECTIVA*** si es que f es a la vez inyectiva y suryectiva.

11.29 EJERCICIO. Halle el conjunto A para que la función $f: A \to [3, \infty\rangle$ tal que $f(x) = 9/(4-x^2)$, sea biyectiva. (Dos soluciones).

SOLUCIÓN .- Por ser f suryectiva: $f(A) = \text{Rang}(f) = B$, entonces

$\forall\ f(x) \in f(A)$: $\quad f(x) = \dfrac{9}{4-x^2} \in B = [3, \infty\rangle \quad \Leftrightarrow \quad \dfrac{9}{4-x^2} \geq 3$

$\Leftrightarrow \quad \dfrac{3}{4-x^2} - 1 \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \dfrac{x^2-1}{x^2-4} \leq 0$

$\Leftrightarrow \quad 1 \leq x^2 < 4 \quad \Leftrightarrow \quad x \in \langle -2, -1] \cup [1, 2\rangle$.

Y como f debe ser inyectiva, y por la expresión x^2 en $f(x)$, entonces:

a) $A = \langle -2, -1]$, o b) $A = [1, 2\rangle$ (Dos soluciones).

11.30 EJERCICIO. Dada la función $f: A \to B$, $f(x) = \dfrac{1}{ax+b}$ determine las constantes a y b para que f sea biyectiva, cuando:

1) $A = [1, 4]$ y $B = [-4, 5]$
2) $A = [1, 4]$ y $B = [2, 6]$

SOLUCIÓN .- 1) Como debe ser $\text{Rang}(f) = B = [-4, 5]$ y puesto que $0 \in [-4, 5]$, entonces debería existir algún $x \in A = [1, 4]$ tal que $f(x) = 1/(ax + b) = 0$, pero esto es imposible pues una expresión de la forma $\frac{1}{ax + b}$ nunca se hace CERO.

Así, en el caso [1] no existen tales valores de a y b.

2) Para que f sea inyectiva, es suficiente que sea $a \neq 0$, y además, $\forall\, x \in [1, 4]$, $f(x) = \frac{1}{ax + b} \in [2, 6]$

$$\Leftrightarrow \quad 2 \leq \frac{1}{ax + b} \leq 6 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{6} \leq ax + b \leq \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{1}{6} - b \leq ax \leq \frac{1}{2} - b \quad \ldots (*)$$

entonces: i) 1ª Soluc.: $a > 0$, $(*) \Leftrightarrow \frac{1}{a}(\frac{1}{6} - b) \leq x \leq \frac{1}{a}(\frac{1}{2} - b)$

y como debe cumplirse que: $1 \leq x \leq 4$, se tiene que

$$\frac{1}{a}(\frac{1}{6} - b) = 1 \ \wedge \ \frac{1}{a}(\frac{1}{2} - b) = 4$$

$$\Rightarrow \quad a + b = \frac{1}{6} \ \wedge \ 4a + b = \frac{1}{2} \ \Rightarrow \ a = 1/9 \ , \ b = 1/18 \ .$$

ii) 2ª Soluc.: $a < 0$, $(*) \Leftrightarrow \frac{1}{a}(\frac{1}{2} - b) \leq x \leq \frac{1}{a}(\frac{1}{6} - b)$

y como debe cumplirse que: $1 \leq x \leq 4$, se tiene que

$$\frac{1}{a}(\frac{1}{2} - b) = 1 \ \wedge \ \frac{1}{a}(\frac{1}{6} - b) = 4$$

$$\Rightarrow \quad a + b = \frac{1}{2} \ \wedge \ 4a + b = \frac{1}{6} \ \Rightarrow \quad a = -1/9 \ , \ b = 11/18 \ .$$

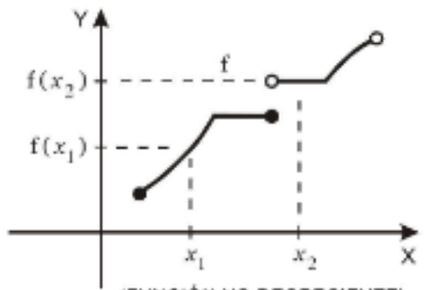
11. 31 FUNCIONES MONÓTONAS CRECIENTES Y DECRECIENTES

1) Una función f se llama ***NO DECRECIENTE***, si para $x_1, x_2 \in \text{Dom}\, f$:

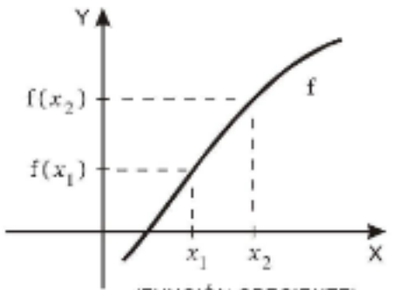
$$x_1 < x_2 \quad \Rightarrow \quad f(x_1) \leq f(x_2)$$

2) Una función f se llama ***CRECIENTE*** (o ESTRICTAMENTE CRECIENTE), si para $x_1, x_2 \in \text{Dom}\, f$:

$$x_1 < x_2 \quad \Rightarrow \quad f(x_1) < f(x_2)$$



(FUNCIÓN NO DECRECIENTE)



(FUNCIÓN CRECIENTE)

Así por ejemplo, la función $f(x) = [\![x]\!]$ es una función ***NO DECRECIENTE***, pues su gráfica o bien sube o se mantiene constante, pero no baja, conforme x va de izquierda a derecha:

$$x_1 \leq x_2 \ \Rightarrow \ [\![x_1]\!] \leq [\![x_2]\!] \ \Rightarrow \ f(x_1) \leq f(x_2)$$

En cambio, la función $f(x) = 2x^3 - 1$ es ***CRECIENTE***, pues su gráfica siempre está subiendo, lo cual analíticamente se verifica como sigue:

$$x_1 < x_2 \ \Rightarrow \ x_1^3 < x_2^3 \ \Rightarrow \ 2x_1^3 < 2x_2^3 \ \Rightarrow \ 2x_1^3 - 1 < 2x_2^3 - 1$$

$$\Rightarrow \ f(x_1) < f(x_2).$$

3) Una función f se llama ***NO CRECIENTE***, si para $x_1, x_2 \in \text{Dom}\, f$:

$$x_1 < x_2 \quad \Rightarrow \quad f(x_1) \geq f(x_2)$$

Este tipo de funciones se caracteriza porque su gráfica o bien baja, o bien se mantiene constante, pero no sube, conforme x va de izquierda a derecha.

4) Una función f se llama ***DECRECIENTE*** (o ESTRICTAMENTE DECRECIENTE), si para $x_1, x_2 \in \text{Dom}\, f$:

$$x_1 < x_2 \quad \Rightarrow \quad f(x_1) > f(x_2)$$

5) Una función f se llama ***MONÓTONA***, si es que f corresponde a alguno de los 4 tipos antes mencionados.

11.32 TEOREMA .- Si una función f es CRECIENTE, entonces f es *univalente* (***inyectiva***).

SOLUCIÓN .- Sean $x_1, x_2 \in \text{Dom}\, f$, tales que $x_1 \neq x_2$, entonces se pueden presentar los siguientes dos casos:

a) $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$ [f creciente] $\Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$

b) $x_1 > x_2 \Rightarrow x_2 < x_1 \Rightarrow f(x_2) < f(x_1) \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$

en ambos casos concluimos que $f(x_1) \neq f(x_2)$, lo cual prueba que f es inyectiva por la definición equivalente [11.2]. Por analogía: [11.33].

11.33 TEOREMA .- Si f es una función DECRECIENTE, entonces f es univalente (inyectiva).

11.34 CÁLCULO DE RANGOS DE FUNCIONES INYECTIVAS MONÓTONAS

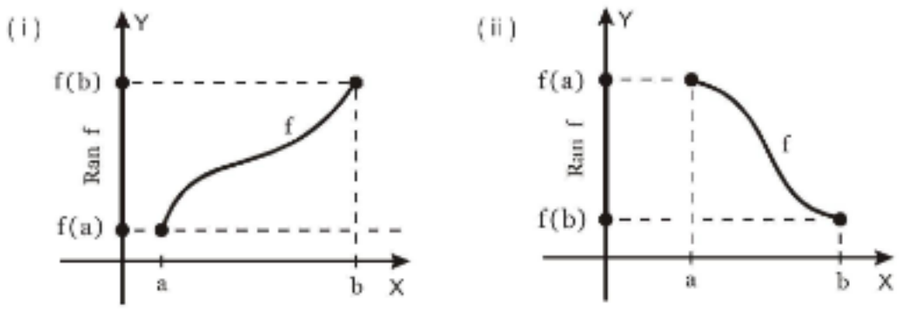
Esta técnica es sumamente útil para encontrar los rangos de aquellas funciones inyectivas que satisfacen los siguientes tres requisitos:

(1) La función f es inyectiva.
(2) Su dominio es un INTERVALO: $\text{Dom } f = [a, b]$, $a, b \in \mathbb{R}$.
(3) Su gráfica consiste de una sola línea o curva ***continua, de un solo trazo, sin saltos bruscos verticales.***

Entonces su RANGO se halla calculando solamente los valores $f(a)$ y $f(b)$ en los extremos del Dominio de $f = [a, b]$, y estableciendo dicho RANGO en la forma siguiente:

i) $\text{Rang}(f) = [f(a), f(b)]$, si $f(a) < f(b)$

o ii) $\text{Rang}(f) = [f(b), f(a)]$, si $f(a) > f(b)$



Y en el caso en que $\text{Dom } f = \langle a, b \rangle$, y si existiera "f(a)", entonces

i') $\text{Rang}(f) = \langle f(a), f(b)] $, si $f(a) < f(b)$

o ii') $\text{Rang}(f) = [f(b), f(a)\rangle$, si $f(a) > f(b)$.

11.35 EJERCICIO .- Pruebe que la siguiente función es inyectiva:

$$f(x) = \sqrt{4 - x} - [\![2x]\!]\sqrt{x - 3}, \quad x \in [3, 4].$$

SOLUCIÓN.- En forma equivalente tenemos que:

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{4 - x} - 6\sqrt{x - 3}, & x \in [3, 7/2\rangle \quad \ldots (f_1) \\ \sqrt{4 - x} - 7\sqrt{x - 3}, & x \in [7/2, 4\rangle \quad \ldots (f_2) \\ -8, & x = 4 \quad \ldots (f_3) \end{cases}$$

La función f_1 resulta inyectiva. En efecto, sean $x_1, x_2 \in [3, 7/2\rangle$:

Si $f_1(x_1) = f_1(x_2) \Rightarrow \sqrt{4 - x_1} - 6\sqrt{x_1 - 3} = \sqrt{4 - x_2} - 6\sqrt{x_2 - 3}$

$$\Rightarrow \sqrt{4 - x_1} - \sqrt{4 - x_2} = 6[\sqrt{x_1 - 3} - \sqrt{x_2 - 3}],$$

$$\Rightarrow \frac{(x_2 - x_1)}{\sqrt{4 - x_1} + \sqrt{4 - x_2}} = \frac{-6(x_2 - x_1)}{\sqrt{x_1 - 3} + \sqrt{x_2 - 3}}, \quad \text{entonces:}$$

a) $x_2 - x_1 = 0$ o b) $x_2 - x_1 \neq 0$

pero, la posibilidad (b) no procede, pues si así fuera, al cancelar la expresión $(x_2 - x_1) \neq 0$ se obtendría:

$$1/(\sqrt{4 - x_1} + \sqrt{4 - x_2}) = -6/(\sqrt{x_1 - 3} + \sqrt{x_2 - 3}),$$

lo cual es ABSURDO pues por la forma que tienen, el 1^{er} miembro es > 0 (positivo), mientras que el 2° miembro es < 0 (negativo).

Así, sólo procede la posibilidad (a): $x_2 - x_1 = 0 \Rightarrow x_1 = x_2$.

Luego, f_1 es inyectiva.

Análogamente, se prueba que f_2 y f_3 son inyectivas. Y utilizando la técnica [11.34], encontramos los rangos de las funciones parciales:

$\text{Ran}(f_1) = \langle -5/\sqrt{2}, 1]$, $\text{Ran}(f_2) = \langle -7, -3\sqrt{2}]$, $\text{Ran}(f_3) = \{-8\}$

los cuales son disjuntos por pares (dos a dos).

Por lo tanto, la función dada f resulta ser inyectiva.

11.36 EJERCICIO .- Demuestre que la función $f(x) = \dfrac{x}{1 + x^2}$, $x \in [-1, 1\rangle$, es inyectiva, y halle su rango.

SOLUCIÓN .- Sean $x_1, x_2 \in [-1, 1\rangle = \text{Dom } f \quad \ldots (*)$

Si $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow \dfrac{x_1}{1 + x_1^2} = \dfrac{x_2}{1 + x_2^2} \Rightarrow x_1 + x_1x_2^2 = x_2 + x_1^2x_2$

$$\Rightarrow x_1 - x_2 + x_1x_2(x_2 - x_1) = 0 \Rightarrow (x_1 - x_2)[1 - x_1x_2] = 0$$

$\Rightarrow$ a) $(x_1 - x_2) = 0$ o b) $(1 - x_1 x_2) = 0$

Pero, del dato:

$$-1 \le x_1 < 1 \quad , \quad -1 \le x_2 < 1 :$$

$$\Rightarrow \text{ o } \begin{cases} -1 < x_1 x_2 < 1 \ , \\ x_1 x_2 = 1 \ \Rightarrow \ [x_1 = -1 \ , \ x_2 = -1] \quad (\Rightarrow \ x_1 = x_2) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 1 - x_1 x_2 \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_1 \ , \ x_2 \in [-1, 1\rangle \ , \ x_1 \neq -1, \ x_2 \neq -1 \\ 1 - x_1 x_2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_1 = x_2 = -1 \ , \end{cases}$$

Por lo tanto, en ambos casos (a) y (b) se concluye que $x_1 = x_2$, resultando así que la función f es inyectiva.

CÁLCULO DEL RANGO DE $f(x) = \dfrac{x}{(1 + x^2)}$, $x \in [-1, 1\rangle$:

Utilizando la técnica de [11.34] , y sabiendo que $f(-1) = -1/2$, "f(1)" $= 1/2$ entonces

$$\text{Ran}(f) = [-1/2, 1/2\rangle \ .$$

SERIE DE EJERCICIOS

1. Dadas las funciones f , g y h con dominios $A = \{2, 4, 6, 8\}$, y conjuntos de llegada $B = \{2, 3, 5, 8\}$, $f = \{(2,3),(4,5),(8,8),(6,3)\}$, $g = \{(2,2),(6,3),(4,8),(8,5)\}$, $h = \{(4,5),(2,8),(6,5),(8,2)\}$, pruebe que sólo g es inyectiva (y biyectiva), y que sólo h es suryectiva.

2. Demuestre que las siguientes funciones son univalentes:

   a) $f(x) = 3x - 2$, $x \ge 2$; d) $f(x) = \text{Sen}x$, $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

   b) $f(x) = (x - h)^2 + k$, $x \ge h$; e) $f(x) = 1/x$

   c) $f(x) = 2 - x^3$, $x \in \mathbb{R}$; f) $f(x) = \sqrt{9 + x^2}$, $x \ge 1$,

   en forma analítica y gráfica.

3. Pruebe que la función $f(x) = a(x - h)^2 + k$, $a \neq 0$, es inyectiva sobre cada uno de los siguientes dominios :

   a) $\text{Dom}\, f = [h, \infty\rangle$, b) $\text{Dom}\, f = \langle -\infty, h]$.

4. Pruebe que la función $f(x) = \dfrac{x}{1 + x}$, $x \in \langle -1, \infty\rangle$ es inyectiva.

5. Si $f(x) = \sqrt{x^3}$, $g(x) = [\![x^2 + x]\!]$, halle una función $h(x)$ tal que $g(x) = (h \circ f)(x)$.

6. Sean $A = \{a, b, c\}$. ¿Cuál es el número máximo de funciones biyectivas $f : A \to A$? . ¿Cuál es dicho número si $A = \{a, b, c, d\}$?

7. Si $f(x) = px^2 + qx + r$, con $p > 0$, $x \in \mathbb{R}$ ¿para cuales de los siguientes intervalos del Dominio de f , la función f será inyectiva? :

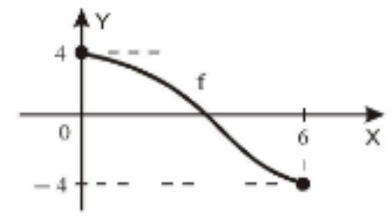
   a) $[-q/(2p), \infty\rangle$ b) $[(10p - q)/(2p), \infty\rangle$

   c) $[(-q - 6p)/(2p), \infty\rangle$ d) $\langle -\infty, -q/(2p)]$.

8. Sea $f : A \to B$ una aplicación tal que $f(x) = 2x - 1$, y $C = \{x \in \mathbb{R} / 2/(x - 3) < -1\} \subset B$, halle el conjunto PREIMAGEN $f^{-1}(C)$.

9. Dadas las funciones reales: $f(x) = 3x + 2|x|$; $g(x) = (x + 1)/(x - 2)$, $x \neq 2$; $h(x) = 3x + 7$; $p(x) = x + 2|x|$; ¿Cuáles son inyectivas?.

10. Dada la gráfica de la función $f : [0, 6] \to [-4, 4]$

    ¿Cuáles son verdaderas? :

    a) f es biyectiva

    b) $|f|$ no es biyectiva.

    c) Si $h(x) = f(x) + 4$, $\forall\, x \in [0, 6]$, entonces $\text{Ran}(h) = \text{Ran}(|f|)$.

11. Halle dos funciones univalentes diferentes cuyo producto sea una función univalente, cuyo dominio no sea un conjunto unitario.

12. Halle B para que la función $f : \mathbb{R} - \{5\} \to B$ tal que $f(x) = \dfrac{x^2 - 25}{x - 5}$ sea biyectiva.

13. Sea $f : \mathbb{R} \to (\mathbb{R} - M)$, $f(x) = \begin{cases} 3 \ , & \text{si} \quad x = 4 \\ x/(x - 4) \ , & \text{si} \quad x \neq 4 \end{cases}$

    Si f es suryectiva, halle $\text{Ran}(f)$ y el conjunto M.

14. Sean $f : A \to B$, $g : B \to C$, demuestre que:
    (1) $g \circ f$ suryectiva $\Rightarrow$ g suryectiva
    (2) $g \circ f$ inyectiva $\Rightarrow$ f inyectiva .

15. Halle B para que la función f sea suryectiva:

    a) $f : (-1, 0] \to B$, $f(x) = (x + 1)/(x^2 - 1)$

    b) $f : \langle 1, 2] \to B$, $f(x) = (x + 1)/(x^2 - 1)$.

16. Para que la función $f : [2, 8\rangle \to [a, b\rangle$ tal que $f(x) = x^2 - 4x + 7$ sea biyectiva, ¿cuáles son los valores de a y b ? . (Complete cuadrados)

17. Halle a y b para que $f:[a,b]\to[-1,5]$ tal que $f(x)=\sqrt[3]{x-1}$ sea una función biyectiva.

18. Sea $f:[2,5]\to[2,5]$, $f(x)=(ax+b+1)/(ax+b)$, determine los valores de a y b, si existen, para que f sea una función biyectiva.

19. Halle a y b para que $f:[b,-2]\to[a,-1/24]$ sea una función biyectiva, donde $f(x)=1/(6x+6)$.

20. Halle a y b para que $f:[1,4]\to[-2,5]$, sea una función biyectiva, donde $f(x)=(ax+b+1)/(ax+b)$.

21. Halle cuatro funciones $f:\langle 0,5\rangle\to\langle 0,1\rangle$, que sean biyectivas.

22. Dadas las funciones:

$$f(x)=\begin{cases}0 & , & x<0\\ x^2 & , & x\in[0,2]\\ \pi & , & x>2\end{cases}\quad;\qquad g(x)=\begin{cases}2 & , & x<0\\ 4x & , & x\in[0,1]\\ -1 & , & x>1\end{cases}$$

Halle $(f\circ g)$, y determine si es inyectiva o no.

23. Halle una función $f:\langle a,b\rangle\to\langle 0,1\rangle$, con $a<b$, que sea biyectiva y:
a) creciente, b) decreciente.

CLAVE DE RESPUESTAS

5. $h(z)=\left[\!\left[z^{4/3}+z^{2/3}\right]\!\right]$, $h(x)=\left[\!\left[x^{4/3}+x^{2/3}\right]\!\right]$.
6. $3!=6$; $4!=24$. 7. Sólo (a), (b) y (d). Complete cuadrados.
8. $C=\langle 1,3\rangle$, $f^{-1}(C)=\langle 1,2\rangle$.
9. Sólo f, g y h. Grafique la función $p(x)$, en particular.
10. Sólo (a) y (b). 11. $f(x)=x^3$, $g(x)=1/x$, $x>0$.
12. $B=\mathbb{R}-\{10\}$. 13. $\mathrm{Ran}(f)=(\mathbb{R}-\{1\})\cup\{3\}=\mathbb{R}-\{1\}$, $M=\{1\}$
14. (1) $g\circ f:A\to C$. Siendo $g\circ f$ suryectiva: $\forall\, c\in C$, existe $a\in A$ tal que $(g\circ f)(a)=c\ \Rightarrow\ g(f(a))=c$.
Entonces denotando $b=f(a)$, existe $b\in B$ tal que $g(b)=c$.
Por lo tanto $g:B\to C$ resulta ser suryectiva.
(2) Sean $x_1, x_2\subset \mathrm{Dom}\, f$, tales que $f(x_1)=f(x_2)\ \Rightarrow$
$g(f(x_1))=g(f(x_2))\ \Rightarrow\ (g\circ f)(x_1)=(g\circ f)(x_2)$
$\Rightarrow$ [Por ser $g\circ f$ suryectiva] $x_1=x_2$. Así, f es inyectiva.
15. a) $B=[-1,-1/2\rangle$, b) $B=[1,\infty\rangle$.
16. $a=3$, $b=39$. Pruebe previamente que f es inyectiva.
17. $a=0$, $b=126$. 18. $(a,b)=(1/4,-1/4)$ ó $(-1/4,3/2)$.

19. $a=-1/6$, $b=-5$. 20. Tales valores de a y b no existen.
21. $f(x)=x/5$, $f(x)=x^2/25$, $f(x)=x^3/125$, $f(x)=\sqrt{5x}/5$.
22.
$$(f\circ g)(x)=\begin{cases}4 & , & x<0\\ 16x^2 & , & x\in[0,1/2]\\ \pi & , & x\in\langle 1/2,1]\\ 0 & , & x>1\end{cases}$$
y como la primera función parcial no es univalente, entonces toda la función $f\circ g$ ya no es univalente.
23. a) $f(x)=(x-a)/(b-a)$, b) $f(x)=1-[(x-a)/(b-a)]$.

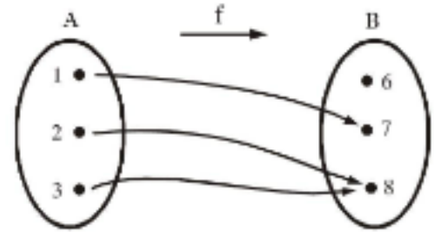
12. FUNCIONES INVERSAS

Dada la función $f:A\to B$, sabemos que f es una ***RELACIÓN*** (subconjunto de $A\times B$) que se puede expresar como:

$$f=\{(x,f(x))\ /\ x\in A\}\quad,\quad A=\mathrm{Dom}\, f,$$

y que puede ser por ejemplo, para $A=\{1,2,3\}$ y $B=\{6,7,8\}$ la función $f=\{(1,7),(2,8),(3,8)\}$

Podemos representar gráficamente esta función como en la figura adjunta.



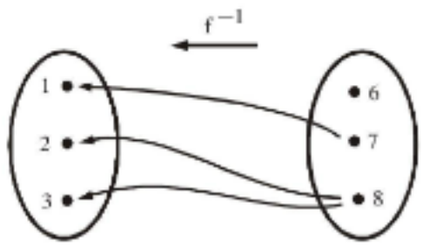
Sin embargo, para una función f dada, ***NO SIEMPRE LA RELACIÓN INVERSA*** f^{-1} ***RESULTA SER UNA FUNCIÓN***

$$f^{-1}=f^{*}=\{(f(x),x)\ /\ x\in A\}\quad,\quad A=\mathrm{Dom}\, f,$$

como en el ejemplo anterior, para el cual la relación inversa

$$f^{-1}=\{(7,1),(8,2),(8,3)\}\quad \textit{NO ES UNA FUNCIÓN},$$

pues se tiene dos pares ordenados distintos con la misma primera componente: $(8,2)$ y $(8,3)$.



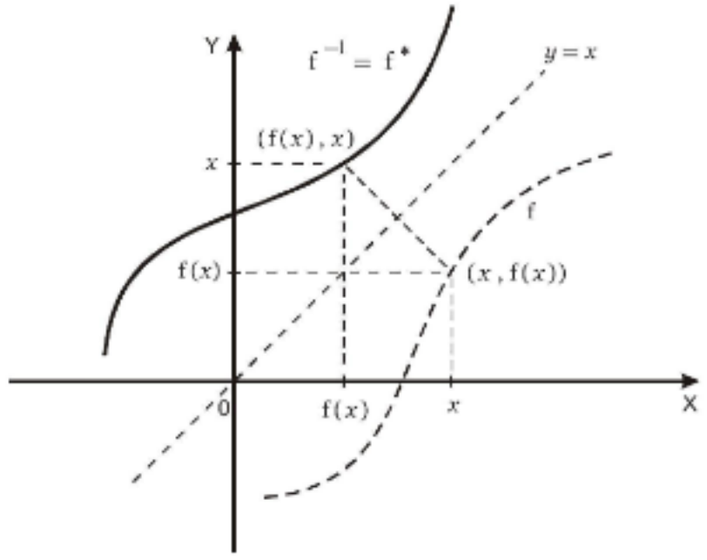
Recordemos que a la relación inversa de cualquier relación R se le denota ya sea como R^{-1} o como R^*. Ver RELACIONES INVERSAS. Capítulo [10] Sección [4].

En esa sección vimos que la gráfica de la relación inversa f^{-1} se halla reflejando la gráfica de la relación original f a través de la recta $L: y = x$ que sirve como EJE DE SIMETRÍA, actuando como Espejo Doble.

*"Dada una función f, para que su relación inversa f^{-1} constituya una **FUNCIÓN** de la variable x, la gráfica de f^{-1} debe satisfacer que **TODA VERTICAL DEL PLANO XY debe cortarla a lo más en un punto.***

*Esto equivale a que **A LA GRÁFICA DE f TODA RECTA HORIZONTAL DEBE CORTARLA A LO MÁS EN UN PUNTO,** debido a la simetría respecto a la recta $L: y = x$".*

Analíticamente, esto quiere decir que la función f debe ser INYECTIVA necesariamente, tal como se ilustra en la figura siguiente.



En tal caso, tenemos que la relación inversa:

$$f^* = f^{-1} = \{ (f(x),\ x) \ / \ x \in \text{Dom}\, f \} \qquad \ldots (\alpha)$$

es realmente ***UNA FUNCIÓN***, llamada la ***FUNCIÓN INVERSA*** de f.

De la existencia de la función f^{-1} resulta que esta función inversa f^{-1} también es UNIVALENTE, y por lo tanto también tiene su función inversa $(f^{-1})^{-1}$, descrita por:

$$(f^{-1})^{-1} = \{ (x, f(x)) \ / \ x \in \text{Dom}\, f \}$$

de donde vemos que $\boxed{(f^{-1})^{-1} = f}$.

[La función inversa de la inversa de f es la misma función f].

Asimismo, de la definición (α), tenemos que

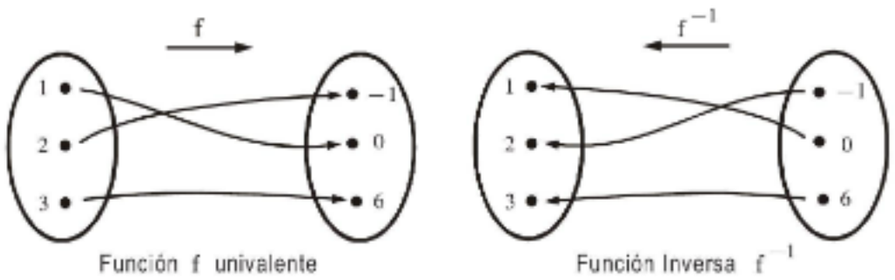
$$\text{Dom}\, f^{-1} = \text{Ran}\,(f) \qquad \text{Ran}\, f^{-1} = \text{Dom}\,(f)$$

12.1 EJEMPLO.- Dada la función $f = \{(1,0),(2,-1),(3,6)\}$, inyectiva, su función inversa f^{-1} es

$$f^{-1} = \{(0,1),(-1,2),(6,3)\}$$

y podemos verificar que: $\text{Dom}\, f^{-1} = \{0, -1, 6\} = \text{Ran}\,(f)$

$\text{Ran}\, f^{-1} = \{1, 2, 3\} = \text{Dom}\,(f)$



12.2 NOTA.-

1.- Una función $f = \{(x, f(x)) \ / \ x \in \text{Dom}\, f\}$ tiene función inversa f^{-1} si y sólo si f es inyectiva.

2.- Una función $f: A \to B$ (aplicación), tiene función inversa $f^{-1}: B \to A$, si y solamente si f es biyectiva.

3.- Una función $f: A \to B$ (aplicación), tiene su función inversa $f^{-1}: \text{Ran}\,(f) \to A$, (aplicación), si y solamente si f es inyectiva.

4.- Toda función de la forma $f: A \to B$, (aplicación), que es inyectiva, tiene función inversa $f^{-1}: \text{Ran}(f) \to A$.

5.- Toda función inyectiva $f: A \to \text{Ran}(f)$ tiene función inversa $f^{-1}: \text{Ran}(f) \to A$, la cual resulta ser biyectiva, así como f .

12.3 PROPIEDAD FUNDAMENTAL DE LAS FUNCIONES INVERSAS

Dada una función inyectiva f tenemos que

$$f = \{ (x, y) \ / \ y = f(x) \ , \ x \in \text{Dom } f \} \quad \Rightarrow \quad y = f(x)$$

$$f^{-1} = \{ (y, x) \ / \ y = f(x) \ , \ x \in \text{Dom } f \} \quad \Rightarrow \quad x = f^{-1}(y)$$

pues $(y, x) \in f^{-1} \quad \Leftrightarrow \quad x = f^{-1}(y)$. Es decir,

$$\boxed{y = f(x) \quad \Leftrightarrow \quad x = f^{-1}(y)} \quad , \quad \forall \ x \in \text{Dom } f \quad \ldots (\alpha)$$

Así obtenemos la siguiente ***PROPIEDAD FUNDAMENTAL DE LAS FUNCIONES INVERSAS:***

$$\boxed{\begin{array}{lll} \text{a)} & f^{-1}(f(x)) = x \ , & \forall \ x \in \text{Dom } f \\ \text{b)} & f(f^{-1}(y)) = y \ , & \forall \ y \in \text{Ran } f = \text{Dom } f^{-1} \end{array}}$$

La prueba de esta propiedad se sigue de (α):

$$\forall \ x \in \text{Dom } f \quad , \quad f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(y) = x$$

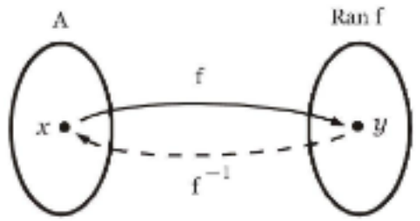
$$\forall \ y \in \text{Ran } f = \text{Dom } f^{-1} \quad , \quad f(f^{-1}(y)) = f(x) = y \ .$$

Recordemos que la notación I representa a la función IDENTIDAD, y que I_S o $I_{|S}$ o $Id_{|S}$ representa la función RESTRICCIÓN de la Función IDENTIDAD sobre el subconjunto $S \subset \mathbb{R}$. Entonces, las propiedades (a) y (b) que acabamos de enunciar, se pueden expresar como:

$$\begin{cases} f^{-1} \circ f = Id_{|\text{Dom } f} = \text{Identidad sobre Dom } f \\ f \circ f^{-1} = Id_{|\text{Ran } f} = \text{Identidad sobre Ran } f \end{cases}$$

Por lo tanto, también se cumple que

i) $\text{Dom}(f^{-1} \circ f) = \text{Dom } f$, ii) $\text{Dom}(f \circ f^{-1}) = \text{Ran } f = \text{Dom } f^{-1}$



$$\boxed{y = f(x) \quad \Leftrightarrow \quad x = f^{-1}(y)} \quad \ldots (\beta)$$

12.4 EJERCICIO .- Sean f y g dos funciones biyectivas tales que

$$(f \circ g)(\tfrac{2}{5}) = \tfrac{3}{4} \ , \quad f(\tfrac{2}{5}) = \tfrac{4}{3} \ , \quad f^{-1}(\tfrac{3}{4}) = \tfrac{1}{2} \ ,$$

halle: a) $g^{-1}(\tfrac{1}{2})$, b) $(f \circ g^{-1})(\tfrac{1}{2})$.

SOLUCIÓN .- Ambas funciones tienen funciones inversas por ser biyectivas.

a) De $f^{-1}(\tfrac{3}{4}) = \tfrac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad f(\tfrac{1}{2}) = \tfrac{3}{4}$ ... [por (β)]

y de $f(g(\tfrac{2}{5})) = \tfrac{3}{4} = f(\tfrac{1}{2})$, y por ser f inyectiva , entonces

$g(\tfrac{2}{5}) = \tfrac{1}{2}$, lo cual implica que $g^{-1}(\tfrac{1}{2}) = \tfrac{2}{5}$.

b) $(f \circ g^{-1})(\tfrac{1}{2}) = f(g^{-1}(\tfrac{1}{2})) = f(\tfrac{2}{5}) = \tfrac{4}{3}$ .. [por (a) y el dato].

12.5 EJERCICIO .- Dada la función $f = \{(1, 0), (2, 5), (3, 6), (7, 7) \}$

halle: f^{-1}, $f \circ (f^{-1})$ y $f^{-1} \circ f$.

SOLUCIÓN .- $f^{-1} = \{(0, 1), (5, 2), (6, 3), (7, 7) \}$ ... (función inversa)

a) $\text{Dom}(f \circ f^{-1}) = \text{Dom}(f^{-1}) = \text{Ran}(f) = \{0, 5, 6, 7 \}$

$$f \circ f^{-1} = \{(0, f(f^{-1}(0))), (5, f(f^{-1}(5))), (6, f(f^{-1}(6))), (7, f(f^{-1}(7)))\}$$

$$= \{ (0, f(1)), (5, f(2)), (6, f(3)), (7, f(7)) \}$$

$$= \{(0,0), (5,5), (6,6), (7,7)\} = Id_{|\text{Ran } f} \ .$$

b) $f^{-1} \circ f = \{(1,1), (2,2), (3,3), (7,7)\} = Id_{|\text{Dom } f}$ (verificar).

12.6 CÁLCULO DE LA FUNCIÓN INVERSA

La relación $\boxed{y = f(x) \quad \Leftrightarrow \quad x = f^{-1}(y)}$ nos indica el camino a seguir para hallar la regla de correspondencia de $f^{-1}(y)$ en términos de la variable (símbolo) "y" :

1°) Se parte de la regla de correspondencia de: $y = f(x)$.

2°) Se despeja la variable x en términos de la variable "y", y al resultado lo etiquetamos:

$$x = \text{Expresión en términos de la variable "}y\text{"} = \boxed{f^{-1}(y)}$$

3°) Se calcula el $\text{RANG}(f)$, el cual será igual al $\text{Dom } f^{-1}$.

Así, obtenemos tanto el dominio como la regla de correspondencia de f^{-1} .

12.7 EJERCICIO .- Si $y = f(x) = 2x - 7$, $x \in \langle 0, 5]$, entonces la función f es univalente (inyectiva) (verificar). Luego, existe la función inversa f^{-1} cuya regla de correspondencia determinaremos:

$$y = f(x) = 2x - 7 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{1}{2}(y + 7) \quad \Rightarrow \quad f^{-1}(y) = x = \frac{1}{2}(y + 7)$$

$$\Rightarrow \quad f^{-1}(y) = \frac{1}{2}(y + 7) \qquad \ldots (\alpha)$$

El dominio de f^{-1} es el rango de f :

$$\forall\, x \in \langle 0, 5] = \text{Dom } f, \quad 0 < x \leq 5 \quad \Leftrightarrow \quad 0 < 2x \leq 10$$

$$\Leftrightarrow \quad -7 < 2x - 7 \leq 3$$

$$\Leftrightarrow \quad y = f(x) \in \langle -7, 3] = \text{Ran } f$$

Luego, $\text{Dom } f^{-1} = \text{Rang } f = \langle -7, 3]$.

Por lo tanto, la función inversa f^{-1} está determinada por

$$f^{-1}(y) = \frac{1}{2}(y + 7) , \quad y \in \langle -7, 3] = \text{Dom } f^{-1} \qquad \ldots (\delta)$$

Lo que se hace EN GENERAL, es reemplazar el SÍMBOLO "y" por el SÍMBOLO x .

Así, en (δ) :

$$\boxed{f^{-1}(x) = \frac{1}{2}(x + 7) , \quad x \in \langle -7, 3] = \text{Dom } f^{-1}}$$

12.8 EJERCICIO .- Halle y grafique la función inversa, si existe, de

$$y = f(x) = x^2 - 2x - 1 , \quad x \geq 2 .$$

SOLUCIÓN .- Completando cuadrados $y = f(x) = (x - 1)^2 - 2$, $x \geq 2$, vemos que f es inyectiva, y que su rango es $R_f = [-1, \infty\rangle$.

Luego, $\text{Dom } f^{-1} = [-1, \infty\rangle = R_f$. Además, despejando x de:

$$y = (x - 1)^2 - 2 \quad \Leftrightarrow \quad (x - 1)^2 = y + 2 \quad \Leftrightarrow \quad |x - 1| = \sqrt{y + 2}$$

$$\Leftrightarrow \quad x - 1 = \sqrt{y + 2} \ , \ \text{pues} \quad x \geq 2 \ [\text{Dom } f]$$

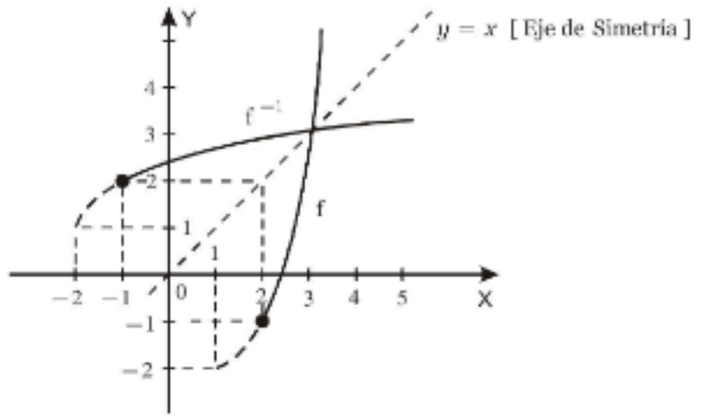
$$\Leftrightarrow \quad x = 1 + \sqrt{y + 2} \ , \ \text{denotamos} \quad x = f^{-1}(y)$$

Por lo tanto,

$$f^{-1}(y) = 1 + \sqrt{y + 2} , \quad y \in [-1, \infty\rangle = R_f = \text{Dom } f^{-1}$$

o regresando al ***símbolo*** x :

$$f^{-1}(x) = 1 + \sqrt{x + 2} , \quad x \in [-1, \infty\rangle = \text{Dom } f^{-1}$$



12.9 EJERCICIO .- Dada la función $g = \{ (x, \sqrt{4 - x}) / \ -5 < x \leq 3 \ \}$ halle la función g^{-1}, si existe.

SOLUCIÓN.- Del dato: $g(x) = \sqrt{4 - x}$, $x \in \langle -5, 3]$. La función g es inyectiva: en efecto, sean $x_1, x_2 \in \langle -5, 3]$, y

$$g(x_1) = g(x_2) \quad \Rightarrow \quad \sqrt{4 - x_1} = \sqrt{4 - x_2} \quad \Rightarrow \quad 4 - x_1 = 4 - x_2$$

$$\Rightarrow \quad -x_1 = -x_2 \quad \Rightarrow \quad x_1 = x_2 .$$

Luego, existe la función inversa g^{-1}. De la fórmula

$$y = g(x) = \sqrt{4 - x} \quad \Rightarrow \quad 4 - x = y^2 \quad \Rightarrow \quad x = 4 - y^2 , \quad [x = g^{-1}(y)]$$

$\Rightarrow \quad g^{-1}(y) = 4 - y^2$. Y como se puede verificar que

$\text{Ran}(g) = [1, 3\rangle = \text{Dom } g^{-1}$, entonces la función inversa g^{-1} es:

$g^{-1}(y) = 4 - y^2, \quad y \in [1, 3\rangle = \text{Dom } g^{-1}$, y regresando al ***símbolo*** x :

$g^{-1}(x) = 4 - x^2, \quad x \in [1, 3\rangle = \text{Dom } g^{-1}$.

12.10 EJERCICIO .- Dadas las funciones $f = \{(x, x^2) / \sqrt{x}\,(x-3) \geq 0\}$
$g = \{(x, \sqrt{4-x}) / \; x \in \langle -5, 3]\}$, halle, si existe, la función $f \circ (g^{-1})$.

SOLUCIÓN .- Como $\sqrt{x}\,(x-3) \geq 0 \;\Leftrightarrow\; x \in \{0\} \cup [3, \infty\rangle$, entonces
$f(x) = x^2, \; x \in \{0\} \cup [3, \infty\rangle = \text{Dom } f$, y por el EJERCICIO [12.9] previo, $g^{-1}(x) = 4 - x^2, \quad x \in [1, 3\rangle = \text{Dom } g^{-1}$

luego, $\text{Dom } f \circ (g^{-1}) = \{x \in \text{Dom } g^{-1} \; / \; g^{-1}(x) \in \text{Dom } f\}$
$= \{x \in [1, 3\rangle \; / \; 4 - x^2 \in \{0\} \cup [3, \infty\rangle\}$
$= [1, 3\rangle \cap ([-1, 1] \cup \{\pm 2\}) = \{1, 2\}$

$\Rightarrow \; f \circ (g^{-1}) = \{(1, f(g^{-1}(1))), (2, f(g^{-1}(2)))\}$
$= \{(1, f(3)), (2, f(0))\} = \{(1, 9), (2, 0)\}$.

12.11 EJERCICIO .- Halle la función f^{-1}, si existe, para

$$f(x) = (|x-5| + 1 + x)\sqrt{5-x} \; .$$

SOLUCIÓN .- Del radical resulta: $\text{Dom } f = \langle -\infty, 5]$;
y para x aquí : $x \in \text{Dom } f = \langle -\infty, 5]$: $|x-5| = 5 - x$,
$f(x) = (5 - x + 1 + x)\sqrt{5-x} = 6\sqrt{5-x}, \quad x \in \langle -\infty, 5]$.

Se verifica fácilmente que esta función es inyectiva, y por lo tanto, tiene función inversa. Como su rango es $\text{Ran}(f) = [0, \infty\rangle$, entonces

$\text{Dom } f^{-1} = \text{Ran}(f) = [0, \infty\rangle$,

$y = f(x) = 6\sqrt{5-x} \;\Leftrightarrow\; (y/6)^2 = 5 - x \;\Leftrightarrow\; x = 5 - (y^2/36)$

$\Leftrightarrow \; f^{-1}(y) = x = 5 - (y^2/36)$. Luego ,

$f^{-1}(y) = 5 - (y^2/36) = \frac{1}{36}(180 - y^2), \quad y \in [0, \infty\rangle = \text{Dom } f^{-1}$,

y regresando al símbolo x : $f^{-1}(x) = \frac{1}{36}(180 - x^2), \quad x \in [0, \infty\rangle$.

12.12 EJERCICIO .- Halle la función inversa, si existe, de la función

$$f(x) = \sqrt[3]{\frac{5|x| - x + 3}{4x^{3/2} + 3x^{1/2}}} \; .$$

SOLUCIÓN .- Del denominador, una mínima restricción para x es que:
$x \geq 0$, $x \neq 0$, luego, $|x| = x$,

$$y = f(x) = \sqrt[3]{\frac{5|x| - x + 3}{\sqrt{x}\,(4x+3)}} = \sqrt[3]{\frac{(4x+3)}{\sqrt{x}\,(4x+3)}} = \sqrt[3]{\frac{1}{\sqrt{x}}} = \frac{1}{\sqrt[6]{x}}$$

Así, $x \in \text{Dom } f = \langle 0, \infty\rangle$. Se prueba que f es inyectiva, por lo que existe la función inversa f^{-1}. Y como $\text{Ran}(f) = \langle 0, \infty\rangle$ también, y

$$y = f(x) = \frac{1}{\sqrt[6]{x}} \;\Leftrightarrow\; \sqrt[6]{x} = \frac{1}{y} \;\Leftrightarrow\; x = \frac{1}{y^6} \quad \ldots$$

$[x = f^{-1}(y)]$ entonces $f^{-1}(y) = x = \frac{1}{y^6}$.

Luego, $f^{-1}(y) = \frac{1}{y^6}$, $y \in \text{Dom } f^{-1} = \text{Ran}(f) = \langle 0, \infty\rangle$.

Regresando al ***símbolo*** x : $f^{-1}(x) = \frac{1}{x^6}$, $x \in \langle 0, \infty\rangle = \text{Dom } f^{-1}$.

12.13 EJERCICIO .- Halle la función inversa, si existe, para

$$f(x) = \frac{|x+4|}{|x-1| - 1} \quad , \quad x \in \langle -2, 0\rangle \cup \langle 0, 1\rangle \; .$$

SOLUCIÓN .- $\forall\, x \in \text{Dom } f = \langle -2, 0\rangle \cup \langle 0, 1\rangle$:

$$\begin{cases} x > -2 > -4 \;\Rightarrow\; x + 4 > 0 \;\Rightarrow\; |x+4| = x + 4 \\ x < 1 \;\Rightarrow\; x - 1 < 0 \;\Rightarrow\; |x-1| = 1 - x \end{cases}$$

Luego,

$$y = f(x) = \frac{x+4}{(1-x) - 1} = \frac{x+4}{-x} = -1 - (\frac{4}{x}) \; ,$$

y en esta forma, se puede probar que f es inyectiva y que por lo tanto tiene función inversa f^{-1} . Además, de la fórmula:

$$y = -1 - (\frac{4}{x}) \;\Rightarrow\; x = \frac{-4}{y+1} \;\Rightarrow\; f^{-1}(y) = x = \frac{-4}{y+1}$$

Y como del $\text{Dom } f$: $x = -4/(y+1) \in \langle -2, 0\rangle \cup \langle 0, 1\rangle$

$\Leftrightarrow \; y \in \langle -\infty, -5\rangle \cup \langle 1, \infty\rangle = \text{Ran}(f) = \text{Dom } f^{-1}$,

así $f^{-1}(y) = -4/(y+1)$, $y \in \text{Dom } f^{-1} = \langle -\infty, -5\rangle \cup \langle 1, \infty\rangle$

y regresando al ***símbolo*** x , f^{-1} también se puede expresar en la forma:

$$f^{-1}(x) = -4/(x+1), \quad x \in \text{Dom } f^{-1} = \langle -\infty, -5\rangle \cup \langle 1, \infty\rangle.$$

12.14 EJERCICIO .- Halle la función inversa, si existe, para la función

$$f(x) = x^2 + 4x - 1 \ , \quad x \in \langle -4, -3] \qquad \ldots (\beta)$$

SOLUCIÓN. Complet. cuadr.: $f(x) = (x+2)^2 - 5$, $-4 < x \le -3 < -2$, (α)

PRUEBA DE QUE f ES INYECTIVA : Para $x_1, x_2 \in \langle -4, -3]$,

$$\begin{aligned} f(x_1) = f(x_2) &\Rightarrow (x_1+2)^2 - 5 = (x_2+2)^2 - 5 \\ &\Rightarrow (x_1+2)^2 = (x_2+2)^2 \\ &\Rightarrow |x_1+2| = |x_2+2| \\ [\text{de } (\alpha):] &\Rightarrow -(x_1+2) = -(x_2+2) \Rightarrow x_1+2 = x_2+2 \\ &\Rightarrow x_1 = x_2 \end{aligned}$$

Luego, existe la función inversa f^{-1}.

Y se puede probar que $\text{Ran}(f) = [-4, -1\rangle$, y así $\text{Dom } f^{-1} = [-4, -1\rangle$.

Además, de $y = f(x) = (x+2)^2 - 5 \Rightarrow (x+2)^2 = y+5$

$$\Rightarrow |x+2| = \sqrt{y+5}$$

$$[\text{de } (\alpha):] \Rightarrow -(x+2) = \sqrt{y+5}$$

$$\Rightarrow x = -2 - \sqrt{y+5} = f^{-1}(y) \ , \quad y \in [-4, -1\rangle$$

Regresando al símbolo x : $f^{-1}(x) = -2 - \sqrt{x+5}$, $x \in [-4, -1\rangle$.

12.15 EJERCICIO. Dadas las funciones $f(x) = \sqrt{48 + 2x - x^2}$, $|x+1| \le 5$, $g(x) = -1 + [3/(x+3)]$, para $x \in \langle -3, 3]$, halle, si existe, la función inversa $(f \circ g)^{-1}$.

SOLUCIÓN .- La función $f \circ g$ existe, pero no es inyectiva. Ejercicio [11.16].
Por lo tanto, no existe la función inversa $(f \circ g)^{-1}$.

12.16 EJERCICIO .- Demuestre que si f es una función IMPAR en $[-a, a]$, y si tiene función inversa f^{-1}, entonces f^{-1} también es una función IMPAR.

SOLUCIÓN .- $\text{Dom } f = [-a, a]$. $\text{Dom } f^{-1} = \text{Ran } f^{-1}$:

i) Sea $y \in \text{Dom } f^{-1}$, probaremos que: $-y \in \text{Dom } f^{-1}$:

$y \in \text{Dom } f^{-1} = \text{Ran } f \Rightarrow$ existe $x_1 \in [-a, a]$ tal que $f(x_1) = y$,
además $-x_1 \in [-a, a] = \text{Dom } f \Rightarrow f(-x_1)$ está definido
y como $f(-x_1) = -f(x_1) = -y \Rightarrow -y \in \text{Ran } f = \text{Dom } f^{-1}$.

ii) De $(-y) = f(-x_1) \Rightarrow f^{-1}(-y) = -x_1 = -f^{-1}(y)$

Por lo tanto, f^{-1} es una **FUNCIÓN IMPAR** .

12.17 FUNCIÓN INVERSA DE UNA COMPOSICIÓN

Si dos funciones f y g son AMBAS UNIVALENTES, y si existe la función compuesta $f \circ g$, entonces ésta también es ***univalente***, existiendo así su función inversa $(f \circ g)^{-1}$.

En tal caso, se cumple la propiedad siguiente:

$$\boxed{(f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}}$$ ***El orden aquí es muy importante.***

Verifiquemos esta propiedad en el ejercicio siguiente.

12.18 EJEMPLO .- Dadas las funciones: $f(x) = 3\sqrt{-x}$, $x \in [-4, -1\rangle$
$g(x) = -x^2$, $x \in \langle 2, \infty\rangle$

se prueba fácilmente que:

a) $(f \circ g)(x) = 3x$, $x \in \langle 2, 4]$ ... Inyectiva
$(g \circ f)(x) = 9x$, $x \in [-16, -1\rangle$ ... Inyectiva

b) Como f y g son ambas univalentes, existen sus inversas f^{-1} y g^{-1} :
$f^{-1}(x) = -x^2/9$, $x \in \langle 3, 12]$, $g^{-1}(x) = \sqrt{-x}$, $x \in \langle -\infty, -4\rangle$

c) De (a), existen las funciones inversas $(f \circ g)^{-1}$ y $(g \circ f)^{-1}$:
$(f \circ g)^{-1}(x) = x/3$, $x \in \langle 6, 12]$
$(g \circ f)^{-1}(x) = x/9$, $x \in [-144, -9\rangle$.

d) Calculando $f^{-1} \circ g^{-1}$ y $g^{-1} \circ f^{-1}$:
$(f^{-1} \circ g^{-1})(x) = x/9$, $x \in [-144, -9\rangle$

$(g^{-1} \circ f^{-1})(x) = x/3 \quad , \quad x \in \langle 6, 12]$

De esta manera, de (c) y (d), verificamos ***directamente*** que, en efecto, $(f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$ así como $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

12.19 NOTA .- Una o ambas de las funciones f y g pueden no ser univalentes, y sin embargo existir la función:

$$(f \circ g)^{-1}$$

Lo que ocurre en este caso es que ***YA NO SE APLICA LA RELACIÓN***

$$(f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$$

debido a que la composición $g^{-1} \circ f^{-1}$ de la derecha ***no tiene sentido***, pues al menos una de las funciones f^{-1}, g^{-1} (o ambas) no existe. En cambio, si ambas inversas f^{-1} y g^{-1} existen, así como la composición $g^{-1} \circ f^{-1}$, entonces SÍ ES VÁLIDA la fórmula: $(f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$.

12.20 EJERCICIO .- Las funciones $f = \{ (1, 2), (2, 2), (3, 7), (5, 6) \}$ y

$$g = \{ (-2, 0), (0, 0), (4, 1), (8, 3), (9, 5) \}$$

NO SON INYECTIVAS, luego no existen sus funciones inversas f^{-1} ni g^{-1}.

Sin embargo, $f \circ g = \{ (4, 2), (8, 7), (9, 6) \}$ *SÍ ES INYECTIVA*, existiendo, por lo tanto, su función inversa:

$$(f \circ g)^{-1} = \{ (2, 4), (7, 8), (6, 9) \} .$$

Así, en este caso, ***no se aplica la fórmula***: $(f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$.

12.21 EJERCICIO .- Si $f(x) = x^2 - 2x + 2 = (x-1)^2 + 1$, $x \in [-3, 4]$, $g(x) = x + 1$, $x \in \langle 0, 5 \rangle$, halle $(f \circ g)^{-1}$, si existe.

SOLUCIÓN .- La función f ***no es univalente***, pues $f(0) = f(2) = 2$, así que f no tiene función inversa, y por lo tanto no se puede aplicar la fórmula $(f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$ la cual se cumple si ambas f y g tienen funciones inversas.

Sin embargo, ***EXISTE LA COMPOSICIÓN*** $f \circ g$:

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = x^2 + 1 \quad , \quad x \in \langle 0, 3] = \text{Dom}\,(f \circ g)$$

LA CUAL RESULTA SER UNA FUNCIÓN UNIVALENTE, existiendo por lo tanto su función inversa

$$(f \circ g)^{-1}(x) = \sqrt{x - 1} \quad , \quad x \in \langle 1, 10] .$$

12.22 EJERCICIO .- Dadas las funciones $f(x) = 4|x| - x^2$, $x \in \langle -7, 1 \rangle$ $g(x) = \sqrt{1 - x}$, $x \in [-5, 0 \rangle$ se tiene que :

a) f no tiene función inversa f^{-1}, pues $f(-1/2) = f(1/2) = 7/4$, lo que implica que f no es univalente.

b) La composición $g \circ f$ sí existe:

$(g \circ f)(x) = \sqrt{1 + 4x + x^2} = \sqrt{(x+2)^2 - 3}$, $x \in [-5, -4 \rangle$, y además es univalente.

c) De (b), la función $(g \circ f)^{-1}$ existe, y es tal que

$(g \circ f)^{-1}(x) = -2 - \sqrt{x^2 + 3}$, $x \in \langle 1, \sqrt{6}]$.

d) La composición $f \circ g$ no existe, pues

$$\text{Dom}\,(f) \cap \text{Ran}\,(g) = \langle -7, 1 \rangle \cap \langle 1, \sqrt{6}] = \varnothing$$

y por lo tanto, tampoco existe la inversa $(f \circ g)^{-1}$.

12.23 NOTA .- Cuando una función UNIVALENTE f es de la forma:

$$y = f(x) = \begin{cases} f_1(x) & , \quad x \in \text{Dom}\, f_1 = A_1 \\ f_2(x) & , \quad x \in \text{Dom}\, f_2 = A_2 \end{cases} ,$$

su función inversa f^{-1} se halla calculando la función inversa de cada una de las funciones parciales f_1 y f_2 en sus correspondientes dominios:

$$x = f^{-1}(y) = \begin{cases} f_1^{-1}(y) & , \quad y \in \text{Dom}\, f_1^{-1} = \text{Ran}\,(f_1) \\ f_2^{-1}(y) & , \quad y \in \text{Dom}\, f_2^{-1} = \text{Ran}\,(f_2) \end{cases}$$

donde $\text{Dom}\, f^{-1} = \text{Ran}\,(f_1) \cup \text{Ran}\,(f_2)$.

Esta técnica se generaliza al caso de funciones UNIVALENTES f, constituidas por tres o más funciones parciales.

12.24 EJERCICIO .- Halle la función inversa, si existe, de la función:

$$f(x) = \begin{cases} (x-1)^2 + (x+1)^2 \ , \ x > 1 & .. (f_1) \\ -1 - (x-1)^2 \ , \ x < -1 & .. (f_2) \end{cases}$$

SOLUCIÓN .- $f_1(x) = 2(x^2 + 1)$, $x > 1$. Se verifica fácilmente que f_1 y f_2

son inyectivas, y que $\text{Ran}(f_1) \cap \text{Ran}(f_2) = \langle 4, \infty \rangle \cap \langle -\infty, -5 \rangle = \varnothing$, por lo cual la función f resulta ser univalente, y así tiene función inversa:

$$f^{-1}(x) = \begin{cases} \sqrt{(x-2)/2} & , \quad x > 4 \\ 1 - \sqrt{-(x+1)} & , \quad x < -5 \, . \end{cases}$$

En efecto, por ejemplo, para f_2: Sea $x < -1$, $y = -1 - (x-1)^2$

$$\Rightarrow \quad (x-1)^2 = -(y+1) \quad \Rightarrow \quad |x-1| = \sqrt{-(y+1)}$$

y como $x < -1 < 1 \Rightarrow x - 1 < 0$ entonces $|x-1| = 1 - x$,

$$\Rightarrow \quad 1 - x = \sqrt{-(y+1)}$$

$$\Rightarrow \quad x = 1 - \sqrt{-(y+1)} = f^{-1}(y)$$

Además, $x < -1 \Leftrightarrow x - 1 < -2$

$$\Rightarrow \quad (x-1)^2 > 4 \quad \Rightarrow \quad -(x-1)^2 < -4$$

$$\Rightarrow \quad y = -1 - (x-1)^2 < -5$$

$$\Rightarrow \quad y \in \langle -\infty, -5 \rangle = \underline{\text{Ran}(f_2)} = \underline{\text{Dom}\, f_2^{-1}} \, .$$

12.25 EJERCICIO .- Halle la función inversa f^{-1}, si existe, para:

$$f(x) = \begin{cases} x + 2 & , \quad x \leq 2 & \ldots \quad (f_1) \\ \sqrt{9x - 2} & , \quad x \in \langle 2, 3 \rangle & \ldots \quad (f_2) \\ (x-3)^2 + 5 & , \quad x > 3 & \ldots \quad (f_3) \end{cases}$$

SOLUCIÓN .- Cada función parcial es univalente, donde

$\text{Ran}(f_1) = \langle -\infty, 4]$, $\text{Ran}(f_2) = \langle 4, 5 \}$, $\text{Ran}(f_3) = \langle 5, \infty \rangle$,

y siendo estos rangos disjuntos dos a dos, entonces f resulta ser univalente y tiene por lo tanto función inversa f^{-1}:

$$f^{-1}(x) = \begin{cases} x - 2 & , \quad x \in \langle -\infty, 4] \\ (x^2 + 2)/9 & , \quad x \in \langle 4, 5 \} \\ 3 + \sqrt{x - 5} & , \quad x \in \langle 5, \infty \rangle \end{cases}$$

12.26 EJERCICIO .- Halle la función inversa f^{-1}, si existe, de:

$$f(x) = \begin{cases} 3 + \sqrt{1 - 2x - x^2} & , \quad -2 < x < 0 & .. \quad (f_1) \\ 1 + 2|x| - x^2 & , \quad x > 0 & .. \quad (f_2) \end{cases}$$

SOLUCIÓN .- La función f no es univalente pues f_2 no lo es:

$f_2(x) = -x^2 + 2|x| + 1 = 2 - (x-1)^2$, $x > 0$, donde

$f(1/2) = f(3/2) = 7/4$. Luego, ***no existe*** la función inversa f^{-1}.

12.27 EJERCICIO .- Dadas: $f(x) = 8/(x-2)$, $x \in [0, 4] - \{2\}$,

$$g(x) = \begin{cases} (x-3)^2 & , \quad 1 \leq x < 5 \\ x + 3 & , \quad -6 \leq x < 1 \end{cases} ,$$

halle la composición $f^{-1} \circ g$, si existe.

SOLUCIÓN .- La función f es univalente. $\text{Ran}(f) = \mathbb{R} - \langle -4, 4 \rangle$, y

$f^{-1}(x) = 2 + (8/x)$, $x \in \langle -\infty, -4] \cup [4, \infty \rangle$.

Además se puede verificar que $\text{Dom}\,(f^{-1} \circ g) = \{1\}$, conjunto unitario .

Por lo tanto, $f^{-1} \circ g = \{(1, f^{-1}(g(1)))\} = \{(1, f^{-1}(4))\} = \{(1, 4)\}$.

12.28 EJERCICIO .- Halle la función inversa de $f(x) = x + \sqrt{x^2 + 1}$, $x > 1$.

SOLUCIÓN .- La función f es inyectiva. Ver el EJERCICIO 11.15. Así existe la función inversa f^{-1}. Además, de

$$y = f(x) = x + \sqrt{x^2 + 1} \quad \Rightarrow \quad y - x = \sqrt{x^2 + 1} > 0$$

$$[\, \Rightarrow \quad y > x \, , \quad x > 1 \quad \Rightarrow \quad \underline{y > 1} \quad .. \quad (\alpha) \,]$$

$$\Rightarrow \quad (y - x)^2 = x^2 + 1 \quad \Rightarrow \quad y^2 - 2xy + x^2 = x^2 + 1$$

$$\Rightarrow \quad x = (y^2 - 1)/(2y) = f^{-1}(y) \quad .. \quad (\beta)$$

Como $\underline{x > 1}$, $x = \dfrac{y^2 - 1}{2y} > 1 \quad \Leftrightarrow \quad \dfrac{y^2 - 2y - 1}{2y} > 0$

$$\Leftrightarrow \quad (y-1)^2 - 2 > 0 \qquad [\text{ pues } y > 0 \text{ , de } (\alpha)]$$

$$\Leftrightarrow \quad y > 1 + \sqrt{2} \quad \Leftrightarrow \quad y \in \langle 1 + \sqrt{2} \, , \infty \rangle = \text{Ran}(f) = \text{Dom}\, f^{-1} .$$

Por lo tanto, $f^{-1}(y) = (y^2 - 1)/(2y)$, $y \in \langle 1 + \sqrt{2} \, , \infty \rangle$, de (β).

Y con el símbolo $\underline{x}$: $f^{-1}(x) = (x^2 - 1)/(2x)$, $x \in \langle 1 + \sqrt{2} \, , \infty \rangle$.

12.29 EJERCICIO .- Dada $f(x) = 2x + \sqrt{4 + x^2}$, $x \in \langle -3, 2 \rangle$.

Halle: a) f^{-1} , b) $f \circ f^{-1}$, si existen.

SOLUCIÓN .- En el Ejercicio [11.18] vimos que f es inyectiva.

Luego, f tiene función inversa f^{-1}. De la técnica [11.34], como

"$f(-3)$" $= -6 + \sqrt{13}$, "$f(2)$" $= 4 + \sqrt{8}$, entonces

$\text{Ran } f = \langle -6 + \sqrt{13} , 4 + \sqrt{8} \rangle = \text{Dom } f^{-1}$.

Además, de la definición,

$$y = 2x + \sqrt{4 + x^2} \Rightarrow (y - 2x)^2 = 4 + x^2$$
$$\Rightarrow 3x^2 - 4xy + (y^2 - 4) = 0$$

y que al resolver en la incógnita x :

$$x = \frac{1}{6}[\,4y \pm \sqrt{16y^2 - 12(y^2 - 4)}\,] = \frac{1}{3}[\,2y \pm \sqrt{y^2 + 12}\,] \quad ..(\alpha)$$

Como el par ordenado $(x, y) = (0, 2) \in f$, entonces reemplazando en (α):

$$0 = \frac{1}{3}[\,2(2) \pm \sqrt{4 + 12}\,] = \frac{1}{3}[\,4 \pm 4\,]$$

$\Rightarrow$ se cumple solamente para el signo $(-)$.

Por lo tanto, de (α) y usando el símbolo $\underline{x}$:

$$f^{-1}(x) = \frac{1}{3}[\,2x - \sqrt{x^2 + 12}\,] , \quad x \in \langle -6 + \sqrt{13} , 4 + \sqrt{8} \rangle .$$

b) Ver [12.3], (a) y (b), según lo cual:

$(f \circ f^{-1})(x) = x$, $x \in \text{Dom } f^{-1} = \langle -6 + \sqrt{13} , 4 + \sqrt{8} \rangle$

$(f^{-1} \circ f)(x) = x$, $x \in \text{Dom } f = \langle -3, 2 \rangle$.

12.30 EJERCICIO .- Sean

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x & , \quad x \in [-3, -1\rangle \\ -1 - \sqrt{x + 1} & , \quad x \in [-1, 1\rangle \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} |x|\,\text{Sgn}(x^2 + 1) & , \quad x \in [-1, 5\rangle \\ 2x - 1 & , \quad x \in \langle 2, 4\,] \end{cases}$$

Halle: a) $f \circ g$, b) $g^{-1} \circ f^{-1}$, c) $(f \circ g)^{-1}$, d) g^{-1} .

SOLUCIÓN .- $f_1(x) = x^2 + 2x = (x + 1)^2 - 1$, $x \in [-3, -1\rangle$,
vemos que f_2 ***no es inyectiva*** : $f_2(-1) = f_2(1) = 1$.

Luego, f no es inyectiva, así que ***no existe*** f^{-1}. Pero, **SÍ EXISTE** $f \circ g$:

a)
$$(f \circ g)(x) = \begin{cases} 1 & , \quad x = -1 \\ x & , \quad x \in \langle -1, 1\rangle \\ 2x - 1 & , \quad x \in \langle 2, 3\rangle \end{cases}$$

b) Como f^{-1} no existe, entonces tampoco existe la función $g^{-1} \circ f^{-1}$.

c) Vemos de (a) que $f \circ g$ es univalente, así que existe $(f \circ g)^{-1}$:

$$(f \circ g)^{-1}(x) = \begin{cases} -1 & , \quad x = 1 \\ x & , \quad x \in \langle -1, 1\rangle \\ (x + 1)/2 & , \quad x \in \langle 3, 5\rangle \end{cases}$$

d) $$g^{-1}(x) = \begin{cases} (x + 1)^2 - 1 & , \quad x \in \langle -1 - \sqrt{2} , -1\,] \\ (x + 1)/2 & , \quad x \in \langle 3, 7\,] . \end{cases}$$

12.31 EJERCICIO .- Dada $f(x) = x + \sqrt{x + 2}$, $x > 2$, halle f^{-1} si existe.

SOLUCIÓN .- $\text{Dom } f = \langle 2, \infty \rangle$. Expresando $y = f(x)$ en la forma:

$$y = f(x) = (x + 2) + \sqrt{x + 2} - 2$$
$$\Rightarrow \quad y = f(x) = [\sqrt{x + 2} + \frac{1}{2}]^2 - \frac{9}{4} \quad \ldots (\alpha)$$

De aquí se prueba fácilmente que f es univalente, es decir que:

$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$, para $x_1 , x_2 \in \text{Dom } f = \langle 2, \infty \rangle$.

Y para $x \in \text{Dom } f$: $x > 2 \Leftrightarrow x + 2 > 4 \Leftrightarrow \sqrt{x + 2} + \frac{1}{2} > \frac{5}{2}$

$$\Leftrightarrow y = [\sqrt{x + 2} + \tfrac{1}{2}]^2 - \tfrac{9}{4} > \tfrac{25}{4} - \tfrac{9}{4} = 4$$
$$\Leftrightarrow y > 4 \Leftrightarrow y \in \langle 4, \infty \rangle = \text{Ran}(f) = \text{Dom } f^{-1}$$

Despejando $\underline{x}$ en (α): $\sqrt{x + 2} + \frac{1}{2} = \sqrt{y + \frac{9}{4}} \Rightarrow$

$$\Rightarrow x = -2 + (\sqrt{y + \tfrac{9}{4}} - \tfrac{1}{2})^2 = -2 + y + \tfrac{9}{4} + \tfrac{1}{4} - \sqrt{y + \tfrac{9}{4}}$$
$$\Rightarrow x = \frac{1}{2}(2y + 1 - \sqrt{4y + 9}) .$$

Por lo tanto, la función inversa se puede expresar como:

$$f^{-1}(y) = \frac{1}{2}(2y + 1 - \sqrt{4y + 9}) , \quad y \in \langle 4, \infty \rangle = \text{Dom } f^{-1} .$$

O con el símbolo $\underline{x}$: $f^{-1}(x) = \frac{1}{2}(2x + 1 - \sqrt{4x + 9})$, $x \in \langle 4, \infty \rangle$.

12.32 EJERCICIO .- Dada $f(x) = x - \sqrt{-x}$, $x < -4$, halle la función inversa f^{-1}, si existe.

SOLUCIÓN .- Dom $f = \langle -\infty, -4 \rangle$. Expresando $f(x)$ en la forma:

$$y = f(x) = -[(-x) + \sqrt{-x} + \frac{1}{4} - \frac{1}{4}]$$

$$\Rightarrow \quad y = f(x) = \frac{1}{4} - [\sqrt{-x} + \frac{1}{2}]^2 \quad ,$$

y procediendo en la misma forma que en el EJERCICIO [12.31] previo resulta que f es univalente, y por lo tanto tiene función inversa f^{-1}:

$$f^{-1}(x) = \frac{1}{2}[2x - 1 + \sqrt{1 - 4x}] \quad , \quad x \in \langle -\infty, -6 \rangle .$$

SERIE DE EJERCICIOS

1. Si f es una función biyectiva tal que $f(\frac{p+1}{p}) = q$, $f^{-1}(q) = \frac{3p}{3p+1}$ para un p particular, halle $4p + 7$.
2. Si $h(x) = 2x^3 - 3$, $x \in \mathbb{R}$, pruebe que a) $\text{Rang}(h) = \mathbb{R}$, b) h es inyectiva, c) $h^{-1}(x) = [(x+3)/2]^{1/3}$.
3. Sea $f(x) = x/(x^2 - 4)$, $x \in [0, \infty\rangle - \{2\}$. ¿Es f inyectiva?
4. Dadas las funciones $f = \{(1,3),(7,2),(6,-1)\}$ y $g = \{(1,a),(2,b),(6,a),(7,c)\}$, ¿Cuáles son ciertas?

   I) $g \circ (f^{-1}) = \{(3,a),(-1,a),(2,c)\}$

   II) $[g \circ (f^{-1})](x_1) = [g \circ (f^{-1})](x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$.

5. Sea $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ / $f(x+3) = 3x + 2$; si $h \neq 0$, calcule $[f^{-1}(x+h) - f^{-1}(x)]/h^2$.
6. Si $f^{-1}(x) = 2x + 2b$, $b \neq 0$, y $f^{-1}(3b) = 2b^2$, halle el valor de $f(10) / f^{-1}(10)$.
7. Sean $f(x) = 4 - x$, $f^{-1}(x) = 4 - x$. ¿Cuáles verifican la misma propiedad de f ? : $H = \{(1,4),(6,3),(0,0),(4,1),(3,6)\}$,

   $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ / $g(x) = x^2$,

   $h: \mathbb{R} - \{0\} \to \mathbb{R} - \{0\}$ / $h(x) = 6/x$.

8. Halle $g(x)$ y $g^{-1}(x)$, si se sabe que:

   a) $f(x) = 1/(4x+1)$, $(g \circ f)(x) = 2x + 3$

   b) $f(x) = 3x - 2$, $(f \circ g)(x) = 2x + 4$

   c) $g(2x+3) = 4x + 5$

9. Si $f(x+5) = 1/(x+2)$, halle el valor de x que satisface la relación

$$(f^{-1} \circ f)(4/x) = 2 .$$

10. Sean $f(x) = 2x^2 - 4x - 1$, $x \in [1, \infty\rangle$, $g(x) = (x-2)/(x^2+4)$, $x \in \mathbb{R}$; halle $g \circ (f^{-1})$, si existe.
11. Sea $f(x) = (3x - 4a)/5$, $x \in \mathbb{R}$. Si se sabe que $f^{-1}(3) = 2a - 3b$, $f^{-1}(5) = 3a + b$, halle el valor de $f^{-1}(a - 3b)$.
12. Sean $f(x) = x^2$, $g(x) = ax + 1$, dos funciones con dominio $X \subset \mathbb{R}$ apropiado para que ambas sean biyectivas. Si $(f^{-1} \circ g^{-1})(3/2) = \frac{1}{2}$ calcule $(g \circ f)(-2)$.
13. Halle la función inversa de $f(x) = 3x^2 + 6$, $x \leq 0$.
14. Sea $f = \{(x,y) / y = x^2 - 1, x \leq 0\}$, ¿Cuáles son ciertas?

   I) $\text{Ran } f = [1, \infty\rangle$ III) $\text{Ran}(f/f^{-1}) = \langle -1, 0]$

   II) $f^{-1}(2a) = -\sqrt{2a+1}$ IV) $[f(x)/f^{-1}(x)] = (1-x)\sqrt{x+1}$

15. Dada la función f definida por $f(x-1) = \sqrt{x}$, halle $\text{Ran}(f)$, y evalúe $f^{-1}(-7/4)$.
16. Si $f(x-1) = 3x + 2$, $g(2x+3) = 4x + 4$, calcule $(g^{-1} \circ f)(x)$.
17. Sean $f(x) = 2x - 3$, $g(x) = (x^2 - 1)(x+1)$, $h(x) = \sqrt{4 - x^2}$, ¿Cuáles afirmaciones son verdaderas? :

   a) $\text{Dom}(h) \subset \text{Dom}(g)$, b) g es inyectiva , c) $f^{-1}(x) = (x+3)/2$.

18. Sea f una función inyectiva tal que $f^{-1}[(x-4)/(x+4)] = a$. Halle el conjunto solución de la inecuación: $f(a) \leq [(x-3)/(2x-1)]$.
19. Pruebe que $f(x) = \sqrt{[|x-4|/\sqrt{x-4}] + 1}$ es inyectiva, halle su dominio, su rango y su función inversa.
20. Halle f^{-1}, si existe, para: $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x - x^2 + 2} + 1 , & -1 \leq x \leq 1/2 \\ 2 - [7/(x+1)] , & 2 < x < 4 \end{cases}$
21. Dadas las funciones

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 , & x < -1 \\ x + 1 , & x \geq -1 \end{cases} , \quad g(x) = \begin{cases} 2x - 1 , & x < 0 \\ \sqrt{x} , & x \geq 0 , \end{cases}$$

   halle $f \circ (g^{-1})$, si existe .

22. Halle f^{-1}, si existe, para

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 4x - 1 & , \quad x \in \langle -4, -3] \\ |x+4| / (|x-1| - 1) & , \quad x \in \langle -2, 0 \rangle \cup \langle 0, 1 \rangle \end{cases} .$$

(Ver el Ejercicio resuelto [12.13]).

23. Sean $g(x) = \begin{cases} 2x^2 - 12x + 3 & , \quad x \in \langle -2, 3] \\ (x+2)/(x-3) & , \quad x > 3 \end{cases}$,

$f(x) = x/(2+x)$, $x < -2$. Halle $f^{-1} \circ g$, si existe.

24. Pruebe que f es univalente, y halle su función inversa, donde

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & , \quad x \in [1, 2\rangle \\ [\![x]\!] + \sqrt{x - [\![x]\!]} & , \quad x \in [-1, 1\rangle \\ -\sqrt{-x} & , \quad x \in [-9, -1\rangle \end{cases}$$

25. Dada la función $y = f(x) = x^2 - 2x + 4$, halle f^{-1} sabiendo que existe, que $\text{Ran}(f) = [3, \infty\rangle$, y que $(0, 4) \in f$.

26. Dada la función $f(x) = \sqrt{x/(x-4)}$, halle su función inversa, si existe, indicando el dominio y el rango de f .

27. Dada la función $f(x) = \dfrac{x^3 + 7x^2 + 14x + 8}{x^2 + 6x + 8}$,

a) Halle su dominio y probar que es inyectiva. Graficarla:

b) Halle f^{-1} y su gráfica.

28. Dada $f(x) = (ax + 7)/(2x - b)$, halle $\underline{a}$ y $\underline{b}$ tales que:

i) $\text{Dom } f^{-1} = \mathbb{R} - \{3\}$ $\wedge$ ii) $f^{-1} = f$.

29. Dada la función $f(x) = [\![x]\!] + \sqrt{x - [\![x]\!]}$, $x \in [-1, 2\rangle$,

a) Halle la gráfica de f y f^{-1} . b) Halle f^{-1} analíticamente.

30. Pruebe que $f(x) = 6\sqrt{x} - x$, $x \in [0, 1]$, tiene inversa. Halle f^{-1}.

31. Dada $g(x) = \sqrt{(x-4)/(x+7)}$, halle a) $\text{Dom } g$, b) $\text{Rang}(g)$,

c) g^{-1}, si existe.

32. Dada la función f , pruebe que existe $(1/f)^{-1}$, y hallarla:

$$f(x) = \begin{cases} x & , \quad -1 < x < 0 \\ 1 - x & , \quad 0 < x \leq 1 . \end{cases}$$

33. Halle f^{-1}, si existe, de la función $f(x) = 7 + \sqrt{x^2 - 1}$, $x \leq -\sqrt{5}$.

34. Halle todas las funciones lineales f tales que: $f^{-1} = f$.

35. Dada la función $f(x) = (3x - 7)/(x - 2)$, $x \in \{2, 3] \cup [4, \infty)$, pruebe que existe f^{-1}, y halle la función $f - f^{-1}$.

36. Sea $f(x) = x/(1 + |x|)$, $x \in \langle -1, 1\rangle$. Pruebe que f es univalente, y halle su función inversa .

37. Sea $f(x) = x/(1 - |x|)$, $x \in \langle -1, 1\rangle$. Pruebe que f es univalente, y halle su función inversa .

38. Halle f^{-1} para $f(x) = x/(1 - |x|)$, $|x| > 1$.

39. Pruebe que la siguiente función es inyectiva, y halle su función inversa f^{-1} :

$$f(x) = \begin{cases} x + \sqrt{x^2 + 1} & , \quad x > 1 \\ -\sqrt{-x^3 - 1} & , \quad x < -1 . \end{cases}$$ (Ver [12.28]).

40. Sean

$$f(x) = \begin{cases} (x+3)/(x-2) & , \quad x \in \{2, 7] \\ 1 - (x+3)^2 & , \quad x \in [-2, 0] , \end{cases}$$

$g(x) = \{ (x, \sqrt{1-x}) / \ x \in [-8, 1) \}$,

a) Pruebe que f es univalente, y halle f^{-1}.

b) Halle $g \circ f$, c) Halle $g^{-1} \circ f$.

41. Pruebe que la función H es inyectiva, y halle su función inversa H^{-1} ,

$$H(x) = \begin{cases} x + \sqrt{x+2} & , \quad x > 2 \\ x - \sqrt{-x} & , \quad x < -4 . \end{cases}$$ Ver los EJERCICIOS resueltos [12.31] y [12.32].

42. Halle f^{-1}, si existe, para $f(x) = x + \sqrt{x-2}$, $x \geq 6$.

43. Halle f^{-1}, si existe, para $f(x) = 2x - \sqrt{-x}$, $x < 0$.

44. ¿Existe f^{-1} para $f(x) = 2x - \sqrt{1 + x^2}$, $x \in \langle -3, 0]$?

45. Pruebe que f es univalente, y halle su función inversa:

$f(x) = \dfrac{x-3}{x-1} + \dfrac{1}{(x-1)^2} - 1$, $x \in \langle 1, 2\rangle$.

46. Sea $f(x) = \sqrt{x}\,[\![\sqrt{x}]\!]$, $x \in \langle 2, 9]$, halle f^{-1} .

47. Dada la función $f(x) = \text{Cos}\, x$, $x \in [0, \pi]$,

a) Grafique $f^{-1}(x) = \text{Arc Cos}\, x$, indicando su dominio A.

b) Sea $g(x) = \text{Cos}\, x$, $x \in [\pi, 2\pi]$, halle g^{-1}, si existe.

¿Es $f^{-1} = g^{-1}$? . Grafique g^{-1} ;

c) Halle las constantes r y s tales que:

$g^{-1}(x) = r\,f^{-1}(x) + s \quad , \quad \forall\, x \in A = \text{Dom}\, f^{-1}$.

CLAVE DE RESPUESTAS

1. $p = 1/4$, $4p + 7 = 8$; 3. Sí lo es ;

4. Sólo (I) ; como g no es inyectiva, no se cumple (II) ; 5. $1/(3h)$;

6. $b = 4$, $f(x) = (x - 8)/2 \quad \Rightarrow \quad f(10)/f^{-1}(10) = 1/28$.

7. Sólo H y h ; 8. a) $g^{-1}(x) = 1/(2x - 5)$, b) $g^{-1}(x) = \dfrac{3x - 6}{2}$,

8. c) $g^{-1}(x) = (x + 1)/2$; 9. $f^{-1} \circ f = \text{Id.}$, $x = 2$.

10. $(g \circ f^{-1})(x) = [(\sqrt{2x + 6} - 2)/(13 + x + 2\sqrt{2x + 6})]$, $x \geq -3$

11. $a = 90/17$, $b = -25/51$; 12. 9 ;

13. $f^{-1}(x) = -\sqrt{(x - 6)/3}$, $x \geq 6$; 14. Sólo (II) , (III) y (IV)

15. $\text{Ran}\, f = \text{Dom}\, f^{-1} = [0, \infty)$. NO existe $f^{-1}(-7/4)$; 16. $(3x + 7)/2$

17. Sólo (b) y (c); 18. C.S. $= \langle -4, 1/2 \rangle \cup [2, 8]$.

19. $\text{Dom}\, f = \langle 4, \infty \rangle$, $f(x) = \sqrt{1 + \sqrt{x - 4}}$, $\text{Ran}\, f = \langle 1, \infty \rangle \quad \Rightarrow$

$f^{-1}(x) = (x^2 - 1)^2 + 4$, $x \in \langle 1, \infty \rangle$.

20. $f^{-1}(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}[1 - \sqrt{9 - (x - 1)^2}\,] & , \quad x \in [1, 5/2] \\ (x + 5)/(2 - x) & , \quad x \in \langle -1/3, 3/5 \rangle \end{cases}$.

21. $[f \circ (g^{-1})](x) = \begin{cases} [(x + 1)/2]^2 - 1 & , \quad x < -3 \\ x^2 + 1 & , \quad x \geq 0 \end{cases}$

22. $f^{-1}(x) = \begin{cases} -2 - \sqrt{x + 5} & , \quad x \in [-4, -1) \\ -4/(x + 1) & , \quad x \in \langle -\infty, -5 \rangle \cup \langle 1, \infty \rangle \end{cases}$

23. $(f^{-1} \circ g)(x) = \begin{cases} -2(x + 2)/5 & , \quad x > 3 \\ [2(x - 3)^2 - 15]/[8 - (x - 3)^2] & , \quad -2 < x < 1; \end{cases}$

24. $f^{-1}(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & , \quad x \in [1, 4) \\ x^2 + 2x & , \quad x \in [-1, 0) \\ x^2 & , \quad x \in [0, 1) \\ -x^2 & , \quad x \in [-3, -1) \end{cases}$

25. $f^{-1}(x) = 1 - \sqrt{x - 3}$, $x \geq 3$.

26. $f^{-1}(x) = 4x^2/(x^2 - 1)$, $x \in [0, 1) \cup \langle 1, \infty \rangle$

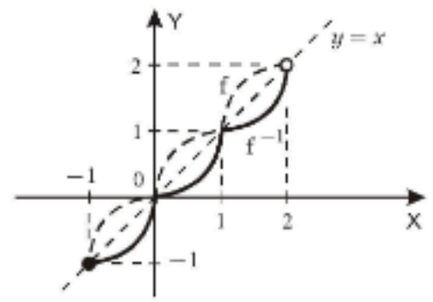
27. a) $f(x) = x + 1$, $x \in \mathbb{R} - \{-4, -2\} = \text{Dom}\, f$.

b) $f^{-1}(x) = x - 1$, $x \in \mathbb{R} - \{-3, -1\} = \text{Dom}\, f^{-1}$.

28. $a = 6$, $b = 6$.

29. $f(x) = n + \sqrt{x - n}$, $x \in [n, n + 1)$, $n \in \{-1, 0, 1\}$,

$f^{-1}(x) = n + (x - n)^2$, para $x \in [n, n + 1)$ con $n \in \{-1, 0, 1\}$.



30. $f^{-1}(x) = (3 - \sqrt{9 - x}\,)^2$, $x \in [0, 5]$, $f(x) = 9 - (3 - \sqrt{x})^2$.

31. $g^{-1}(x) = (4 + 7x^2)/(1 - x^2)$, $x \in [0, 1) \cup \langle 1, \infty \rangle$

32. $(1/f)^{-1}(x) = \begin{cases} 1/x & , \quad x < -1 \\ (x - 1)/x & , \quad x > 1 \end{cases}$.

33. $f^{-1}(x) = -\sqrt{1 + (x - 7)^2}$, $x \geq 9$.

34. i) $a = 1$, $b = 0$, $f(x) = x$.
ii) $a = -1$, b cualquier número real, $\Rightarrow$ $f(x) = -x + b$.

35. $(f - f^{-1})(x) = 1 - [1/(x - 2)] + [1/(x - 3)]$, $x \in [5/2, 3)$.

36. $f^{-1}(x) = x/(1 - |x|)$, $x \in \langle -1/2, 0 \rangle \cup [0, 1/2)$.

37. $f^{-1}(x) = x/(1 + |x|)$, $x \in \mathbb{R}$; 38. $f^{-1}(x) = x/(1 - |x|)$, $|x| > 1$

39. $f^{-1}(x) = \begin{cases} (x^2 - 1)/(2x) & , \quad x > 1 + \sqrt{2} \\ -\sqrt[3]{x^2 + 1} & , \quad x < 0 \end{cases}$

40. $f^{-1}(x) = \begin{cases} (2x + 3)/(x - 1) & , \quad x \in [2, \infty) \\ -3 + \sqrt{1 - x} & , \quad x \in [-8, 0] \end{cases}$

$(g \circ f)(x) = |x + 3| = x + 3$, $x \in [-2, 0]$

$(g^{-1} \circ f)(x) = 1 - [(x + 3)/(x - 2)]^2$, $x \in [9/2, 7]$.

41. $H^{-1}(x) = \begin{cases} (2x + 1 - \sqrt{4x + 9})/2 & , \quad x > 4 \\ (2x - 1 + \sqrt{1 - 4x})/2 & , \quad x < -6 \end{cases}$

42. $f(x) = [\sqrt{x - 2} + \frac{1}{2}]^2 + \frac{7}{4}$,

$f^{-1}(x) = \frac{1}{2}[2x + 1 - \sqrt{4x - 7}]$, $x \geq 8$

43. $f(x) = (-2)[\sqrt{-x} + \frac{1}{4}]^2 + \frac{1}{8}$, $x < 0$

$f^{-1}(x) = \frac{1}{8}[4x - 1 + \sqrt{1 - 8x}]$, $x < 0$.

44. $f^{-1}(y) = (2y + \sqrt{y^2 + 3})/3$, $y \in \langle -6 - \sqrt{10}, -1]$.

45. En la forma: $f(x) = [(2 - x)/(x - 1)]^2 - 1$, con $1 < x < 2$, se prueba que f es univalente. Además, en la forma:

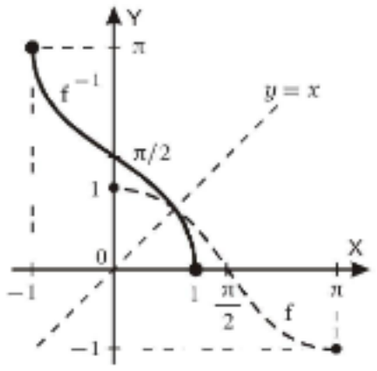
$y = f(x) = (-1 + \frac{1}{x - 1})^2 - 1$, $1 < x < 2$, hallamos tanto su rango como la regla $x = f^{-1}(y)$. Así, tenemos que,

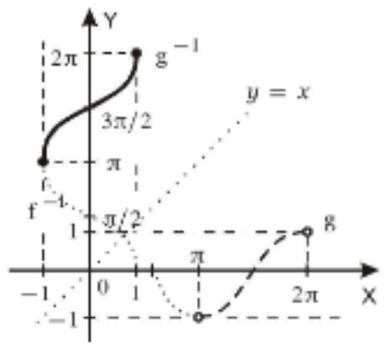
$f^{-1}(x) = 1 + [1/(1 + \sqrt{x + 1})]$, $x > -1$.

46. $f^{-1}(x) = \begin{cases} x^2 & , \quad x \in \langle \sqrt{2}, 2 \rangle \\ x^2/4 & , \quad x \in [4, 6\rangle \\ 9 & , \quad x = 9 \end{cases}$

47. a) $\text{Dom } f^{-1} = [-1, 1] = A$, $f^{-1}(x) = \text{Arc Cos } x$.

b) $g^{-1}(x) = 2\pi - \text{Arc Cos} x$, $x \in [-1, 1]$; $f^{-1} \neq g^{-1}$,





c) De las gráficas previas, vemos que: $r = -1$, $s = 2\pi$.

13. FUNCIONES EXPONENCIALES Y LOGARÍTMICAS

Muchos fenómenos naturales como por ejemplo, el crecimiento de una población de bacterias o la desintegración de un elemento radiactivo, presentan patrones de crecimiento y de decaimiento que son descritos por *FUNCIONES EXPONENCIALES*.

En esta sección estudiaremos las propiedades de tales funciones así como de sus inversas llamadas *FUNCIONES LOGARÍTMICAS*.

13.1 LEYES DE LOS EXPONENTES

Recordemos las *LEYES DE EXPONENTES*. Si a y $b \in \mathbb{R}^+$ (***números reales positivos***), y si x e y son ***números reales arbitrarios***

I) $a^x a^y = a^{x+y}$, III) $(a^x)^y = a^{xy}$

II) $\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$, IV) $(ab)^x = a^x b^x$

V) $a^0 = 1$. La expresión 0^0 no está definida.

EJEMPLOS :

a) $16^{7/4} \cdot 16^{-1/2} = 16^{7/4 - 1/2} = 16^{5/4} = (2^4)^{5/4} = 2^{4(5/4)} = 2^5 = 32$

b) $\frac{8^{5/3}}{8^{-1/3}} = 8^{5/3 - (-1/3)} = 8^2 = 64$

c) $[(16)(81)]^{-1/4} = (16^{-1/4})(81^{-1/4}) = \frac{1}{16^{1/4}} \cdot \frac{1}{81^{1/4}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$

13.2 EJERCICIO .- Resuelva la ecuación $2^{3x - 11} = 16$.

SOLUCIÓN .- $2^{3x-11} = 16 = 2^4 \Leftrightarrow 3x - 11 = 4 \Leftrightarrow 3x = 15$
$\Leftrightarrow x = 5$, puesto que $a^x = a^y \Leftrightarrow x = y$.

13.3 LA FUNCIÓN EXPONENCIAL

Como vemos, siempre que a sea un número real ***POSITIVO*** y n un número real cualquiera, entonces la expresión a^n es un número real bien definido. Esto nos permite definir la ***FUNCIÓN EXPONENCIAL*** de ***BASE*** a , cuyo dominio es todo $\mathbb{R}$:

$$y = f(x) = a^x \quad , \quad \text{con} \quad a > 0 \quad \text{y} \quad x \in \mathbb{R}$$

Esta función también es denotada como $f(x) = a^x = \exp_a(x)$.

Las Funciones Exponenciales juegan un rol muy importante en el Análisis Matemático, y debido a sus características especiales son encontradas virtualmente en todo campo donde las matemáticas se aplican.

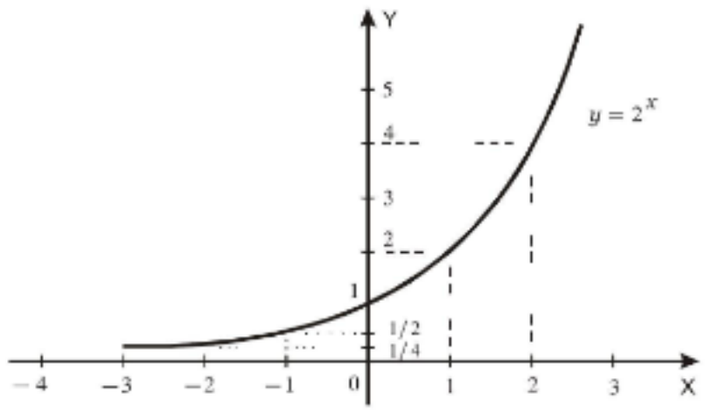
Comencemos nuestra interpretación de las funciones exponenciales estudiando sus gráficas.

13.4 EJEMPLO .- Bosqueje la gráfica de $y = f(x) = 2^x$.

SOLUCIÓN .- Sabemos que $\text{Dom } f = \mathbb{R}$. Para hallar el rango de f consideremos la siguiente tabla de valores:

x	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
$y = 2^x$	$\frac{1}{32}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8	16	32

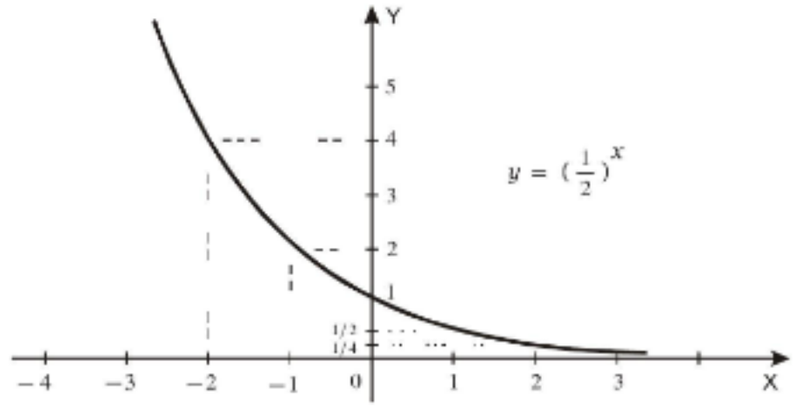
De estos cálculos vemos que 2^x decrece y se aproxima a 0 mientras x tiende a $-\infty$, y que 2^x crece sin límite hacia $+\infty$ mientras x también crece sin límite. Así, el rango de $f(x) = 2^x$ es $\langle 0, \infty \rangle$.



13.5 EJEMPLO .- Bosqueje la gráfica de $y = g(x) = (1/2)^x$.

SOLUCIÓN .- $\text{Dom } g = \mathbb{R}$,

x	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
y	32	16	8	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{32}$



Vemos que $(1/2)^x = 1/(2^x)$ crece sin límite cuando x decrece hacia $-\infty$, y que $(1/2)^x$ decrece y se aproxima a 0 cuando x crece sin límite.

Así , el rango de $g(x) = (1/2)^x$ es el intervalo $\langle 0, \infty \rangle$.

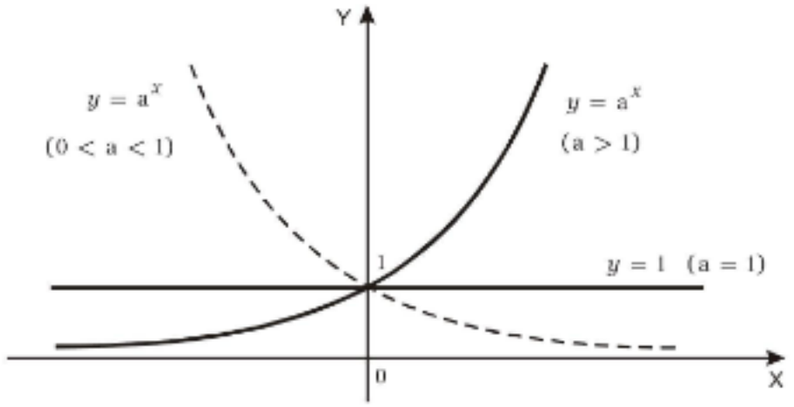
13.6 GRÁFICA DE LA FUNCIÓN EXPONENCIAL

Las funciones $y = 2^x$ y $y = (1/2)^x$ cuyas gráficas fueron estudiadas en los Ejemplos 13.4 y 13.5 son casos especiales de la Función Exponencial $f(x) = a^x$, obtenidas haciendo $a = 2$ y $a = 1/2$ respectivamente.

En general , la Función Exponencial $y = a^x$, con $a > 1$, es una función *creciente* con una gráfica similar a $y = 2^x$, mientras que la Función Exponencial $y = a^x$, con $0 < a < 1$ es una función *decreciente* cuya gráfica es similar a $y = (1/2)^x$.

Si $a = 1$ la función $y = a^x$ se reduce a la función constante $y \equiv 1$.

Para tener un esquema de comparación, las gráficas de estas tres clases de funciones exponenciales están bosquejadas a continuación.



13.7 PROPIEDADES DE LA FUNCIÓN EXPONENCIAL

En resumen, la Función Exponencial $y = a^x$, con $a > 0$, $a \neq 1$, satisface las siguientes propiedades:

(1) Tiene Dominio $= \langle -\infty, \infty \rangle = \mathbb{R}$.

(2) Tiene Rango $= \langle 0, \infty \rangle$; es decir que el valor que toma a^x es *SIEMPRE POSITIVO* : $a^x > 0$, $\forall\ x \in \langle -\infty, \infty \rangle$.

(3) Su gráfica intersecta al Eje Y en $y = 1$.

(4) Es una función *UNIVALENTE* (***inyectiva***) , y su gráfica consiste de un solo trazo continuo sobre su Dominio $\mathbb{R}$.

(5) Si la base $\underline{a}$ es $a > 1$, la función $y = a^x$ es *CRECIENTE*.

(6) Si la base $\underline{a}$ es $0 < a < 1$, la función $y = a^x$ es *DECRECIENTE*.

13.8 FUNCIÓN EXPONENCIAL DE BASE e .-

La Función Exponencial $y = e^x$ de base "e", donde e es un número irracional trascendente cuyo valor es:

$$e = 2.7182818 \ldots$$

que juega un rol muy importante en los aspectos tanto teórico como aplicados.

Se puede demostrar (aunque no lo haremos aquí) que ,

$$e = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

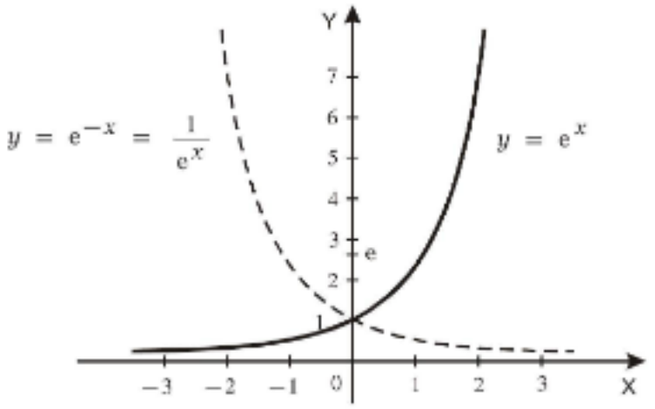
Sin embargo el estudiante debe convencerse de esta definición del número "e", examinando la siguiente tabla que se puede reconstruir con la ayuda de una calculadora de bolsillo.

n	$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$
10	2.5937424
100	2.7048138
1 000	2.7169239
10 000	2.7181459
100 000	2.7182682
1 000 000	2.7182804
10 000 000	2.7182816
100 000 000	2.7182818

13.9 EJEMPLO .- Bosqueje las gráficas de $y = e^x$ y de $y = e^{-x}$.

SOLUCIÓN .- Siendo $e = 2.7182818 \ldots$, es decir $2 < e < 3$:

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$y = e^x$	0.05	0.14	0.37	1	2.72	7.39	20.09
$y = e^{-x} = \frac{1}{e^x}$	20.09	7.39	2.72	1	0.37	0.14	0.05



13.10 EJERCICIO .- Resuelva: a) $(\sqrt{2})^{x} = 4^{x^2 + x}$

b) $3^{2x} - 12(3^{x}) + 27 < 0$

SOLUCIÓN .-

a) $[2^{1/2}]^{x} = (2^{2})^{x^2 + x} \Leftrightarrow 2^{x/2} = 2^{2(x^2 + x)} \Leftrightarrow x/2 = 2(x^2 + x)$

$\Leftrightarrow \quad x = 4x^2 + 4x \quad \Leftrightarrow \quad 4x^2 + 3x = 0$

$\Leftrightarrow \quad x(4x + 3) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0 \ \vee \ x = -3/4 \ .$

Luego, el conjunto solución es C.S. $= \{ 0, -3/4 \}$.

b) $(3^{x})^2 - 12(3^{x}) + 27 = (3^{x} - 9)(3^{x} - 3) < 0$

$\Leftrightarrow \quad 3 < 3^{x} < 9 \quad \Leftrightarrow \quad 3^{1} < 3^{x} < 3^{2} \quad \Leftrightarrow \quad 1 < x < 2 \ ,$

Donde el sentido de las desigualdades se mantiene debido a que la base de la función exponencial $y = 3^{x}$ es $a = 3$ que es > 1 , *mayor que* 1 .
Ver el TEOREMA 2.1, (I) del Capítulo [9] .

13.11 PROBLEMA .- La distribución de los ingresos anuales en cierta ciudad está descrita por el modelo exponencial:

$$y = (2{,}7)\,10^{14}\,x^{-2.8} \ ,$$

donde y es el número de familias con un ingreso anual de x dólares en promedio. ¿Cuántas familias en esta ciudad tienen un ingreso anual promedio de:

a) 1 000 dólares ?
b) 2 000 dólares ?
c) 3 000 dólares ?
d) 4 000 dólares ?
e) 6 000 dólares ?
f) 8 000 dólares ?
g) 9 000 dólares ?
h) 12 000 dólares ?

SOLUCIÓN .- Estos resultados están registrados en la siguiente tabla de valores obtenida con ayuda de una calculadora de bolsillo:

x (dólares)	y (familias)	x (dólares)	y (familias)
1 000 en prom.	1 074 889	6 000 en prom.	7 120
2 000 "	154 340	8 000 "	3 182
3 000 "	49 593	9 000 "	2 288
4 000 "	22 161	12 000 "	1 022

13.12 DEFINICIÓN DEL LOGARITMO

En muchas de las aplicaciones de la Función Exponencial, nos interesará saber cómo poder resolver ecuaciones de la forma

$$a^{x} = z \qquad \text{con} \qquad a > 0 \ , \quad a \neq 1$$

cuando z es un valor conocido y x es la incógnita por conocer.

El número x es llamado ***LOGARITMO DE z EN LA BASE*** a , y se le denota:

$$x = \text{Log}_{a} z \ , \qquad a > 0 \ , \quad a \neq 1 \ ,$$

y viene a ser el exponente al cual se debe elevar la base a para obtener el número z . Así tenemos la relación

$$\text{Log}_{a} z = x \quad \Leftrightarrow \quad z = a^{x} \ , \qquad a > 0 \ , \ a \neq 1 \ .$$

Note que toda base a de un logaritmo debe cumplir la condición que $a > 0$, $a \neq 1$. No puede ser negativa, cero, ni el número uno. Por ejemplo,

1) $\text{Log}_{3} 81 = 4$ pues $3^{4} = 81$

2) $\text{Log}_{10} 1\,000 = 3$ pues $10^{3} = 1\,000$

3) $\text{Log}_{2} (\frac{1}{32}) = -5$ pues $2^{-5} = \frac{1}{2^{5}} = \frac{1}{32}$

4) $\text{Log}_{7} 7 = 1$ pues $7^{1} = 7$

13.13 EJEMPLO .- Resuelva para x , las ecuaciones:

a) $\text{Log}_{3} x = 2$
b) $\text{Log}_{16} 4 = x$
c) $\text{Log}_{x} 125 = 3$
d) $\text{Log}_{x} \frac{1}{8} = \frac{3}{2}$

SOLUCIÓN .-

a) $\text{Log}_{3} x = 2 \quad \Leftrightarrow \quad x = 3^{2} = 9 \quad \Leftrightarrow \quad x = 9 \ .$

b) $\text{Log}_{16} 4 = x \quad \Leftrightarrow \quad 4 = 16^{x} = (4^{2})^{x} = 4^{2x}$

$\Leftrightarrow \quad 4^{1} = 4^{2x} \quad \Leftrightarrow \quad 1 = 2x \quad \Leftrightarrow \quad x = 1/2 \ .$

c) $\text{Log}_x 125 = 3 \quad \Leftrightarrow \quad 125 = x^3$

$\Leftrightarrow \quad 5^3 = x^3 \quad \Leftrightarrow \quad 5 = x \quad \Leftrightarrow \quad x = 5$.

d) $\text{Log}_x \frac{1}{8} = \frac{3}{2} \quad \Leftrightarrow \quad x^{3/2} = \frac{1}{8} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{(4^{1/2})^3}$

$\Leftrightarrow \quad x^{3/2} = \frac{1}{4^{3/2}} = (\frac{1}{4})^{3/2} \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{1}{4}$.

13.14 LOGARITMOS COMUNES Y LOGARITMOS NATURALES

Los dos sistemas de Logaritmos que se utilizan con mayor frecuencia son:

a) El sistema de LOGARITMOS COMUNES, que tiene como BASE de Logaritmos al número 10.

b) El sistema de LOGARITMOS NATURALES (o Neperianos), que tiene como BASE al número trascendental $e = 2.7182818 \ldots$.

Una notación estándar para estos sistemas es la siguiente:

a) A la expresión $\text{Log}_{10}(z)$ se le denota simplemente como $\text{Log}(z)$.

b) A la expresión $\text{Log}_e(z)$ se le denota simplemente como $\text{Ln}(z)$ o $ln(z)$.

13.15 LEYES DE LOS LOGARITMOS

Para $r > 0$, $a > 0$, $a \neq 1$:

I) $\text{Log}_a(rs) = \text{Log}_a(r) + \text{Log}_a(s)$, $s > 0$

II) $\text{Log}_a(\frac{r}{s}) = \text{Log}_a(r) - \text{Log}_a(s)$, $s > 0$

III) $\text{Log}_a(r^n) = n \text{Log}_a(r)$, $n \in \langle -\infty, \infty \rangle$

IV) $\text{Log}_a(1) = 0$, $\text{Log}_a(a) = 1$, $\text{Log}_e(e) = \text{Ln}(e) = 1$

VI) $a^{\text{Log}_a(x)} = x$, $\forall\ x > 0$

La prueba de cada una de estas Leyes de Logaritmos se realiza en base a las Leyes de los Exponentes [13.1] .

PRUEBA DE (I): Sean $u = \text{Log}_a r$, $v = \text{Log}_a s$,

$\Rightarrow \quad r = a^u$, $s = a^v \quad \Rightarrow \quad rs = a^u a^v = a^{u+v}$

$\Rightarrow \quad u + v = \text{Log}_a(rs) \quad \Rightarrow \quad \text{Log}_a r + \text{Log}_a s = \text{Log}_a(rs)$

PRUEBA DE (III): $\text{Log}_a(r^n) = n(\text{Log}_a r)$:

- Si $n = 0$, la igualdad se cumple automáticamente.
- Si $n \neq 0$, sea $u = n(\text{Log}_a r) \quad \Rightarrow \quad \frac{u}{n} = \text{Log}_a r$

$\Rightarrow \quad a^{u/n} = r \quad \Rightarrow \quad (a^{u/n})^n = r^n \quad \Rightarrow \quad a^u = r^n$

$\Rightarrow \quad u = \text{Log}_a(r^n)$, con lo cual concluye la prueba.

PRUEBA DE VI : $a^{\text{Log}_a x} = x$, $\forall\ x > 0$:

Sea $u = \text{Log}_a x \quad \Rightarrow \quad a^u = x \quad \Rightarrow \quad a^{\text{Log}_a x} = x$.

13.16 EJEMPLOS .-

a) $\text{Log}_2 15 = \text{Log}_2(5 \times 3) = \text{Log}_2(5) + \text{Log}_2(3)$

b) $\text{Log}_2(\frac{5}{8}) = \text{Log}_2(5) - \text{Log}_2(8)$

c) $\text{Log}_3 \sqrt{17} = \text{Log}_3(17^{1/2}) = \frac{1}{2}\text{Log}_3(17)$

d) $\text{Log}_4 1 = 0$ (pues $4^0 = 1$) ; e) $\text{Log}_6 6 = 1$

13.17 EJERCICIO .-

Sabiendo que: $\text{Log}_{10} 2 = 0{,}30103$, $\text{Log}_{10} 3 = 0{,}47712$, y $\text{Log}_{10} 5 = 0.69897$, evalúe

a) $\text{Log}_{10} 15$ b) $\text{Log}_{10} 7{,}5$ c) $\text{Log}_{10} 81$ d) $\text{Log}_{10} 50$.

SOLUCIÓN .-

a) $\text{Log}_{10} 15 = \text{Log}_{10}(5 \times 3) = \text{Log}_{10}(5) + \text{Log}_{10}(3)$

$= 0.69897 + 0.47712 = 1.17609$

b) $\text{Log}_{10} 7.5 = \text{Log}_{10}(15/2) = \text{Log}_{10}[(5 \times 3)/2]$

$= \text{Log}_{10}(5) + \text{Log}_{10}(3) - \text{Log}_{10}(2)$

$$= 0.69897 + 0.47712 - 0.30103 = 0.87506 .$$

c) $\text{Log}_{10} 81 = \text{Log}_{10}(3^4) = 4\,\text{Log}_{10} 3 = 4(0.47712) = 1.90848$.

d) $\text{Log}_{10} 50 = \text{Log}_{10}[10 \times 5] = \text{Log}_{10} 10 + \text{Log}_{10} 5$

$$= 1 + 0.69897 = 1.69897 .$$

13.18 EJERCICIO .- Resuelva la ecuación: $10^{3x} = 125$.

SOLUCIÓN .- $10^{3x} = 5^3 \Leftrightarrow \text{Log}_{10}(10^{3x}) = \text{Log}_{10}(5^3)$

$\Leftrightarrow$ $3x\,\text{Log}_{10} 10 = 3\,\text{Log}_{10} 5 \Leftrightarrow 3x = 3\,\text{Log}_{10} 5$

(pues $\text{Log}_{10} 10 = 1$) $\Leftrightarrow$ $x = \text{Log}_{10} 5 = 0.69897$

13.19 EJERCICIO .- Resolver $e^{0.08\,k} = 9$, para k .

SOLUCIÓN .- Tomando Logaritmos en base e en ambos miembros:

$$\text{Log}_e(e^{0.08\,k}) = \text{Log}_e 9$$

$\Leftrightarrow$ $0.08\,k\,(\text{Log}_e e) = \text{Log}_e(9) = \text{Ln}(9)$ [notación]

$\Leftrightarrow$ $0.08\,k = \text{Ln}(9) \Leftrightarrow k = \dfrac{\text{Ln}(9)}{0.08} = \dfrac{2.19722}{0.08} = 27.465$

13.20 FÓRMULAS DE CAMBIO DE BASE

Con cierta frecuencia se hace necesario ***cambiar de base*** de un logaritmo $\text{Log}_a z$ dado en la base $a > 0$, $a \neq 1$, en término de otro logaritmo $\text{Log}_b z$ en otra base $b > 0$, $b \neq 1$. Se emplea las fórmulas:

$$(\text{I}) \quad \text{Log}_a(c) = \frac{\text{Log}_b(c)}{\text{Log}_b(a)} \quad , \quad c > 0$$

$$(\text{II}) \quad \text{Log}_a(b) = \frac{1}{\text{Log}_b(a)}$$

PRUEBA DE (I) : Haciendo $u = \text{Log}_a(c) \Rightarrow a^u = c$

Aquí tomamos Logaritmo en base b en ambos miembros:

$$\text{Log}_b(a^u) = \text{Log}_b(c) \Rightarrow u\,\text{Log}_b(a) = \text{Log}_b(c)$$

$$\Rightarrow u = \frac{\text{Log}_b(c)}{\text{Log}_b(a)} \qquad \textit{L.q.q.d.}$$

PRUEBA DE (II) : Es un caso particular de (1) , haciendo $c = b$.

NOTA .- Como consecuencia tenemos que cualquier Logaritmo se puede expresar en términos del **Logaritmo Natural** (***base*** e) :

$$\text{Log}_a(c) = \frac{\text{Log}_e(c)}{\text{Log}_e(a)} = \frac{\text{Ln}(c)}{\text{Ln}(a)}$$

13.21 PROPIEDADES ADICIONALES DE LOS LOGARITMOS

1) $\text{Log}_a c = (\text{Log}_a b)(\text{Log}_b c)$.

2) $\forall\ a > 0$:

$$a^x = e^{x\,\text{Log}_e a} = e^{x\,\text{Ln}\,a}$$

$$\Rightarrow \quad a^x = (e^x)^{\text{Ln}\,a} \quad , \quad x \in \langle -\infty, \infty \rangle$$

3) Si $n \in \mathbb{R}$, $n \neq 0$:

$$\text{Log}_a(x) = \text{Log}_{a^n}(x^n) = n\,\text{Log}_{a^n}(x)$$

4) Si $n \in \mathbb{R}$, $n \neq 0$:

$$\text{Log}_{a^n}(x) = \frac{1}{n}\,\text{Log}_a(x) = \text{Log}_a(x^{1/n})$$

5) Si $n \in \mathbb{R}$, $n \neq 0$:

$$\boxed{\text{Log}_a(x^n) = \text{Log}_{a^{1/n}}(x)}$$

13.22 EJERCICIO .- Si $a, b \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$, $\text{Log}_{ab}(a) = 4$, evalúe

$$\text{Log}_{ab}\left[\sqrt[3]{a} \,/\, \sqrt[5]{b}\right].$$

SOLUCIÓN .- Dato: $a = (ab)^4 \Rightarrow b^4 = 1/a^3 \Rightarrow b = a^{-3/4}$.
Luego, tenemos que

$$\text{Log}_{ab}\frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[5]{b}} = \text{Log}_{ab}\sqrt[3]{a} - \text{Log}_{ab}\sqrt[5]{b}$$

$$= \frac{1}{3}\text{Log}_{ab}(a) - \frac{1}{5}\text{Log}_{ab}(b)$$

$$= \frac{1}{3}(4) - \frac{1}{5}\text{Log}_{ab}(a^{-3/4}) = \frac{4}{3} - \frac{1}{5}(-\frac{3}{4})\text{Log}_{ab}(a)$$

$$= \frac{4}{3} + \frac{3}{20}(4) = \frac{4}{3} + \frac{3}{5} = \frac{29}{15}.$$

13.23 EJERCICIO .- Calcule los valores de:

$$A = \text{Log}_{49}[(\sqrt{7})^5] - \text{Log}_{1.5}(\frac{8}{27}), \quad B = \text{Log}_4(0.25).\text{Log}_7(\frac{\sqrt[3]{7}}{49})$$

SOLUCIÓN .-

$$A = \text{Log}_{49}[(49^{1/4})^5] - \text{Log}_{3/2}[(\frac{3}{2})^{-3}]$$

$$= \frac{5}{4}\text{Log}_{49}(49) - (-3)\text{Log}_{3/2}(\frac{3}{2}) = \frac{5}{4} + 3 = \frac{17}{4}$$

$$B = \text{Log}_4(\frac{1}{4}).\text{Log}_7(\frac{7^{1/3}}{7^2}) = (-1)[\frac{1}{3} - 2] = \frac{5}{3}.$$

13.24 EJERCICIO .- Halle el valor de $\text{Log}_a(b)$ si se cumple que:

$$\text{Log}_{ab}[\,2\,\text{Log}_{ab}\sqrt{a} - (0,5)\,\text{Log}_{\sqrt{ab}}(b)\,] = \text{Log}^2_{ab}(a) - \text{Log}^2_{ab}(b)$$

SOLUCIÓN .- Por las Propiedades (3), (4) y (5) de [13.21] la igualdad dada es equivalente a:

$$\text{Log}_{ab}[\,\text{Log}_{ab}(a) - \text{Log}_{\sqrt{ab}}\sqrt{b}\,] = \text{Log}^2_{ab}(a) - \text{Log}^2_{ab}(b) \Rightarrow$$

$$\text{Log}_{ab}[\,\text{Log}_{ab}a - \text{Log}_{ab}b\,] = [\text{Log}_{ab}a + \text{Log}_{ab}b][\text{Log}_{ab}a - \text{Log}_{ab}b]$$

$$\text{Log}_{ab}[\,\text{Log}_{ab}a - \text{Log}_{ab}b\,] = \text{Log}_{ab}(ab) \,.\, \text{Log}_{ab}(a/b)$$

$$\Rightarrow \text{Log}_{ab}[\,\text{Log}_{ab}(a/b)\,] = 1 \cdot \text{Log}_{ab}(a/b) = \text{Log}_{ab}[\,a/b\,]$$

$$\Rightarrow \text{Log}_{ab}(a/b) = a/b = \frac{a}{b} \quad \text{(por inyectividad)}$$

$$\Rightarrow \frac{a}{b} = (ab)^{a/b}$$

y tomando *Logaritmos en Base* a en ambos miembros:

$$\text{Log}_a(\frac{a}{b}) = \frac{a}{b}\text{Log}_a(ab) \Rightarrow 1 - \text{Log}_a b = \frac{a}{b}(1 + \text{Log}_a b)$$

$$\Rightarrow (a+b)\,\text{Log}_a b = (b-a) \Rightarrow \text{Log}_a(b) = \frac{b-a}{b+a}.$$

13.25 EJERCICIO .- Simplifique las cantidades:

a) $4^{\text{Log}_{8\sqrt{2}}(5)}$, b) $\sqrt[3]{32}^{\,2/\text{Log}_7(4)}$, c) $(\text{Log}_{27}5)(\text{Log}_{25}9)$

SOLUCIÓN .- Debido a [13.21] ,

a) Como $\text{Log}_{8\sqrt{2}}(5) = \text{Log}_{2^{7/2}}(5) = \text{Log}_2(5^{2/7}) = \text{Log}_{2^2}(5^{4/7})$

$$\Rightarrow 4^{\text{Log}_{8\sqrt{2}}(5)} = 4^{\text{Log}_4(5^{4/7})} = 5^{4/7} = \sqrt[7]{625}$$

b) Puesto que $2/\text{Log}_7 4 = 2\,\text{Log}_4(7) = \text{Log}_{2^2}(7^2) = \text{Log}_2(7)$

$$\Rightarrow \sqrt[3]{32}^{\,(2/\text{Log}_7 4)} = 2^{(\frac{5}{3})\text{Log}_2(7)} = (2^{\text{Log}_2(7)})^{5/3} = 7^{5/3}$$

c) $(\text{Log}_{27} 5)(\text{Log}_{25} 9) = (\text{Log}_{27} 5)[\text{Log}_{5^2}(3^2)]$

$= (\text{Log}_{27} 5)(\text{Log}_5 3) = \text{Log}_{27} 3 = \text{Log}_{3^3}(3)$

$= \text{Log}_3(3^{1/3}) = \frac{1}{3}$.

13.26 EJERCICIO .- Simplifique:

a) $A = (\text{Log}_2 3)(\text{Log}_3 4)(\text{Log}_4 5)\ldots(\text{Log}_{14} 15)(\text{Log}_{15} 16)$

b) $B = (\text{Log}_2 \text{Log}_2 N^2)/(1 + \text{Log}_2 \text{Log}_2 N)$, c) $C = \dfrac{\text{Log}_a N}{\text{Log}_{ab} N}$

SOLUCIÓN. Usando la Propiedad $(\text{Log}_a b)(\text{Log}_b c) = \text{Log}_a c$, varias veces

a) $A = (\text{Log}_2 4)(\text{Log}_4 5)\ldots(\text{Log}_{14} 15)(\text{Log}_{15} 16) = \text{Log}_2 16 =$

$= \text{Log}_2(2^4) = 4(\text{Log}_2 2) = 4$.

b) Como $\text{Log}_2(\text{Log}_2 N^2) = \text{Log}_2(2\,\text{Log}_2 N)$

$= \text{Log}_2 2 + \text{Log}_2(\text{Log}_2 N) = 1 + \text{Log}_2(\text{Log}_2 N)$

$\Rightarrow \quad B = 1$

c) Por la Propiedad 13.20 (II) $C = \dfrac{\text{Log}_N ab}{\text{Log}_N a} = \text{Log}_a(ab)$

$\Rightarrow \quad C = \text{Log}_a(a) + \text{Log}_a(b) \quad \Rightarrow \quad C = 1 + \text{Log}_a(b)$.

13.27 EJERCICIO .- Si $\text{Log}_a \text{Log}_a b - \text{Log}_a \text{Log}_a c = 1$,

calcule: $\text{Log}_a \text{Log}_b N - \text{Log}_a \text{Log}_c N$.

SOLUCIÓN .- Del dato: $1 = \text{Log}_a\left(\dfrac{\text{Log}_a b}{\text{Log}_a c}\right) = \text{Log}_a(\text{Log}_c b) \quad [\,= 1\,]$

$\Rightarrow \quad \text{Log}_c b = a$; por lo tanto :

$$\text{Log}_a \text{Log}_b N - \text{Log}_a \text{Log}_c N = \text{Log}_a\left(\frac{\text{Log}_b N}{\text{Log}_c N}\right) = \text{Log}_a\left(\frac{\text{Log}_N c}{\text{Log}_N b}\right)$$

$= \text{Log}_a(\text{Log}_b c) = \text{Log}_a\left(\dfrac{1}{\text{Log}_c b}\right)$

$= \text{Log}_a\left(\dfrac{1}{a}\right) = -1$ ... ¿por qué? .

13.28 EJERCICIO .- Demuestre que si se cumple que:

$$\text{Log}_{c+b}(a) + \text{Log}_{c-b}(a) = 2[\text{Log}_{c+b}(a)][\text{Log}_{c-b}(a)]$$

entonces a , b y c pueden ser los lados de un triángulo rectángulo.

SOLUCIÓN .- Mediante las Fórmulas de Cambio de Base, el dato es equivalente a:

$$\frac{1}{\text{Log}_a(c+b)} + \frac{1}{\text{Log}_a(c-b)} = \frac{2}{\text{Log}_a(c+b)\,\text{Log}_a(c-b)}$$

y dando común denominador e igualando los nuevos numeradores obtenemos :

$$\text{Log}_a(c-b) + \text{Log}_a(c+b) = 2$$

$$\Rightarrow \quad \text{Log}_a[(c-b)(c+b)] = 2 \quad \Rightarrow \quad (c-b)(c+b) = a^2$$

$$\Rightarrow \quad c^2 - b^2 = a^2 \quad \Rightarrow \quad c^2 = a^2 + b^2$$

Por lo tanto, a y b *pueden ser los catetos de un triángulo rectángulo, y* c *su hipotenusa.*

13.29 EJERCICIO .- Sabiendo que $\text{Log}\ 2 = 0.30103$ calcule el número de ceros que hay entre el punto decimal y la primera cifra significativa de

$$A = \left(\frac{1}{80}\right)^{8.5} .$$

SOLUCIÓN .- Tomando Logaritmos en Base 10 :

$$\text{Log}\ A = -8.5\ \text{Log}\ 80 = -8.5\ \text{Log}\ (10 \times 2^3)$$
$$= -8.5\,(1 + 3\,\text{Log}\ 2) = -8.5\,(1.90309)$$

$$\Rightarrow \quad \text{Log}\ A = -16.17626 \quad \Rightarrow \quad A = 10^{-16.17626}$$

$\Rightarrow \quad 10^{-17} < A < 10^{-16}$, lo que implica que el número de ceros que hay entre el punto decimal de A y su primera cifra significativa es $\boxed{n = 16}$.

SERIE DE EJERCICIOS

1. De las siguientes funciones exponenciales, ¿cuáles son crecientes y cuáles son decrecientes? :

   a) $y = 3^x$ b) $y = (0.3)^x$ c) $y = 10^x$.

2. ¿Cómo es el número positivo a comparado con el número 1, en los siguientes casos? :

   (1) $a^{2/5} > a^{5/2}$ (2) $a^{2/3} > a$ (3) $a^{-5/6} < a^{7/6}$

   (4) $a^{0,3} > 1$ (5) $a^{3/4} < a^{4/5}$ (6) $a^{-0.7} > a^{-4/5}$

3. Compare las siguientes potencias con respecto al número 1 :

   a) $(\frac{2}{5})^{2/3}$, b) $(\frac{5}{3})^{3/4}$, c) $(\frac{1}{2})^{-6/7}$,

   d) $(\frac{3}{2})^{-4/5}$, e) $(0.21)^{0.1}$, f) $(\sqrt{3})^{-1.2}$.

4. Determine la validez de las siguientes igualdades:

   a) $\text{Log}_3 729 = 6$ b) $\text{Log}_{1/2} \sqrt[3]{4} = -\frac{2}{3}$

   c) $\text{Log}_{10} (\frac{1}{10\sqrt{10}}) = -\frac{3}{2}$ d) $\text{Log}_a a^2 \sqrt[3]{a} = 2\frac{1}{3}$

   e) $\text{Log}_a \sqrt{a\sqrt{a\sqrt{a}}} = \frac{7}{8}$ f) $\text{Log}_{3\sqrt{3}} (\frac{1}{3}) = -\frac{2}{3}$.

5. Calcule:

   a) $\text{Log}_2 1296$ b) $\text{Log}_2 (\frac{1}{16})$ c) $\text{Log}_{1/7} \sqrt[3]{49}$

   d) $\text{Log}_{49} \sqrt[3]{1/7}$ e) $\text{Log}_{1/16} \sqrt[5]{64}$ f) $-\text{Log}_8 \text{Log}_4 \text{Log}_2 (16)$

6. Calcule:

   a) $25^{\text{Log}_5 3}$ b) $3^{3\,\text{Log}_3 2}$ c) $25^{-\text{Log}_5 10}$

   d) $49^{0,5\,\text{Log}_7 (0,25)}$ e) $2^{2\,\text{Log}_2 5 + \text{Log}_2 3}$ f) $8^{\text{Log}_2 (\sqrt[3]{121} + \frac{1}{3})}$

7. Calcule: a) $\text{Log}_2 \text{Log}_3 (81)$, b) $\text{Log}_3 (5^{-2\,\text{Log}_5 (3)})$,

   c) $\text{Log}_a (\text{Tan}\, 40^\circ)\, \text{Log}_a (\text{Tan}\, 41^\circ)\, \text{Log}_a (\text{Tan}\, 42^\circ) \ldots \text{Log}_a (\text{Tan}\, 50^\circ)$

8. Demuestre que: $\boxed{\text{Log}_{1/a} N = -\text{Log}_a N}$

9. Halle el número cuyo Logaritmo en la Base b es igual a 3 .

10. Halle x si: a) $\text{Log}_x (\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$, b) $\text{Log}_x N = N$.

11. Resuelva las ecuaciones: a) $8\,\text{Log}_3 x - 2\,\text{Log}_3 x - 12 = 0$

    b) $\text{Log}_2 (x^2) - 3\,\text{Log}_2 x + 5 = 0$

12. Resuelva las ecuaciones:

    a) $\text{Log}\, x = 3\,\text{Log}\, 5 - 2\,\text{Log}\, 25 + \text{Log}\, 4$

    b) $\text{Log}_5 x = \frac{1}{2}\text{Log}_5 10 - \text{Log}_5 2 + \frac{1}{2}$

    c) $\text{Log}\, x = \frac{3}{4}(\text{Log}\, 2 + \text{Log}\, a - \text{Log}\, 4)$

    d) $\text{Log}\, x = \text{Log}(a+b) - \frac{2}{3}(2\,\text{Log}\, a + \frac{3}{4}\,\text{Log}\, b)$

13. Calcule el valor de $\text{Log}_{1/2} 28$, si se sabe que $\text{Log}_7 2 = a$.

14. Calcule el valor de $\text{Log}_6 16$, si se sabe que $\text{Log}_{12} 27 = a$.

15. Simplifique: a) $(\sqrt[4]{125})^{3/\text{Log}_3 5}$, b) $2^{\text{Log}_{2\sqrt{2}} (5)}$,

    c) $(\text{Log}_9 5)(\text{Log}_{25} 27)$

    d) $\text{Log}_a \text{Tan}\, 1^\circ + \text{Log}_a \text{Tan}\, 2^\circ + \text{Log}_a \text{Tan}\, 3^\circ + \ldots + \text{Log}_a \text{Tan}\, 89^\circ$.

16. Calcule $\text{Log}_{ab} (\sqrt{a}\,\sqrt[3]{b})$, si se sabe que $\text{Log}_{ab} a = 3$.

CLAVE DE RESPUESTAS

1. a) y c) son crecientes ; b) es decreciente .
2. (1) $0 < a < 1$; (2) $0 < a < 1$; (3) $a > 1$;
   (4) $a > 1$; (5) $a > 1$; (6) $a > 1$.
3. a) < 1 , b) > 1 , c) > 1 , d) < 1 , e) < 1 , f) < 1

4. Todas son verdaderas.

5. a) 4 , b) -4 , c) $-2/3$, d) $-1/6$, e) $-3/10$, f) 0 .

6. a) 9 , b) 8 , c) 1/100 , d) 1/4 , e) 75 , f) 242 .

7. a) 2 , b) -2 , c) 0 , pues está la expresión: $\text{Tan}\,45^{\circ} = 1$.

9. b^{3} ; <u>10</u>.- a) $x = 1/4$, b) $x = N^{1/N}$.

11. a) 9 , b) 32 . <u>12</u>.- a) $x = 4/5$, b) $x = 5/\sqrt{2}$,

12. c) $x = (a/2)^{3/4}$, d) $x = (a+b)/[\sqrt{b}\,a^{4/3}]$; <u>13</u>.- $-\dfrac{2a+1}{a}$

14. Del dato: $a = 3\,\text{Log}_{12}3 = 3/\text{Log}_{3}(3\times 4)$

$$\Rightarrow \quad a = 3/(1+2\,\text{Log}_{3}2) \quad \Rightarrow \quad \text{Log}_{3}2 = \frac{1}{2}\left(\frac{3-a}{a}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \text{Log}_{2}3 = \frac{2a}{3-a}$$

Por lo tanto,

$$\text{Log}_{6}16 = 4\,\text{Log}_{6}2 = \frac{4}{\text{Log}_{2}(2\times 3)} = \frac{4}{1+\text{Log}_{2}3}$$

$$= \frac{4}{1+\dfrac{2a}{3-a}} \quad \Rightarrow \quad \text{Log}_{6}16 = \frac{4(3-a)}{3+a} .$$

15. a) $9\sqrt[4]{3}$, b) $5^{2/3}$,

c) $\text{Log}_{a}[(\text{Tan}\,1^{\circ})(\text{Tan}\,2^{\circ})\ldots(\text{Tan}\,89^{\circ})] =$

$= \text{Log}_{a}[(\text{Cot}\,89^{\circ})(\text{Cot}\,88^{\circ})\ldots(\text{Cot}\,46^{\circ})(\text{Tan}\,45^{\circ})(\text{Tan}\,46^{\circ})\cdot($

$\cdot(\text{Tan}\,47^{\circ})(\text{Tan}\,88^{\circ})(\text{Tan}\,89^{\circ})]$

$= \text{Log}_{a}[\{(\text{Cot}\,89^{\circ})(\text{Tan}\,89^{\circ})\}\cdot\{(\text{Cot}\,88^{\circ})(\text{Tan}\,88^{\circ})\}\cdot\ \ldots$

$\ldots\ \cdot\{(\text{Cot}\,47^{\circ})(\text{Tan}\,47^{\circ})\}\cdot\{(\text{Cot}\,46^{\circ})(\text{Tan}\,46^{\circ})\}\cdot(\text{Tan}\,45^{\circ})]$

$= \text{Log}_{a}[\{1\}\{1\}\ \ldots\ \{1\}\{1\}\cdot(1)] = \text{Log}_{a}(1) = 0$

16. 5/6 .

13.30 LA FUNCIÓN LOGARITMO

De nuestro estudio previo de los LOGARITMOS sabemos que:

(1) No están definidos los Logaritmos de números negativos , ni de cero.

(2) Solamente existen ***Logaritmos de Números Positivos***.

(3) Sin embargo, el valor de un Logaritmo (***de un número positivo, por supuesto***) puede ser ya sea un número negativo, un número positivo o puede ser igual a cero. Por ejemplo,

$$\text{Log}_{10}\left(\frac{1}{100}\right) = \text{Log}_{10}(10^{-2}) = -2$$

$$\text{Log}_{10}\sqrt{10} = \text{Log}_{10}(10^{1/2}) = 1/2$$

$$\text{Log}_{10}1 = 0 .$$

Con estas referencias, las propiedades de los Logaritmos y las propiedades de los Exponentes, definiremos FUNCIÓN LOGARITMO de BASE <u>a</u> cuyo dominio es el conjunto de los números reales positivos.

13.31 DEFINICIÓN .- Sea $a > 0$, $a \neq 1$, se llama **FUNCIÓN LOGARÍTMICA de BASE <u>a</u>** , y se denota:

$$y = \text{Log}_{a}x \quad , \quad \forall\ x > 0,$$

a la función Inversa de la Función EXPONENCIAL $f(x) = a^{x}$, ***de BASE <u>a</u>*** .

Es decir, $\forall\ x > 0$, si $a > 0$, $a \neq 1$:

$$y = \text{Log}_{a}(x) \quad \Leftrightarrow \quad x = a^{y}$$

Como la función Exponencial de Base $a > 0$, $a \neq 1$:

$$a^{x} : \langle -\infty, \infty\rangle \longrightarrow \langle 0, \infty\rangle$$

tiene $\text{Dom}(a^{x}) = \mathbb{R}$, $\text{Rang}(a^{x}) = \langle 0, \infty\rangle$, y por ser la Función Logarítmica $y = \text{Log}_{a}x$ la función inversa de $y = a^{x}$, resulta que

$\text{Log}_a(\ ) : \langle 0, \infty \rangle \longrightarrow \langle -\infty, \infty \rangle$ tiene:

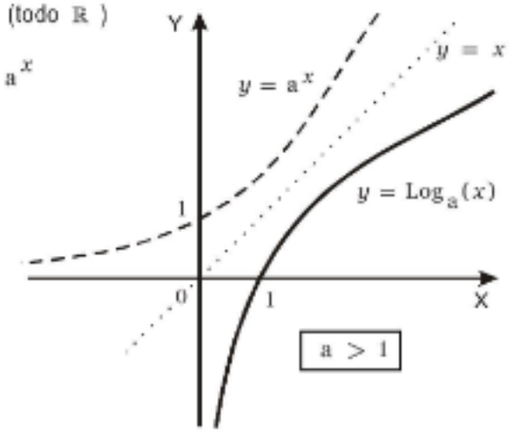
$\text{Dom}(\text{Log}_a) = \langle 0, \infty \rangle$ (los ***números positivos***)

$\text{Rang}(\text{Log}_a) = \langle -\infty, \infty \rangle$ (todo $\mathbb{R}$)

Analizando la gráfica de $y = a^x$ para los casos

i) $a > 1$, ii) $0 < a < 1$,

graficaremos la función $y = \text{Log}_a(x)$ por reflexión con respecto a la recta $y = x$.

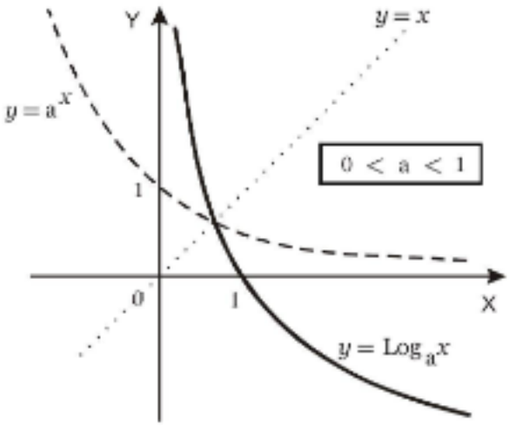


CASO (i) $\boxed{a > 1}$:

$\text{Dom}(\text{Log}_a) = \langle 0, \infty \rangle$

$\text{Rang}(\text{Log}_a) = \mathbb{R}$.

En este caso, $y = \text{Log}_a x$ resulta ser una función CONTINUA, INYECTIVA y CRECIENTE.



CASO (ii) : $\boxed{0 < a < 1}$

$\text{Dom}(\text{Log}_a) = \langle 0, \infty \rangle$

$\text{Rang}(\text{Log}_a) = \langle -\infty, \infty \rangle$

En este caso (ii), la función $y = \text{Log}_a x$ resulta ser CONTINUA, INYECTIVA y DECRECIENTE.

13.32 RESUMEN DE PROPIEDADES DE $y = \text{Log}_a x$

1.- La Función Logarítmica $y = \text{Log}_a x$ solamente está definida para los valores de la base a que satisfacen que: $a > 0$, $a \neq 1$.

2. La Función Logarítmica $y = \text{Log}_a x$ *es* ***INYECTIVA***, lo cual implica que, $\forall\ x_1, x_2 \in \langle 0, \infty \rangle$,

$a > 0$, $a \neq 1$: $\boxed{\text{Log}_a(x_1) = \text{Log}_a(x_2) \quad \Leftrightarrow \quad x_1 = x_2}$

2') Asimismo, por ser la Función Exponencial $y = a^x$, con $a > 0$, $a \neq 1$, ***una función INYECTIVA***, entonces $\forall\ x_1, x_2 \in \mathbb{R} = \langle -\infty, \infty \rangle$

$a > 0$, $a \neq 1$: $\boxed{a^{x_1} = a^{x_2} \quad \Leftrightarrow \quad x_1 = x_2}$

3.- Por ser $y = \text{Log}_a(x)$ ***una función CRECIENTE para el caso*** $\underline{a > 1}$, entonces $\forall\ x_1, x_2 \in \mathbb{R}^+ = \langle 0, \infty \rangle$,

$\underline{a > 1}$: $\boxed{x_1 < x_2 \quad \Leftrightarrow \quad \text{Log}_a(x_1) < \text{Log}_a(x_2)}$

Note que al tomar Logaritmos (en este caso), ***se conserva el sentido de la desigualdad***.

3') Siendo $y = a^x$ ***una función CRECIENTE para el caso*** $\underline{a > 1}$, entonces $\forall\ x_1, x_2 \in \mathbb{R} = \langle -\infty, \infty \rangle$,

$\underline{a > 1}$: $\boxed{x_1 < x_2 \quad \Leftrightarrow \quad a^{x_1} < a^{x_2}}$

Note que, en este caso, al tomar la función Exponencial en estas bases a, ***el sentido de la desigualdad también se conserva***.

4.- Por ser la función $y = \text{Log}_a(x)$ ***DECRECIENTE para el caso en que*** $0 < a < 1$, entonces $\forall\ x_1, x_2 \in \langle 0, \infty \rangle$,

$\underline{0 < a < 1}$: $\boxed{x_1 < x_2 \quad \Leftrightarrow \quad \text{Log}_a(x_1) > \text{Log}_a(x_2)}$

Observe en este caso que al tomar Logaritmos en estas bases, ***el sentido de la desigualdad se invierte***.

4 °) Siendo $y = a^x$ ***una función CRECIENTE para el caso*** $0 < a < 1$, entonces $\forall\ x_1 , x_2 \in \mathbb{R} = \langle -\infty , \infty \rangle$,

$\underline{0 < a < 1}$:

$$x_1 < x_2 \quad \Leftrightarrow \quad a^{x_1} > a^{x_2}$$

En este caso también, al tomar la Exponencial en estas bases a , ***el sentido de la desigualdad se invierte*** .

5.- Si $\underline{a > 1}$:

$$\text{Log}_a(x) > 0 \quad \Leftrightarrow \quad x > 1$$

$$\text{Log}_a(x) < 0 \quad \Leftrightarrow \quad 0 < x < 1$$

Para la prueba basta expresar : $0 = \text{Log}_a(1)$.

$$a^x > 1 \quad \Leftrightarrow \quad x > 0$$

$$0 < a^x < 1 \quad \Leftrightarrow \quad x < 0$$

6.- Si $\underline{0 < a < 1}$:

$$\text{Log}_a(x) > 0 \quad \Leftrightarrow \quad 0 < x < 1$$

$$\text{Log}_a(x) < 0 \quad \Leftrightarrow \quad x > 1$$

$$a^x > 1 \quad \Leftrightarrow \quad x < 0$$

$$0 < a^x < 1 \quad \Leftrightarrow \quad x > 0$$

Todas estas propiedades serán utilizadas cuando se tenga que resolver ***Ecuaciones e Inecuaciones Exponenciales y Logarítmicas***.

13.33 EJEMPLO .- Resuelva las ecuaciones:

a) $2^x - 3(2^{-x}) = 4$,

b) $\text{Log}_2 x + \text{Log}_{1/2} x + \text{Log}_4 x + \text{Log}_{\sqrt{2}} x = 15/2$,

c) $(\text{Log}_x 2)(\text{Log}_{x/16} 2) = \text{Log}_{x/64} 2$.

SOLUCIÓN .-

a) Multiplicando la ecuación por 2^x :

$$(2^x)^2 - 3 = 4(2^x) \quad \Rightarrow \quad (2^x)^2 - 4(2^x) - 3 = 0$$

$$\Rightarrow \quad 2^x = \frac{1}{2}[\,4 \pm \sqrt{16 - 4(-3)}\,] = 2 \pm \sqrt{7} \quad \Rightarrow \quad \boxed{2^x = 2 \pm \sqrt{7}}$$

(se descarta el signo $(-)$ pues ***una Exponencial nunca toma valor negativo***)

$$\Rightarrow \quad 2^x = 2 + \sqrt{7} \quad \Rightarrow \quad x = \text{Log}_2(2 + \sqrt{7}) \ .$$

b) $\text{Log}_2 x + \text{Log}_2 x^{-1} + \text{Log}_2 \sqrt{x} + \text{Log}_2 x^2 = 15/2$

$$\Rightarrow \quad \frac{5}{2}\text{Log}_2 x = \frac{15}{2} \quad \Rightarrow \quad \text{Log}_2 x = 3 \quad \Rightarrow \quad \boxed{x = 2^3 = 8} \ .$$

c) $$\frac{1}{\text{Log}_2 x} \cdot \frac{1}{\text{Log}_2 (x/16)} = \frac{1}{\text{Log}_2 (x/64)}$$

$$\Rightarrow \quad \text{Log}_2 \left(\frac{x}{64}\right) = \text{Log}_2 x \cdot \text{Log}_2 \left(\frac{x}{16}\right)$$

$$\Rightarrow \quad (\text{Log}_2 x) - 6 = (\text{Log}_2 x)[\,(\text{Log}_2 x) - 4\,] \quad \Rightarrow$$

$$(\text{Log}_2 x)^2 - 5\,\text{Log}_2 x + 6 = [(\text{Log}_2 x) - 3][(\text{Log}_2 x) - 2] = 0$$

$$\Rightarrow \quad \text{Log}_2 x = 3 \ , \quad \text{Log}_2 x = 2$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{x = 2^3 = 8 \ , \quad x = 2^2 = 4} \quad \Rightarrow \quad \text{C.S.} = \{\,8 \ , \ 4\,\} \ .$$

13.34 NOTA .- Si $a > 0$, $a \neq 1$, la función Exponencial $f(x) = a^x$, $x \in \mathbb{R}$, y la función Logarítmica $g(x) = \text{Log}_a(x)$, $x > 0$, ambas en la misma base a , son una función inversa de la otra . Es decir ,

i) $f(x) = \exp_a(x) = a^x$, $x \in \mathbb{R}$,

$$\Leftrightarrow \quad f^{-1}(x) = \exp_a^{-1}(x) = \text{Log}_a x \ , \quad x > 0$$

ii) $g(x) = \text{Log}_a(x)$, $x > 0$

$$\Leftrightarrow \quad g^{-1}(x) = \text{Log}_a^{-1}(x) = \exp_a(x) = a^x \ , \quad x \in \mathbb{R}$$

NOTACIÓN. A la función EXPONENCIAL de BASE a también se le llama la función ANTILOGARITMO de BASE a, y se le representa por:

$$y = \text{Antilog}_a(x) = a^x = \exp_a(x), \quad x \in \mathbb{R}$$

Y debido a las Propiedades de la Composición de una función con su Inversa:

a) $\boxed{\text{Log}_a(a^x) = x}$, $x \in = (-\infty, \infty)$.

b) $\boxed{a^{(\text{Log}_a x)} = x}$, $x > 0$.

13.35 EJERCICIO.- Halle el valor numérico de la expresión:

$$A = [\exp_{27}(\frac{1}{6}) \cdot \exp_3(-\frac{1}{2})] \cdot \text{Log}_{1/2}(\frac{1}{4})$$

SOLUCIÓN.- $A = 27^{1/6} 3^{-1/2} \text{Log}_2 4 = (3^{3/6})(3^{-1/2})(2) = 2$

13.36 EJERCICIO.- Halle el dominio máximo para la función f, y la función inversa, si existe, de $f(x) = \text{Ln}(1-x) + 2$.

SOLUCIÓN.- $(1-x) > 0 \Leftrightarrow x < 1 \Leftrightarrow \text{Dom } f = \langle -\infty, 1 \rangle$.

Siendo la función Logaritmo Natural $\text{Ln} = \text{Log}_e$ inyectiva así como la función $y = (1-x)$ también lo es la composición $y = \text{Ln}(1-x)$. Por lo tanto, la traslación de funciones dada $f(x) = \text{Ln}(1-x) + 2$ también resulta ser INYECTIVA. Así vemos que la función inversa existe, cuya regla de correspondencia procederemos a hallar:

$$f(x) = \text{Ln}(1-x) + 2 \Leftrightarrow y - 2 = \text{Ln}(1-x)$$
$$\Leftrightarrow 1 - x = e^{y-2} \Leftrightarrow x = f^{-1}(y) = 1 - e^{y-2}$$
$$\Leftrightarrow f^{-1}(x) = 1 - e^{x-2}.$$

13.37 EJERCICIO.- Si $f(x) = \text{Log}_3(x+1) + \text{Log}_3(x-1)$, pruebe que

a) $\text{Dom } f = \langle 1, \infty \rangle$, b) $f^{-1}(x) = \sqrt{3^x + 1}$.

SOLUCIÓN.- a) Los dominios de cada función sumando son: $x > -1$ y $x > 1$, respectivamente. Luego, el dominio de f es la intersección de ambos: $x > 1$, es decir $\text{Dom } f = \langle 1, \infty \rangle$.

b) $y = f(x) = \text{Log}_3(x^2 - 1) \Leftrightarrow x^2 - 1 = 3^y \Leftrightarrow x^2 = 3^y + 1$

$x = f^{-1}(y) = \sqrt{3^y + 1}$ (x positivo) $\Leftrightarrow f^{-1}(x) = \sqrt{3^x + 1}$.

El extraer la raíz cuadrada se descartó el signo $(-)$ debido al Dominio de f.

13.38 EJERCICIO.- Halle la función composición $f \circ g$, si existe, para

$$f(x) = \begin{cases} 2x - 5 & , \quad x < 2 \\ x^2 - 1 & , \quad x \geq 2 \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} x^2 - 2x & , \quad x < 1 \\ 3^x & , \quad x \geq 1 \end{cases}$$

SOLUCIÓN.- Mediante las técnicas para componer funciones, y las propiedades de la función Exponencial, tenemos que:

$$(f \circ g)(x) = \begin{cases} 2(x^2 - 2x) - 5 & , \quad x \in \langle 1 - \sqrt{3}, 1 \rangle \\ (x^2 - 2x)^2 - 1 & , \quad x \in \langle -\infty, 1 - \sqrt{3}] \\ 9^x - 1 & , \quad x \in [1, \infty \rangle \end{cases}$$

13.39 EJERCICIO.- Demuestre que las funciones $f(x) = \text{Log}_a x^2$, y $g(x) = 2(\text{Log}_a x)$ ***no son iguales***.

SOLUCIÓN.- Como $x^2 > 0 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R} - \{0\}$, entonces $\text{Dom } f = \mathbb{R} - \{0\}$ mientras que $\text{Dom } g = \langle 0, \infty \rangle$. Luego, f y g no son funciones iguales pues sus dominios son diferentes. La igualdad se presenta restringiendo a solamente los valores positivos de x; es decir,

$$\text{Log}_a x^2 = 2 \text{Log}_a x \Leftrightarrow x > 0.$$

SERIE DE EJERCICIOS

1. Simplifique: $\exp_2 \text{Log}_3 8^{\text{Log}_4 3}$.

2. Si $\text{Log}_3(x^2 y) = 2$, $\text{Log}_3(x/y) = 2$, $x > 1$, halle el valor numérico de: $\text{Log}_x 9$.

3. Halle, sin calcular explícitamente las raíces, la suma S de las raíces de la ecuación $\text{Log}\,(x+6) - \frac{1}{2}\text{Log}\,(2x-3) = 2 - \text{Log}\,25$.
Verifique su respuesta reemplazando cada una de las raíces en la ecuación.

4. Resuelva la ecuación: $\dfrac{\exp^{-1}\sqrt[5]{5x+10}}{\exp^{-1}(x+2)} = \dfrac{2}{5}$

NOTACIÓN : $\exp(x) = \exp_e(x) = e^x$.

5. Bosqueje la gráfica de la función: $f(x) = (1/2)^{[\![x]\!]}$.

6. a) Bosqueje la gráfica de las funciones: $f(x) = \left|\text{Log}_{1/2}\, x\right|$ y
$g(x) = \left|\text{Log}_2\, x\right|$. ¿Existe la función inversa f^{-1} ?

b) Bosqueje la gráfica de la función $h(x) = \left|\text{Log}_{1/2}|x|\right|$.

7. Descomponer en factores:
$a(\text{Log}\,x)^4 + 10a(\text{Log}\,x)^3 + 23a(\text{Log}\,x)^2 - 10a(\text{Log}\,x) + a$.

8. Resuelva la ecuación $\dfrac{\text{Log}\,(x+2)}{\text{Log}\sqrt[10]{5x+10}} = 5$

9. ¿Cuáles son verdaderas? :
a) Toda recta de pendiente negativa intersecta a la gráfica de la función $y = \text{Log}_{5/2}\, x$, en un solo punto.
b) Las gráficas de las funciones $y = \text{Log}_3\, x$, $y = \exp_{1/3}\, x$ se intersectan en un solo punto.
c) La gráfica de $y = \text{Log}_{\sqrt{2}/2}\, x$ es una curva decreciente.

10. Explique porqué ***son iguales*** las funciones $f(x) = \text{Log}_a\, x^2$,
$g(x) = 2\,\text{Log}_a\,|x|$.

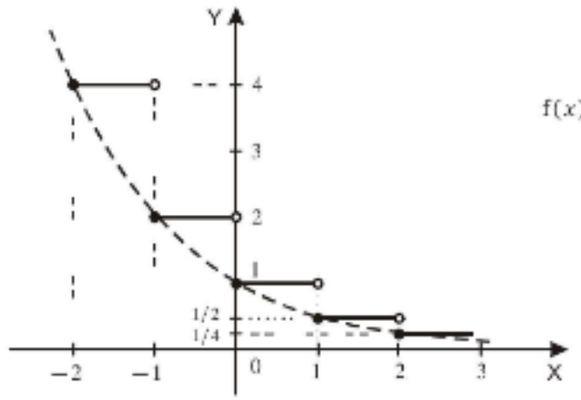
CLAVE DE RESPUESTAS

(1). $\sqrt{8}$, (2). Sumando ambas ecuaciones se obtiene $\text{Log}_x\, 9 = 3/2$.

(3). La ecuación es equivalente a: $x^2 - 20x + 84 = 0 \Rightarrow$ la suma de las raíces es: $S = x_1 + x_2 = 20$; $x_1 = 14$, $x_2 = 6$.

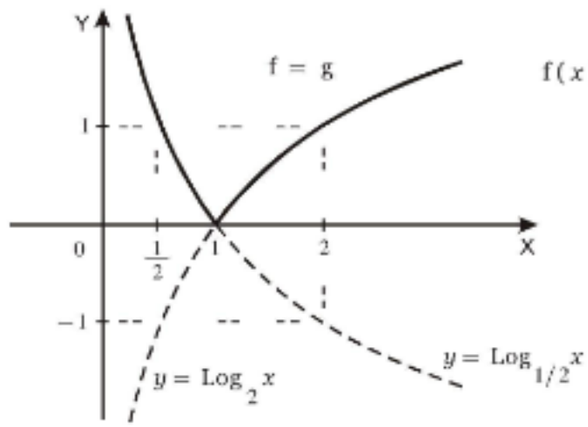
(4). $x = 3$.

(5). $f(x) = (1/2)^n$, $x \in [n, n+1)$, $n \in \mathbb{Z}$



$f(x) = (1/2)^{[\![x]\!]}$

(6). a) Note que $f(x) = g(x)$, $\text{Dom}\,f = \text{Dom}\,g = \mathbb{R}^+$



$f(x) = \left|\text{Log}_{1/2}\, x\right| = \left|\text{Log}_2\, x\right| = g(x)$

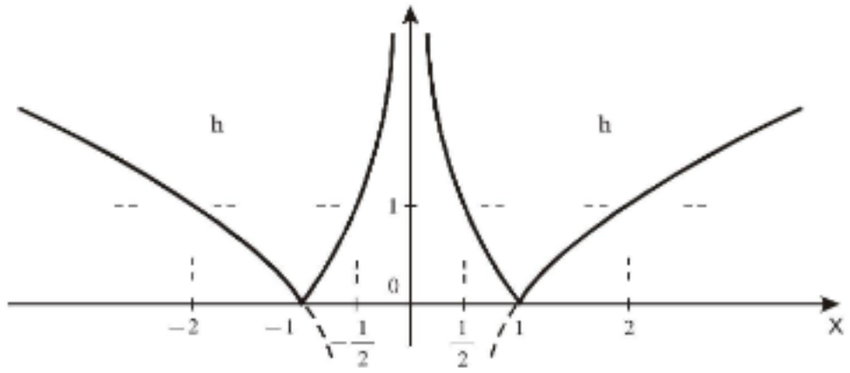
b) $h(x) = \left|\text{Log}_2|x|\right|$, $\forall\, x \in \text{Dom}\,h = \mathbb{R} - \{0\}$

La gráfica de esta función h se encuentra en la siguiente página.

(7). $a[(\text{Log}\,x)^2 + 5(\text{Log}\,x) - 1]^2$, por la regla de la doble aspa.

(8) $x = 3$. (9) Todas.

(6). a) Gráfica de $h(x) = \left| \text{Log}_2 |x| \right|$:



14. ECUACIONES E INECUACIONES LOGARÍTMICAS Y EXPONENCIALES

Cuando se resuelve una ecuación o una inecuación LOGARÍTMICA, en la que aparecen una o varias expresiones de la forma:

$$\text{Log}_a z \qquad \text{o} \qquad \text{Log}_a [f(x)] ,$$

en primera instancia se debe hallar el UNIVERSO de valores de la variable, dentro del cual se han de realizar las operaciones para hallar las soluciones.

Para esto, siempre se debe considerar las condiciones:

14.1 PRIMERA CONDICIÓN.-

La aparición, en una ecuación o inecuación, de la expresión $\text{Log}_a [f(x)]$ automáticamente obliga a ***resolver la inecuación*** $f(x) > 0$.

14.2 SEGUNDA CONDICIÓN.-

La expresión $\text{Log}_a [f(x)]$ además implica la condición, ***que debe ser resuelta***:

$$a > 0 \quad \wedge \quad a \neq 1 .$$

La intersección de los conjuntos de valores x hallados en estas dos condiciones proporciona el UNIVERSO U de valores de la variable dentro del cual se realizan las operaciones posteriores.

14.3 NOTA .- En el proceso de resolver una ***Ecuación Exponencial*** usualmente se aplica una (o ambas) de las dos técnicas indicadas a continuación:

1.- La técnica de llevar las exponenciales a una misma base común.
2.- Tomar Logaritmos (en una base fija, por supuesto) en ambos miembros de la ecuación.

14.4 EJEMPLO .- Resuelva las ecuaciones siguientes:

$$\text{a)} \ \text{Log}_x 4 = 2 , \qquad \text{b)} \ 3 \text{Ln}\, x - \text{Ln}\, 32 = 2 \text{Ln}\, (x/2) .$$

SOLUCIÓN .- a) Como la base x debe satisfacer: $x > 0$, $x \neq 1$ $(*)$

$$\text{Log}_x 4 = 2 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 = 4 \quad \Rightarrow \quad x = \pm 2$$

$$[\text{ se descarta el signo } (-) \text{ por } (*)] \quad \Rightarrow \quad \underline{x = 2} .$$

b) La variable x debe satisfacer la condición: $x > 0$ (UNIVERSO),

$$\text{Ln}\,(x^3/32) = \text{Ln}\,(x^2/4) \quad \Leftrightarrow \quad x^3/32 = x^2/4 \quad \Leftrightarrow \quad x^3 = 8x^2$$

$$\Leftrightarrow \quad x^2 (x - 8) = 0 \ , \text{ y como } x \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \underline{x = 8}$$

14.5 EJEMPLO .- Resuelva: $9^x - 4(3^x) - 5 = 0$.

SOLUCIÓN .- En forma equivalente se tiene que:

$$(3^x)^2 - 4(3^x) - 5 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad z^2 - 4z - 5 = 0 , \ (z = 3^x)$$

$$\Rightarrow \quad (z - 5)(z + 1) = 0 \quad \Rightarrow \quad z = 3^x = 5 \quad \Rightarrow \quad x = \text{Log}_3 5 .$$

La posible solución $z = 3^x = -1$ se descarta, pues toda exponencial debe ser siempre positiva. Luego, la solución es $x = \text{Log}_3 5 = 1.4649735$.

14.6 EJERCICIO .- Resuelva: $\text{Log}_3 (x + 3) = \text{Log}_9 (x + 1) + 1$.

SOLUCIÓN .- Universos parciales: $U_1 : x > -3$, $U_2 : x > -1$,

UNIVERSO $U = U_1 \cap U_2 = \langle -1, \infty \rangle$; resolviendo aquí:

$$\text{Log}_9 (x + 3)^2 = \text{Log}_9 (x + 1) + 1 \quad \Rightarrow \quad \text{Log}_9 [(x + 3)^2/(x + 4)] = 1$$

$$\Rightarrow \quad (x + 3)^2/(x + 1) = 9 \quad \Rightarrow \quad x^2 - 3x = 0 \quad \Rightarrow \quad x(x - 3) = 0$$

$$\Rightarrow \quad x = 0 , \ x = 3 . \quad \text{Luego,} \quad \text{C. S.} = U \cap \{0, 3\} = \{0, 3\}.$$

14.7 EJERCICIO .- Resuelva: $\text{Log}_x 4 + 3\,\text{Log}_4 x = 7/2$.

SOLUCIÓN .- Universo: $x > 0$, $x \neq 1$; en este Universo :

$(1/\text{Log}_4 x) + 3\,\text{Log}_4 x = 7/2 \Rightarrow 6(\text{Log}_4 x)^2 - 7\,\text{Log}_4 x + 2 = 0$

$(3\,\text{Log}_4 x - 2)(2\,\text{Log}_4 x - 1) = 0 \Rightarrow \text{Log}_4 x = \frac{2}{3}$, $\text{Log}_4 x = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow x = 4^{2/3}$, $x = 4^{1/2} = 2$. Luego, C. S. $= \{ 4^{2/3}, 2 \}$.

14.8 EJERCICIO .- Resuelva: $\text{Log}_2 (9^{x-1} + 7) = 2 + \text{Log}_2 (3^{x-1} + 1)$.

SOLUCIÓN .-

$$\text{Log}_2 \left(\frac{9^{x-1} + 7}{3^{x-1} + 1}\right) = 2 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{9^{x-1} + 7}{3^{x-1} + 1} = 2^2 = 4$$

$$\frac{1}{9}(9^x) + 7 = \frac{4}{3}(3^x) + 4 \quad \Leftrightarrow \quad (3^x)^2 - 12(3^x) + 27 = 0$$

$$(3^x - 9)(3^x - 3) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 3^x = 9 = 3^2, \quad 3^x = 3$$

$\Leftrightarrow$ $x = 2$, $x = 1$. Luego, C. S. $= \{ 2, 1 \}$.

14.9 EJERCICIO .- Resuelva: $(\text{Log Log } x)^{5 \text{Log} x} = -15$.

SOLUCIÓN .- Como ninguna función exponencial tiene valores negativos, entonces esta ecuación ***no tiene solución*** : C. S. $= \varnothing$.

14.10 EJERCICIO .- Resuelva : $(\text{Log}_{2x} 6)(\text{Log}_6 x) + 0.5 = \text{Log}_x 2$.

SOLUCIÓN .- Universo: $x > 0$; y mediante Propiedades de Logaritmos:

$(\text{Log}_{2x} x) + \frac{1}{2} = \text{Log}_x 2 \Rightarrow (1/\text{Log}_x 2x) + \frac{1}{2} = \text{Log}_x 2$

$\Rightarrow 2(\text{Log}_x 2)^2 + (\text{Log}_x 2) - 3 = 0 = (2\,\text{Log}_x 2 + 3)(\text{Log}_x 2 - 1)$

$\Rightarrow \text{Log}_x 2 = -\frac{3}{2}$, $\text{Log}_x 2 = 1 \Rightarrow \text{Log}_2 x = -\frac{2}{3}$, $\text{Log}_2 x = 1$

$\Rightarrow x = 2^{-2/3} = 1/\sqrt[3]{4}$, $x = 2 \Rightarrow$ C. S. $= \{ 1/\sqrt[3]{4}, 2 \}$.

14.11 EJERCICIO .- Sean a y b las longitudes de los catetos de un triángulo rectángulo, y c la longitud de su hipotenusa.

Si $c - b \neq 1$ y $c + b \neq 1$, exprese como suma de Logaritmos al producto $A = 2(\text{Log}_{c+b} a)(\text{Log}_{c-b} a)$.

SOLUCIÓN .- Por el Teorema de Pitágoras: $c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow$

$a^2 = c^2 - b^2 = (c - b)(c + b)$.

Tomando Log_a en ambos miembros: $2 = \text{Log}_a (c - b) + \text{Log}_a (c + b)$

$$\Rightarrow 2 = \frac{1}{\text{Log}_{c-b} a} + \frac{1}{\text{Log}_{c+b} a} = \frac{\text{Log}_{c+b} a + \text{Log}_{c-b} a}{(\text{Log}_{c+b} a)(\text{Log}_{c-b} a)}$$

$$A = 2(\text{Log}_{c+b} a)(\text{Log}_{c-b} a) = \text{Log}_{c+b} a + \text{Log}_{c-b} a .$$

14.12 EJERCICIO .- Resuelva: $\text{Log}_{ax}(a/x) + \text{Log}_a^2(x) = 1$.

SOLUCIÓN .- $[\text{Log}_a (a/x) / \text{Log}_a (ax)] + \text{Log}_a^2(x) = 1 \Rightarrow$

$$\frac{(1 - \text{Log}_a x)}{(1 + \text{Log}_a x)} = 1 - \text{Log}_a^2 x = (1 - \text{Log}_a x)(1 + \text{Log}_a x) \qquad (*)$$

$\Rightarrow$ i) Si $(1 - \text{Log}_a x) = 0 \Rightarrow$ $\boxed{x = a}$

ii) Si $(1 - \text{Log}_a x) \neq 0 \Rightarrow (1 + \text{Log}_a x)^2 = 1$ en $(*)$,

$\Rightarrow [\, 1 + \text{Log}_a x = 1 \,] \vee [\, 1 + \text{Log}_a x = -1 \,]$

$\Rightarrow (x = 1)$, $(x = a^{-2} = 1/a^2)$.

Por lo tanto, C. S. $= \{ a, 1, 1/a^2 \}$.

14.13 EJERCICIO .- Resuelva: $\dfrac{\text{Log}(1 + \sqrt{x+1})}{\text{Log}\sqrt[3]{x - 40}} = 3$

SOLUCIÓN .- Notemos que el Universo es U : $x > 40$ . . . $(*)$

La ecuación dada es equivalente a:

$\text{Log}(1 + \sqrt{x+1}) = \text{Log}(x - 40) \quad \Leftrightarrow \quad 1 + \sqrt{x+1} = x - 40$

$\Leftrightarrow \quad 0 = x^2 - 83x + 1680 = (x - 48)(x - 35) \quad \Leftrightarrow \quad x = 48$.

Se descarta la posible solución $x = 35$ pues no pertenece al Universo.

14.14 EJERCICIO .- Resuelva: $\dfrac{100^{\operatorname{Log} x} + 1}{10^{\operatorname{Log} x}} = \dfrac{4}{\sqrt{3}}$ ... $(*)$

SOLUCIÓN .- Universo $U: \; x > 0$; y como se cumple que:

i) $100^{\operatorname{Log} x} = (10^2)^{\operatorname{Log}_{10} x} = 10^{2\operatorname{Log}_{10} x} = 10^{\operatorname{Log}_{10}(x^2)} = x^2$

ii) $10^{\operatorname{Log} x} = 10^{\operatorname{Log}_{10} x} = x$; entonces $(*)$ se transforma en:

$\sqrt{3}\,x^2 - 4x + \sqrt{3} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = \dfrac{1}{2\sqrt{3}}(4 \pm \sqrt{16-12})$

$\therefore \quad C.S. = \{ \sqrt{3} \, , \, 1/\sqrt{3} \}$.

14.15 EJERCICIO .- Resuelva: $b \cdot b^3 \cdot b^5 \ldots b^{2x-1} = n$.

SOLUCIÓN .- $b^{1+3+5+\ldots+(2x-1)} = b^{x^2} = n \quad , \quad b > 0$

$\Rightarrow \quad x^2 = \operatorname{Log}_b n \quad \Rightarrow \quad \underline{x = \sqrt{\operatorname{Log}_b n}}$, si es que $\operatorname{Log}_b n > 0$.

14.16 EJERCICIO .- Resuelva: $3^{2x+1} - 7 = 5(3^x - 1)$.

SOLUCIÓN .- $3(3^x)^2 - 5(3^x) - 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad 3z^2 - 5z - 2 = 0$

$(z = 3^x \quad \Rightarrow \quad z > 0) \quad \Rightarrow \quad (z-2)(3z+1) = 0 \quad \Rightarrow \quad z = 2$

$\Rightarrow \quad 3^x = 2 \quad \Rightarrow \quad x = \operatorname{Log}_3 2 = 0.6309297$.

14.17 EJERCICIO .- Resuelva la ecuación:

$$\sqrt{\operatorname{Log}_a \sqrt[4]{ax} + \operatorname{Log}_x \sqrt[4]{ax}} + \sqrt{\operatorname{Log}_a \sqrt[4]{(x/a)} + \operatorname{Log}_x \sqrt[4]{(a/x)}} = a$$

SOLUCIÓN .- Restricciones: $a > 0 \; , \; a \neq 1 \; , \; x > 0 \; , \; x \neq 1$.

La expresión dentro del primer radical se transforma en:

$$\frac{1}{4}[\operatorname{Log}_a(ax) + \operatorname{Log}_x(ax)] = \frac{1}{4}[2 + \operatorname{Log}_a x + \operatorname{Log}_x a] =$$

$$= \frac{1}{4}\left[2 + \operatorname{Log}_a x + \frac{1}{\operatorname{Log}_a x}\right] = \frac{1}{4\operatorname{Log}_a x}(\operatorname{Log}_a x + 1)^2 .$$

Análogamente, la expresión dentro de la segunda expresión radical es igual a

$$\frac{1}{4}[\operatorname{Log}_a x + \operatorname{Log}_x a - 2] = \frac{1}{4\operatorname{Log}_a x}(\operatorname{Log}_a x - 1)^2$$

Por lo tanto, la ecuación original se transforma en:

$$\left|\operatorname{Log}_a x + 1\right| + \left|\operatorname{Log}_a x - 1\right| = 2a\sqrt{\operatorname{Log}_a x} \qquad (\alpha)$$

De (α) tenemos otra restricción: que $\operatorname{Log}_a x > 0$.

CASO (A): Si $\operatorname{Log}_a x = 1 \quad \Rightarrow \quad x = a$,

[en (α)] $\quad \Rightarrow \quad a = 1$ (Absurdo) .

CASO (B): Si $0 < \operatorname{Log}_a x < 1$, entonces (α) se convierte en:

$$(\operatorname{Log}_a x + 1) + (1 - \operatorname{Log}_a x) = 2a\sqrt{\operatorname{Log}_a x}$$

$$\Leftrightarrow \quad \operatorname{Log}_a x = 1/a^2 \quad \Leftrightarrow \quad x = a^{1/a^2} .$$

CASO (C): Si $\operatorname{Log}_a x > 1$, entonces (α) se transforma en:

$$\operatorname{Log}_a x = a^2 \quad \Leftrightarrow \quad x = a^{(a^2)} .$$

De los CASOS (A) , (B) y (C): $C.S. = \{ a^{1/a^2} \, , \, a^{a^2} \}$

14.18 EJERCICIO .- Dada la ecuación:

$$1 + \operatorname{Log}_x\left(\frac{4-x}{10}\right) = (\operatorname{Log}\operatorname{Log} n - 1)\operatorname{Log}_x 10 \; ,$$

analizar en función de n el número de raíces, y determinarlas.

SOLUCIÓN .- Restricciones: $0 < x < 4 \; , \; n > 0 \; , \; \operatorname{Log} n > 0$,

$\Rightarrow \quad n > 1$. Luego, los valores de x y n deben satisfacer: $\underline{0 < x < 4 \; , \; n > 1}$ ... $(*)$,

entonces expresando 1 como $1 = \operatorname{Log}_x x$, la ecuación dada se transforma en:

$x^2 - 4x + \operatorname{Log} n = 0$ cuyo DISCRIMINANTE es : $\underline{\Delta = 4(4 - \operatorname{Log} n)}$.

a) Si $(4 - \operatorname{Log} n) > 0$: $\Rightarrow \quad 1 < n < 10\,000$ ... [por $(*)$]

$\Rightarrow$ ***existen DOS RAÍCES REALES distintas*** :

$$x = 2 \pm \sqrt{4 - \text{Log}_{10} n} \quad , \quad \forall\ n \in \langle\ 1\ ,\ 10\,000\ \rangle\ .$$

b) Si $(4 - \text{Log } n) = 0$: $\Rightarrow$ $n = 10\,000$, en este caso ***solamente existe una raiz real*** : $x = 2$.

c) Si $(4 - \text{Log } n) < 0$: $\Rightarrow$ $n > 10\,000$, en cuyo caso ***no existe ninguna raiz real*** .

14.19 EJERCICIO .- Resuelva: $\dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

SOLUCIÓN .- Operando: $\sqrt{3}\,(e^x - e^{-x}) = e^x + e^{-x}$ $\Rightarrow$

$\sqrt{3}(e^{2x} - 1) = e^{2x} + 1$ $\Rightarrow$ $e^{2x} = (\sqrt{3} + 1)/(\sqrt{3} - 1) = 2 + \sqrt{3}$

$\Rightarrow$ $2x = \text{Ln}\,(2 + \sqrt{3})$ $\Rightarrow$ $x = \frac{1}{2}\,\text{Ln}\,(2 + \sqrt{3})$.

14.20 EJERCICIO .- Resuelva: $3^{3-x}\,2^{5x} = 3^{x+5}\,2^{3x}$.

SOLUCIÓN .- Tomando Log_3 en ambos miembros:

$$(3 - x) + 5x\,\text{Log}_3 2 = (x + 5) + 3x\,\text{Log}_3 2$$

$\Rightarrow$ $x(\text{Log}_3 2 - 1) = 1$ $\Rightarrow$ $x(\text{Log}_3 2 - \text{Log}_3 3) = 1$

$\Rightarrow$ $x = \text{Log}_{2/3} 3 = -2{,}709511291$.

14.21 EJERCICIO .- Resuelva: $\sqrt[(\text{Log}_x 3x)]{x} = 3$.

SOLUCIÓN .- Dentro del UNIVERSO: $x > 0$, la ecuación se convierte en

$x = 3^{\text{Log}_x (3x)}$ $\Rightarrow$ $\text{Log}_3 x = \text{Log}_x (3x) = 1 + \text{Log}_x 3$

$\Rightarrow$ $\text{Log}_3 x = 1 + (1/\text{Log}_3 x)$ $\Rightarrow$ $(\text{Log}_3 x)^2 - (\text{Log}_3 x) - 1 = 0$

(y haciendo $z = \text{Log}_3 x$) $\Rightarrow$ $z^2 - z - 1 = 0$ $\Rightarrow$ $z = \frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{5})$

$\Rightarrow$ $\text{Log}_3 x = \frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{5})$ $\Rightarrow$ $x = \exp_3 [\,\frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{5})\,]$

Por lo tanto, C. S. $= \{\ 3^{(1+\sqrt{5})/2}\ ,\ 3^{(1-\sqrt{5})/2}\ \}$

14.22 EJERCICIO .- Resuelva el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} e^x = y^e \\ 4x = e\,(4 + \text{Ln}^2 y) \end{cases}$$

SOLUCIÓN .- De la 1ra. ecuación: $\text{Ln}\,(e^x) = \text{Ln}\,(y^e)$ $\Leftrightarrow$ $x = e\,\text{Ln}\,y$,

y reemplazando en la 2da.: $4x = e\,[\,4 + (x^2/e^2)\,]$ $\Leftrightarrow$

$x^2 - 4ex + 4e^2 = (x - 2e)^2 = 0$ $\Leftrightarrow$ $x = 2e$ $\Leftrightarrow$ $\text{Ln}\,y = 2$

$\Rightarrow$ $y = e^2$. Luego, la única solución es: $(x\,,y) = (2e\,,e^2)$.

14.23 EJERCICIO .- Simplifique la expresión:

$$A = \sqrt[3]{2\sqrt[3]{32\sqrt[3]{2\sqrt[3]{32}}}}\ \ \ldots\ \infty$$

SOLUCIÓN .- Note que: $A > 0$, y que $A = \sqrt[3]{2\sqrt[3]{32\,(A)}}$

$\Rightarrow$ $A = \sqrt[9]{2^8 A}$ $\Rightarrow$ $A^9 = 2^8 A$ $\Rightarrow$ $A^8 = 2^8$ $\Rightarrow$ $A = 2$.

14.24 EJERCICIO .- Resuelva el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} \left(\sqrt[3]{2\sqrt[3]{32\sqrt[3]{2\sqrt[3]{32}}}}\ \ \ldots\ \infty\right)^{x+y} = \left(\sqrt{6\sqrt{6\sqrt{6\ldots\infty}}}\right)^{y} \\ 3^{x-1} = 2^{y+1} \end{cases}$$

SOLUCIÓN .- Siguiendo la técnica del Ejercicio anterior vemos que el sistema es equivalente al siguiente sistema:

$$\begin{cases} 2^{x+y} = 6^y \\ 3^{x-1} = 2^{y+1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2^x = 3^y \\ 3^{x-1} = 2^{y+1} \end{cases} ,$$

y tomando Log_2 en ambas ecuaciones:

$$x = y\,\text{Log}_2 3\ , \quad (x - 1)\,\text{Log}_2 3 = y + 1 \quad \Rightarrow$$

$(y\,\text{Log}_2 3 - 1)\,\text{Log}_2 3 = y + 1$ $\Rightarrow$ $y[\,(\text{Log}_2 3)^2 - 1\,] = (\text{Log}_2 3 + 1)$

$\Rightarrow$ $y = 1/(\text{Log}_2 3 - 1) = \text{Log}_{3/2} 2$

$x = y\,\text{Log}_2 3 = \text{Log}_{3/2} 2 \cdot \text{Log}_2 3 = \text{Log}_{3/2} 3$

Por lo tanto, la solución es: $(x\,,y) = (\,\text{Log}_{3/2} 3\ ,\ \text{Log}_{3/2} 2\,)$.

14.25 EJERCICIO .- Resuelva el sistema de ecuaciones simultáneas:

$$(3x+y)^{x-y} = 9 \quad , \quad (x-y)\sqrt{324} = 18x^2 + 12xy + 2y^2$$

SOLUCIÓN .- Como $324 = (81)(4)$, de la 2da. Ec. tenemos:

$$324 = [\,2(3x+y)^2\,]^{x-y} = 2^{x-y}[(3x+y)^{x-y}]^2$$

$$\Rightarrow \quad 324 = 2^{x-y}(9)^2 \quad \Rightarrow \quad 4 = 2^{x-y} \quad \Rightarrow$$

$$x - y = 2 \, , \quad (3x+y)^2 = 9 \quad \Rightarrow \quad x - y = 2 \, , \quad 3x + y = \pm 3$$

$$\Rightarrow \quad \text{C.S.} = \{ (\tfrac{5}{4} \, , -\tfrac{3}{4}) \, , \, (-\tfrac{1}{4} \, , -\tfrac{9}{4}) \} \, .$$

14.26 EJERCICIO .- Resuelva el sistema de ecuaciones:

$$a^x b^y = ab \quad , \quad 2\,\text{Log}_a x = (\text{Log}_{1/b} y) \cdot \text{Log}_{\sqrt{a}} b \, .$$

SOLUCIÓN .- Restricciones: $a > 0$, $b > 0$, $x > 0$, $y > 0$, $a \neq 1$, $b \neq 1$. En la segunda ecuación:

$$\text{Log}_a x^2 = \text{Log}_b (1/y)\,\text{Log}_a b^2 \quad \Rightarrow \quad \text{Log}_{b^2}(x^2) = \text{Log}_b (1/y)$$

$$\Rightarrow \quad \text{Log}_b x = \text{Log}_b (1/y) \quad \Rightarrow \quad x = 1/y \quad \ldots \quad (\alpha)$$

De la 1ra. ecuación: $x + y\,\text{Log}_a b = 1 + \text{Log}_a b$ $\Rightarrow$ de (α) :

$$x + \frac{1}{x}\text{Log}_a b = 1 + \text{Log}_a b \quad \Rightarrow \quad x^2 - (1 + \text{Log}_a b)x + \text{Log}_a b = 0$$

$$\Rightarrow \quad x = \frac{1}{2}\left[(1 + \text{Log}_a b) \pm \left| 1 - \text{Log}_a b \right| \right] \quad \Rightarrow \quad x = 1 \, , \quad x = \text{Log}_a b$$

Y debido a que $y = 1/x$ es que obtenemos las dos soluciones del sistema:

$$(x, y) = (1, 1) \quad \text{y} \quad (x, y) = (\text{Log}_a b \, , \, \text{Log}_b a) \, .$$

14.27 EJERCICIO .- Resuelva el sistema de ecuaciones simultáneas:

$$(ax)^{\text{Log } a} = (by)^{\text{Log } b} \, , \quad b^{\text{Log } x} = a^{\text{Log } y}$$

para $a \neq 1$, $b \neq 1$ y $a \neq b$.

SOLUCIÓN .- Restricciones: $a > 0$, $b > 0$, $x > 0$, $y > 0$;

De la 1ra. Ec.: $(\text{Log } a)(\text{Log } a + \text{Log } x) = (\text{Log } b)(\text{Log } b + \text{Log } y)$

y de la 2da. : $(\text{Log } x)(\text{Log } b) = (\text{Log } y)(\text{Log } a) \quad \ldots \quad (\alpha)$.

De aquí despejamos $\text{Log } x$ y reemplazamos en la primera ecuación:

$$(\text{Log } y)\left[\frac{(\text{Log } a)^2 - (\text{Log } b)^2}{(\text{Log } b)} \right] = (\text{Log } b)^2 - (\text{Log } a)^2$$

(y como $a \neq b$) $\Rightarrow$ $\text{Log } y = -\text{Log } b$ $\Rightarrow$ $y = 1/b$

y como $b \neq 1$, volviendo a (α) obtenemos:

$$(\text{Log } x)(\text{Log } b) = (-\text{Log } b)(\text{Log } a) \quad \Rightarrow \quad x = 1/a$$

Así, la solución es el punto $(x \, , \, y) = (1/a \, , \, 1/b)$.

14.28 EJERCICIO .- Resuelva el sistema de ecuaciones:

$$(x+y)^{x+y} = 8 - (x+y)^x \qquad (\text{I})$$

$$(x+y)^{x-y} = 8 - 16(x+y)^{y-x} \qquad (\text{II})$$

sabiendo que x e y son números enteros ≥ 0 .

SOLUCIÓN .- En (II) : $(x+y)^{x-y} = 8 - [\,16 / (x+y)^{x-y}\,]$ $\Rightarrow$

$$[\,(x+y)^{x-y}\,]^2 - 8(x+y)^{x-y} + 16 = 0 \quad \Rightarrow \quad z^2 - 8z + 16 = 0$$

{ donde $z = (x+y)^{x-y}$ } $\Rightarrow$ $(z-4)^2 = 0$ $\Rightarrow$ $z = 4$

es decir $(x+y)^{x-y} = 4$.

Y debido a que x e y deben ser números enteros ≥ 0 , entonces sólo puede ocurrir que: $(x+y)^{x-y} = 2^2$ ó $(x+y)^{x-y} = 4^1$.

Luego:

a) $x + y = 2$, $x - y = 2$ $\Rightarrow$ $x = 2$, $y = 0$,

o b) $x + y = 4$, $x - y = 1$ $\Rightarrow$ $x = \frac{5}{2}$, $y = \frac{3}{2}$,

pero por el dato sólo procede la Solución { a } : $x = 2$, $y = 0$.

A continuación resolveremos algunas ***INECUACIONES LOGARÍTMICAS*** y cualquiera de los procedimientos que utilicemos estará basado en los resultados presentados en [13.32] , por lo cual se recomienda repasar dichos puntos así como las consideraciones indicadas al inicio de esta SECCIÓN [14] .

14.29 EJERCICIO .- Resuelva la inecuación siguiente:

$$\text{Log}_{1/3}(2x+5) > -2 \, .$$

SOLUCIÓN .- (a) $2x + 5 > 0$ $\Leftrightarrow$ $x > -5/2$ (UNIVERSO) ,

(b) Por satisfacer la base que: $0 < 1/3 < 1$, entonces al tomar la exponencial $\exp_{1/3}$ en la base $1/3$, deberá invertirse el sentido de la desigualdad:

$$(2x+5) \;<\; (1/3)^{-2} = 9 \quad \Leftrightarrow \quad x < 2$$

$\therefore$ C.S. = (a) $\cap$ (b) = $\langle -5/2, \infty \rangle \cap \langle -\infty, 2 \rangle = \langle -5/2, 2 \rangle$.

14.30 EJERCICIO .- Resuelva las inecuaciones siguientes:

1) $\text{Log}_2 (x-4) < 1$

2) $\text{Log}_{1/5} (2x^2 - 3x + 5) < \text{Log}_{1/5} (x^2 + 2x + 1)$

SOLUCIÓN .- 1) a) $x - 4 > 0 \;\Rightarrow\; x > 4$: UNIVERSO,

b) $x - 4 < 2 \;\Rightarrow\; x < 6$

$\Rightarrow$ C.S. = (a) $\cap$ (b) = $\langle 4, 6 \rangle$.

2) a) $2x^2 - 3x + 5 > 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \in \mathbb{R}$, pues su DISCRIMINANTE es $\Delta = -31 < 0$.

b) $x^2 + 2x + 1 > 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x+1)^2 > 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \neq -1$

c) Por ser la base: $0 < 1/5 < 1$ entonces,

$$2x^2 - 3x + 5 \;>\; x^2 + 2x + 1$$

$\Rightarrow \quad x^2 - 5x + 4 = (x-4)(x-1) > 0$

$\Rightarrow \quad x \in \langle -\infty, 1 \rangle \cup \langle 4, \infty \rangle$.

$\therefore$ C. S. = (a) $\cap$ (b) $\cap$ (c) = $\langle -\infty, -1 \rangle \cup \langle -1, 1 \rangle \cup \langle 4, \infty \rangle$.

14.31 EJERCICIO .- Resuelva las siguientes inecuaciones:

1) $\text{Log}_{1/3} (x^2 + 2x) > 0$, 2) $\text{Log}_{1/5} (2x^2 + 5x + 1) < 0$.

SOLUCIÓN .- 1) a) $x^2 + 2x > 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \in \langle -\infty, -2 \rangle \cup \langle 0, \infty \rangle$

b) $x^2 + 2x < 1 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 + 2x - 1 < 0$

$\Leftrightarrow \quad x \in \langle -1 - \sqrt{2}\,,\; -1 + \sqrt{2} \rangle$

Luego, C. S. = (a) $\cap$ (b) = $\langle -1 - \sqrt{2}\,,\; -2 \rangle \cup \langle 0, -1 + \sqrt{2} \rangle$.

2) a) $2x^2 + 5x + 1 > 0$

$\Leftrightarrow \quad x \in \langle -\infty, \frac{1}{4}(-5 - \sqrt{17}\,) \rangle \cup \langle \frac{1}{4}(-5 + \sqrt{17}\,), \infty \rangle$ ($\cong -2.25$; $\cong -0.2$)

b) $2x^2 + 5x + 1 > 1 \quad \Leftrightarrow \quad x(2x+5) > 0$

$\Leftrightarrow \quad x \in \langle -\infty, -5/2 \rangle \cup \langle 0, \infty \rangle$

Luego, C. S. = (a) $\cap$ (b) = $\langle -\infty, -5/2 \rangle \cup \langle 0, \infty \rangle$.

14.32 EJERCICIO .- Resuelva la inecuación: $\text{Log}_x \left(\frac{4x+5}{6-5x}\right) < 1$.

SOLUCIÓN .- (a) $x > 0$, $x \neq 1$,

(b) $\frac{4x+5}{6-5x} > 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \in \langle -5/4\,,\; 6/5 \rangle$,

(c) c1): Si $0 < x < 1$: $\frac{4x+5}{6-5x} > x \quad \Leftrightarrow \quad \frac{5x^2 - 2x + 5}{5x - 6} < 0$

$\Leftrightarrow \quad x \in \langle -\infty, 6/5 \rangle \cap \langle 0, 1 \rangle = \langle 0, 1 \rangle$

c2): Si $x > 1$: $\frac{4x+5}{6-5x} < x \quad \Leftrightarrow \quad x \in \langle 6/5, \infty \rangle \cap \langle 1, \infty \rangle$

$\Leftrightarrow \quad x \in \langle 6/5, \infty \rangle$

Solución (c) = (c1) $\cup$ (c2) = $\langle 0, 1 \rangle \cup \langle 6/5, \infty \rangle$.

$\therefore$ C. S. = (a) $\cap$ (b) $\cap$ (c) = $\langle 0, 1 \rangle$.

14.33 EJERCICIO .- Resuelva: $\sqrt{\text{Log}_x \left(\frac{3-2x}{1-x}\right)} < 1$.

SOLUCIÓN .- a) $x > 0$, $x \neq 1$,

b) $\frac{3-2x}{1-x} > 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \in \langle -\infty, 1 \rangle \cup \langle 3/2, \infty \rangle$

c) $0 \leq \text{Log}_x \left(\frac{3-2x}{1-x}\right) < 1 \quad \Rightarrow$

c1) Si $0 < x < 1$: $1 \geq \frac{2x-3}{x-1} > x$, resolviendo tenemos:

$x \in \langle 0, 1 \rangle \cap (\langle 1, 2 \rangle \cap \langle 1, \infty \rangle) = \varnothing$ (***verificar***)

c2) Si $x > 1$: $1 < \frac{2x-3}{x-1} < x$, y resolviendo tenemos que:

$$x \in [2, \infty) \qquad (\textit{verificar})$$

Luego, Solución (c): $(c1) \cup (c2) = [2, \infty\rangle$

$\therefore$ C. S. = $(a) \cap (b) \cap (c) = [2, \infty)$.

14.34 EJERCICIO .- Resuelva la inecuación:

$$x^{2 - \operatorname{Log}_2^2 x - \operatorname{Log}_2(x^2)} - \frac{1}{x} > 0 .$$

SOLUCIÓN .- Restricción: $x > 0$ (UNIVERSO). Pasando $\frac{1}{x}$ al segundo miembro, y multiplicando por x, resulta:

$$x^{3 - \operatorname{Log}_2^2 x - 2\operatorname{Log}_2 x} > 1 \quad , \text{ donde}$$

a) Si $x = 1$, ***no hay solución***; es decir, $x \neq 1$.

b) Si $0 < x < 1$, tomando Log_x:

$$3 - \operatorname{Log}_2^2 x - 2\operatorname{Log}_2 x < 0 \quad \Rightarrow \quad (\operatorname{Log}_2 x + 3)(\operatorname{Log}_2 x - 1) > 0$$

$$\Rightarrow \quad \operatorname{Log}_2 x < -3 , \quad \operatorname{Log}_2 x > 1 \quad \Rightarrow \quad x < 2^{-3} , \quad x > 2$$

y que intersectando con la concición $0 < x < 1$: $\underline{x \in \langle 0, 1/8 \rangle}$.

c) Si $x > 1$: $3 - \operatorname{Log}_2^2 x - 2\operatorname{Log}_2 x > 0 \quad \Rightarrow$

$$(\operatorname{Log}_2 x + 3)(\operatorname{Log}_2 x - 1) < 0 \quad \Rightarrow \quad -3 < \operatorname{Log}_2 x < 1$$

$$\Rightarrow \quad 2^{-3} < x < 2 \quad \Rightarrow \quad 1/8 < x < 2 ,$$

y al intersectar con la condición: $x > 1$, resulta que $x \in \langle 1, 2 \rangle$.

$\therefore$ C. S. = $(a) \cap [(b) \cup (c)] = \langle 0, 1/8 \rangle \cup \langle 1, 2 \rangle$.

14.35 EJERCICIO .- Resuelva: $\operatorname{Log}_{x/2} |x - 3| < 2$.

SOLUCIÓN .- a) Si $0 < x/2 < 1$: $|x - 3| > (x/2)^2$

$$\Leftrightarrow \quad 0 < x < 2 , \quad x^4 < (4x - 12)^2 \qquad (b1)$$

donde $\{b1\} \Leftrightarrow (x^2 - 4x + 12)(x^2 + 4x - 12) < 0$

$$\Leftrightarrow \quad x^2 + 4x - 12 < 0 \quad (\text{¿?}) \quad \Leftrightarrow \quad (x + 6)(x - 2) < 0$$

(a): $x \in \langle 0, 2 \rangle \cap \langle -6, 2 \rangle = \langle 0, 2 \rangle$.

b) Si $x/2 > 1$: $0 < |x - 3| < (x/2)^2 \quad \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \quad x > 2 \ \wedge \ (x + 6)(x - 2) > 0 \ \wedge \ x \neq 3$$

(b): $x \in \langle 2, 3 \rangle \cup \langle 3, \infty \rangle$

$\therefore$ C. S. = $(a) \cup (b) = \langle 0, 2 \rangle \cup \langle 2, 3 \rangle \cup \langle 3, \infty \rangle$.

14.36 EJERCICIO .- Resuelva: $\operatorname{Log}_{1/2} \left| \operatorname{Log}_3 (4 - x^2) \right| > 0 \qquad (*)$

SOLUCIÓN .- ***Siendo la base*** $1/2$ ***menor que*** 1, de $(*)$:

$$0 < \left| \operatorname{Log}_3 (4 - x^2) \right| < (1/2)^0 = 1$$

$$\Leftrightarrow \quad -1 < \operatorname{Log}_3 (4 - x^2) < 1 \quad \wedge \quad \operatorname{Log}_3 (4 - x^2) \neq 0$$

$$\Leftrightarrow \quad 3^{-1} < (4 - x^2) < 3 \quad \wedge \quad (4 - x^2) \neq 1 \quad \wedge \quad (4 - x^2) > 0$$

$$\Leftrightarrow \quad (1 < x^2 < 11/3) \quad \wedge \quad x \neq \pm\sqrt{3} ,$$

$\sqrt{3} \cong 1.73$
$\sqrt{11/3} \cong 1.91$

$\therefore$ C. S. = $(-\sqrt{11/3}, -\sqrt{3}) \cup (-\sqrt{3}, -1) \cup (1, \sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}, \sqrt{11/3})$

14.37 EJERCICIO .- Si $a > 1$, resuelva la inecuación:

$$\operatorname{Log}_a x + \operatorname{Log}_a (x + 1) < \operatorname{Log}_a (2x + 6) \quad \ldots (*)$$

SOLUCIÓN .- UNIVERSO: $x > 0 \ \wedge \ (x + 1) > 0 \ \wedge \ (2x + 6) > 0$

$$\Rightarrow \quad U = \langle 0, \infty \rangle \cap \langle -1, \infty \rangle \cap \langle -3, \infty \rangle = \langle 0, \infty \rangle$$

Como $a > 1$, entonces aplicando Propiedades de Logaritmos ***dentro de*** U:

$$(*) \quad \Leftrightarrow \quad \operatorname{Log}_a \frac{x(x + 1)}{2(x + 3)} < 0 \quad \wedge \quad x \in U$$

$$\Leftrightarrow \quad 0 < \frac{x(x + 1)}{2(x + 3)} < 1 \quad \wedge \quad x \in U$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{x(x + 1)}{(x + 3)} > 0 \quad \wedge \quad \frac{(x - 3)(x + 2)}{(x + 3)} > 0 \quad \wedge \quad x \in U$$

$\Leftrightarrow \quad x \in (\langle -3,-1\rangle \cup \langle 0,\infty\rangle) \cap (\langle -\infty,-3\rangle \cup \langle -2,3\rangle) \cap \langle 0,\infty\rangle$

$\therefore$ C. S. $= \langle 0,3\rangle$.

14.38 EJERCICIO .- Resuelva: $\text{Log}_x(x^2 - x - 5) > 0$.

SOLUCIÓN .- (a) Si $0 < x < 1$: $0 < x^2 - x - 5 < 1$

$\Leftrightarrow \quad [\,0 < x < 1 \ \wedge \ 0 < (x - \frac{1}{2})^2 - \frac{21}{4} < 1\,] \quad \Leftrightarrow \quad \underline{x \in \varnothing}$

b) Si $x > 1$: $x^2 - x - 5 > 1 \quad \Leftrightarrow$

$[\,x > 1 \ \wedge \ x^2 - x - 6 = (x-3)(x+2) > 0\,] \quad \Leftrightarrow \quad \underline{x \in \langle 3,\infty\rangle}$

Por lo tanto, C. S. $= (a) \cup (b) = \varnothing \cup \langle 3,\infty\rangle = \underline{\langle 3,\infty\rangle}$.

14.39 EJERCICIO .- Resuelva: $\text{Log}_2(2^x - 2) \cdot \text{Log}_{1/2}(2^{x+1} - 4) > -2$.

SOLUCIÓN .-

a) $2^x - 2 > 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2^x > 2 \quad \Leftrightarrow \quad x > 1$

b) $2^{x+1} - 4 > 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2^x > 2 \quad \Leftrightarrow \quad x > 1$

c) $[-\text{Log}_{1/2}(2^x - 2)] \cdot \text{Log}_{1/2}(2^{x+1} - 4) > -2 \quad \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \quad \text{Log}_{1/2}(2^x - 2) \cdot \text{Log}_{1/2}[2(2^x - 2)] < 2$

$\Leftrightarrow \quad \text{Log}_{1/2}(2^x - 2) \cdot [-1 + \text{Log}_{1/2}(2^x - 2)] < 2 \quad \Leftrightarrow$

$z^2 - z + 2 = (z-2)(z+1) < 0$, con $z = \text{Log}_{1/2}(2^x - 2)$

$\Leftrightarrow \quad -1 < z < 2 \quad \Leftrightarrow \quad -1 < \text{Log}_{1/2}(2^x - 2) < 2$

$\Leftrightarrow \quad (\frac{1}{2})^{-1} > (2^x - 2) > (\frac{1}{2})^2 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{9}{4} < 2^x < 4$

$\Leftrightarrow \quad x \in \langle \text{Log}_2(9/4),\ 2\rangle$. Note que $\text{Log}_2(9/4) > 1$.

Por lo tanto, C. S. $= (a) \cap (b) \cap (c) = \langle \text{Log}_2(9/4),\ 2\rangle$.

14.40 EJERCICIO .- Resuelva: $\dfrac{(\text{Log}_a x)^2}{\text{Log}_a(a/x^2)} > \dfrac{1}{3}$ (*)

SOLUCIÓN .- $a > 0$, $a \neq 1$. (i) UNIVERSO: $x \in (0,\infty)$,

ii) $\dfrac{3(\text{Log}_a x)^2 + 2(\text{Log}_a x) - 1}{2(\text{Log}_a x) - 1} < 0 \quad \Leftrightarrow$

$\dfrac{(3z-1)(z+1)}{(2z-1)} < 0$ ....

... para $z = \text{Log}_a x$, $\Leftrightarrow \quad z = \text{Log}_a x \in \langle -\infty,-1\rangle \cup \langle 1/3, 1/2\rangle$

$\Leftrightarrow \quad (\text{Log}_a x < -1) \ \vee \ (1/3 < \text{Log}_a x < 1/2) \quad \ldots \quad (*)$

ahora tomaremos $\exp_a$, considerando los dos casos siguientes:

PRIMER CASO: Si $0 < a < 1$,

$(*) \quad \Leftrightarrow \quad (x > a^{-1}) \ \vee \ (a^{1/3} > x > a^{1/2})$,

y que al intersectar con el UNIVERSO $U = (0,\infty)$ resulta:

C. S. $= \langle \sqrt{a}\ ,\ \sqrt[3]{a}\ \rangle \cup \langle 1/a\ ,\ \infty\rangle$.

SEGUNDO CASO: Si $a > 1$

$(*) \quad \Leftrightarrow \quad (x < a^{-1}) \ \vee \ (a^{1/3} < x < a^{1/2})$,

y que al intersectar con el UNIVERSO $U = (0,\infty)$ resulta:

C. S. $= \langle 0,\ 1/a\rangle \cup \langle \sqrt[3]{a}\ ,\ \sqrt{a}\ \rangle$.

14.41 EJERCICIO .- Sea $f(x) = e^{-x/10}$, $-11 < x < 0$.

a) Exprese f como una composición de funciones.
b) Demuestre que f es inyectiva, y halle su rango.
c) Halle la función inversa de f .

SOLUCIÓN .- a) $f(x) = [\exp_e(-\frac{1}{10}\,I)\,](x)$

$\Rightarrow \quad f = \exp_e \circ (-\frac{1}{10}\,I)$.

b) $\forall\ x_1, x_2 \in \langle -11,\ 0\rangle = \text{Dom}\, f$:

$$f(x_1) = f(x_2) \quad \Rightarrow \quad e^{-x_1/10} = e^{-x_2/10} \quad \Rightarrow \quad \text{(por 13.7 - 8)}$$
$$\Rightarrow \quad -x_1/10 = -x_2/10 \quad \Rightarrow \quad x_1 = x_2 \ .$$

Por lo tanto, f resulta INYECTIVA, de modo que existe su función inversa.

CÁLCULO DEL RANGO DE f : $\forall\ x \subset \text{Dom } f = \langle -11,\ 0 \rangle$,

$-11 < x < 0 \quad \Leftrightarrow \quad 0 < -x/10 < 11/10$, y tomando $\exp_e$:

$$\Leftrightarrow \quad e^0 < e^{-x/10} < e^{11/10} \qquad \text{(pues } e > 1\text{)}$$

$$\Leftrightarrow \quad 1 < f(x) < e^{11/10} \quad \Leftrightarrow \quad \text{RANG}(f) = \langle 1,\ e^{11/10} \rangle \cong 3.0$$

c) CÁLCULO DE LA FUNCIÓN INVERSA f^{-1}:

$$y = f(x) = e^{-x/10} \quad \Rightarrow \quad \text{Log}_e\, y = \text{Ln}\, y = -x/10$$
$$\Rightarrow \quad x = f^{-1}(y) = -10 \text{Ln}\, y$$
$$\therefore \quad f^{-1}(x) = -10 \text{Ln}\, x \ , \quad \forall\ x \in \langle 1,\ e^{11/10} \rangle = \text{Dom } f^{-1} \ .$$

14.42 EJERCICIO .- Resuelva: $2^{|x-1|} + 4^{|x-1|} \leq 30$.

SOLUCIÓN .- $z^2 + z - 30 = (z+6)(z-5) \leq 0$, (para $z = 2^{|x-1|}$ lo que implica que z es siempre > 0)

$$\Leftrightarrow \quad z \leq 5 \quad \Leftrightarrow \quad 2^{|x-1|} \leq 5 \quad \Leftrightarrow \quad |x-1| \leq \text{Log}_2 5$$
$$\Leftrightarrow \quad x \in [\, 1 - \text{Log}_2 5 \ ,\ \ 1 + \text{Log}_2 5 \,] \ .$$

14.43 EJERCICIO .- Resuelva: $(2^x - 3^x)(x^2 - 1)(x - 3)x > 0$.

SOLUCIÓN .- C. S. = (a) ∪ (b) , donde

(a): $(2^x - 3^x) > 0 \ \wedge \ (x-1)(x+1)(x-3)x > 0 \qquad (**)$

Y como $2^x > 3^x \ \Leftrightarrow \ x > x \text{Log}_2 3 \ \Leftrightarrow \ x(\text{Log}_2 3 - 1) < 0$

$\Leftrightarrow \quad x < 0$, pues $\text{Log}_2 3 > 1$.

Y la 2da. inecuación de $(**)$ se reduce a: $x + 1 < 0 \ \Leftrightarrow \ x < -1$.

De $(**)$, SOLUCIÓN (a) : $x < 0 \ \wedge \ x < -1 \ \Leftrightarrow \ x \in \langle -\infty, -1 \rangle$

(b): $(2^x - 3^x) < 0 \ \wedge \ (x-1)(x+1)(x-3)x < 0 \qquad .. (***)$

y como $2^x < 3^x \ \Leftrightarrow \ x > 0$ (¿Por qué?) ,

entonces la otra inecuación de $(***)$ se reduce a: $(x-1)(x-3) < 0$

$\Leftrightarrow$ SOLUCIÓN (b) : $x \in \langle 1, 3 \rangle \cap \langle 0, \infty \rangle = \langle 1, 3 \rangle$.

De (a) y (b) tenemos C. S. = (a) ∪ (b) = $\langle -\infty, -1 \rangle \cup \langle 1, 3 \rangle$.

14.44 EJERCICIO .- Resuelva el sistema: $\begin{cases} \sqrt[x]{x+y} = 2 \\ (x+y)3^x = 279.936 \ . \end{cases}$

SOLUCIÓN .- $279{,}936 = 2^7 \times 3^7 = 6^7$. De la 1ra. ecuación se obtiene que

$(x+y) = 2^x$, y al reemplazar en la 2da. :

$$6^7 = (x+y)3^x = 2^x 3^x = 6^x \quad \Rightarrow \quad 7 = x$$

Y de $x + y = 2^x \quad \Rightarrow \quad y = 2^x - x = 2^7 - 7 = 121$.

Por lo tanto, la solución del sistema es el punto: $(x,\ y) = (7,\ 121)$.

14.45 EJERCICIO .- Resuelva: $\text{Log}_{(2x-1)}(4 - x^2) < 1$.

SOLUCIÓN .- Sólo puede ocurrir que la base sea > 0 y $\neq 1$:

a) Si $0 < (2x-1) < 1$: $(4 - x^2) > (2x-1)^1 = 2x - 1 \ (> 0)$

$\Leftrightarrow \quad 1/2 < x < 1 \ \wedge \ (x+1)^2 < 6$

$\Leftrightarrow \quad x \in \langle 1/2,\ 1 \rangle \cap (\langle -1 - \sqrt{6},\ -1 + \sqrt{6} \rangle) = \langle 1/2 \ ,\ 1 \rangle$

b) Si $(2x-1) > 1$: $0 < (4 - x^2) < (2x-1)^1$

$\Leftrightarrow \quad x > 1 \ \wedge \ (x+1)^2 > 6 \ \wedge \ x^2 < 4$

$\Leftrightarrow \quad x \in \langle 1, \infty \rangle \cap \big(\langle -\infty, -1 - \sqrt{6} \rangle \cup \langle -1 + \sqrt{6}, \infty \rangle\big) \cap \langle -2, 2 \rangle$

$\Leftrightarrow \quad x \in \langle \sqrt{6} - 1 \ ,\ 2 \rangle$.

Por lo tanto, C. S. = (a) ∪ (b) = $\langle 1/2, 1 \rangle \cup \langle \sqrt{6} - 1, 2 \rangle$.

14.46 EJERCICIO .- Resuelva: $\text{Log}_{1/7} \left| \text{Log}_4 (x^2 - 5) \right| > 0 \qquad \ldots (*)$

SOLUCIÓN .- Como la base $1/7$ es menor que 1, entonces de $(*)$:

$$0 < \left|\text{Log}_4(x^2-5)\right| < (1/7)^0 = 1 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad (x^2-5) \neq 1 \quad \wedge \quad -1 < \text{Log}_4(x^2-5) < 1$$

$$\Leftrightarrow \quad x^2 \neq 6 \quad \wedge \quad 4^{-1} < (x^2-5) < 4^1 \quad \wedge \quad (x^2-5) > 0$$

$$\Leftrightarrow \quad x \neq \pm\sqrt{6} \quad \wedge \quad 21/4 < x^2 < 9 \quad \wedge \quad x^2 > 5 \ .$$

$$[\ \sqrt{5} \cong 2.24\ ,\ \sqrt{21}/2 \cong 2.29\ ,\ \sqrt{6} \cong 2.45\ ]$$

$\therefore$ C. S. $= \langle -3, -\sqrt{6}\rangle \cup \langle -\sqrt{6}, -\sqrt{21}/2\rangle \cup \langle \sqrt{21}/2, \sqrt{6}\rangle \cup \langle \sqrt{6}, 3\rangle$.

14.47 EJERCICIO .- Resuelva la inecuación logarítmica siguiente:

$$\text{Ln}\,(x+2) > \text{Ln}\,(-x^2+6x+16) - \text{Ln}\,(5-x) \quad \ldots \ (*)$$

SOLUCIÓN .-

a) U: $(x+2) > 0 \quad \wedge \quad (-x^2+6x+16) > 0 \quad \wedge \quad (5-x) > 0$

$\Leftrightarrow \quad x > -2 \quad \wedge \quad (x-8)(x+2) < 0 \quad \wedge \quad x < 5$

$\Leftrightarrow \quad -2 < x \quad \wedge \quad -2 < x < 8 \quad \wedge \quad x < 5$

$\Leftrightarrow \quad U = \langle -2, 5\rangle$

b) En U: $(*) \quad \Leftrightarrow \quad \text{Ln}\,(x+2)(5-x) < \text{Ln}\,(-x^2+6x+16)$

$\Leftrightarrow \quad (x+2)(5-x) < (-x^2+6x+16) \quad \Leftrightarrow \quad \underline{x > -2}$

pues la base del logaritmo natural Ln es $e = 2.718\ldots > 1$

Por lo tanto, C. S. $= (a) \cap (b) = \langle -2, 5\rangle$.

SERIE DE EJERCICIOS

1. Calcule $\text{antilog}_{b^2}\,(\,\text{Log}_{\sqrt[3]{b}}\sqrt[3]{3}\,) \times \text{Log}_{\sqrt{b}}\,(\,\text{antilog}_{b^{-1}}\,3\,)$.

2. Resuelva el sistema: $5^{3x-2y} = 3125 \ , \quad 11^{6x-7y} = 14\,641$.

3. Resuelva: $8 + \text{Log}_3[\,4^{\text{Log}_3 x}\,] = \text{Log}_3[\,36^{\text{Log}_3 x}\,]$.

4. Sabiendo que $\text{Log}_{30}3 = a$, $\text{Log}_{30}5 = b$, calcule $\text{Log}_8 30$.

5. Dado $\text{Log}_a \sqrt[3]{[\,a(\sqrt{2}-1)\,]^5} = \frac{1}{3}$, halle $\text{Log}_a \sqrt[4]{[\,a(\sqrt{2}+1)\,]^3}$.

6. Resuelva: $2\exp_3(x) - \exp_3(-x) + 1 = 0$.

7. Dados $a, b \in \mathbb{R}^+$, $a > b$, resuelva la ecuación

$$(a^4 - 2a^2b^2 + b^4)^{x-1} = (a-b)^{2x}(a+b)^{-2} \ .$$

8. Sean $n > 0$ y $x > 1$. Si $\sqrt[x]{1/n} = x$, calcule el valor de:

$$A = x[\,\text{Log}_x(\tfrac{1}{n})\,]^x + \frac{1}{x}(\text{Log}_x n)^2 \ .$$

9. Halle el menor valor de x que satisface la ecuación:

$$\text{Log}\,(x^{\text{Log}\,x}) + \text{Log}\,x^2 - 4\,\text{Log}_2 4 = 0$$

10. Resuelva: $3\,\text{Log}_a x - (1/\text{Log}_x a) = 8\,\text{Log}_x a$.

11. Resuelva: $(1 + \text{Log}_a x)/(1 + \text{Log}_x a) = 5$.

12. Resuelva: $(\text{Log}_2 x)\,\text{Log}_x\left[\dfrac{\text{Log}_x \sqrt[9]{3}}{\text{Log}_{\sqrt{3}}(x)}\right] = -1$.

13. Resuelva la ecuación : $\sqrt[-x]{0{,}125} = 3^{2\,-\,\text{Log}_3 18}$.

14. Resuelva los siguientes sistemas de ecuaciones simultáneas:

a) $x + y = 65 \ , \quad \text{Log}\,x + \text{Log}\,y = 3$.

b) $x^2 + y^2 = 425 \ , \quad \text{Log}\,x + \text{Log}\,y = 2$.

c) $\text{Log}\,x + \text{Log}\,y = 3 \ , \quad 5x^2 - 3y^2 = 11300$.

15. Resuelva los siguientes sistemas de ecuaciones simultáneas:

a) $x^4 + y^4 = 641 \ , \quad 2\,\text{Log}\,x + 2\,\text{Log}\,y = 2$.

b) $\text{Log}_4 x - \text{Log}_2 y = 0 \ , \quad x^2 - 5y^2 + 4 = 0$.

c) $\text{Log}_y x + \text{Log}_x y = 2 \ , \quad x^2 + y = 12$.

16. Resuelva los siguientes sistemas de ecuaciones simultáneas:

a) $\text{Log}_2(x+y) - \text{Log}_3(x-y) = 1$, $x^2 - y^2 = 2$.

b) $x(y^{\text{Log}_x y}) = y^{5/2}$, $(\text{Log}_4 x)\cdot\text{Log}_x(x-3y) = 1$.

17. Se halla el Logaritmo del número $\underline{e}$ en los sistemas de base b, b^2, b^4, b^8, ..., b^{2^n}, y se suman estos logaritmos. Después se hace tender n al infinito, y el resultado es igual a 5. Halle $\underline{b}$.

18. Resuelva el sistema de ecuaciones simultáneas:

$$\begin{aligned} 2^{3+2x} + 2^{4y} &= 112 \\ 2^{1+2x} + 2^{2+4y} - 4^z &= 32 \\ 2^{3+4y} - 4^{1+z} &= -156 \end{aligned}$$

19. Halle el mayor valor de x que verifique el siguiente sistema:

$$(\text{Log}_3 x) + y = 7 \quad , \quad x^y = 3^{12}$$

20. Resuelva la inecuación: $\text{Log}_{1/3}(x^2 - 4x + 3) \geq -1$

21. Encuentre todos los números reales x para los que la siguiente expresión sea un número real,

$$\sqrt{\text{Log}_{1/2}\left(\frac{2x}{x^2-1}\right)} \quad .$$

22. Halle la función inversa si existe, para

$$f(x) = \begin{cases} 4 - \sqrt{x^2+12x+27} & , \quad x \leq -11 \\ e^{-x/10} & , \quad -11 < x < 0 \\ x^2 + 6x + 6 & , \quad x \geq 0 \end{cases}$$

23. Resuelva la inecuación $\text{Log}_2(9^{x-1} + 7) < 2 + \text{Log}_2(3^{x-1} + 1)$.

24. Resuelva: $(\text{Tan}\frac{\pi}{3})^x - 20(\text{Tan}\frac{\pi}{3})^{-x} \leq 1$.

25. Resuelva: $\text{Log}_{1/9}\text{Log}_x(1-x) < 0$

26. Resuelva: $0.5^{\text{Log}_5\text{Log}_{0.3}(x-0.7)} < 1$.

27. Resuelva las inecuaciones: a) $\text{Log}_{0.7}(6 - x - x^2) > 0$

b) $\text{Log}_{(x-4)}(3-x) < 2$, c) $1 - \text{Log}_x 3 < 1/(1 - \text{Log}_3 x)$

d) $\text{Log}_x[\,|2x-3|/(x+1)\,] > 1$, e) $\text{Log}_{(2-x)}(x-3) \geq -5$

28. Resuelva: $\text{Log}_2[\,(4x-11)/(2x^2-4x-6)\,] \leq -1$.

29. Grafique las regiones del plano definidas por las relaciones siguientes:

a) $\text{Log}_x(\text{Log}_y x) > 0$, b) $\text{Log}_x y^2 > 1$

30. Resuelva: $(\text{Log}_x a) - 1 < \text{Log}_{(x/a)}(a)$, $a > 1$.

31. Resuelva: $\text{Log}_6 \frac{|x^2+4x+3|}{x^2+|x-5|} \geq 0$

32. Resuelva: $\text{Log}_2\text{Log}_{1/2}(x^2 - 3x + 2) \leq 1$

33. Resuelva: $\text{Log}_{x^2}\left(\frac{4x-5}{|x-2|}\right) \geq \frac{1}{2}$

34. Resuelva: $\text{Ln}\sqrt{x^2+3x+2} < \text{Ln}(1 + \sqrt{x^2-x+1})$

35. Resuelva: $\text{Log}_{1.25}[\,\text{Log}_x(1-x)\,] < 0$

36. Resuelva: $(x^{1/\text{Log}\,x})\cdot\text{Log}\,x < 1$

37. Dada la función $f(x) = \text{Log}_2(4-x) + \text{Log}_2(1-x)$,

a) Halle el dominio de f ,
b) Pruebe que f es inyectiva,
c) Halle el rango de f ,
d) Halle la función inversa .

38. Resuelva: $\text{Log}_3(x^2 - 5x + 6) < 0$

39. Resuelva: $\text{Log}_x 2 < 1 + 1/[(\text{Log}_2 x) - 1]$

40. Dada la ecuación $1 + \text{Log}_x(\frac{4-x}{10}) = [(\text{Log Log n}) - 1]\cdot\text{Log}_x 10$, analice en función de $\underline{n}$ el número de raíces reales, y determinelas.

CLAVE DE RESPUESTAS

(1) -54 , (2) $x = 3$, $y = 2$, (3) $x = 81$, (4) $1/(3 - 3a - 3b)$

(5) $27/20$, (6) $x = -\text{Log}_3 2$, (7) $x = \text{Log}_{a+b}(a - b)$,

(8) $x(x^x + 1)$, (9) 0.0001 , (10) C. S. $= \{a^2, 1/a^2\}$,

(11) $\{a^5, 1/a\}$, (12) $\{\sqrt[3]{3}, 1/\sqrt[3]{3}\}$, (14) a) $\{(40, 25), (25, 40)\}$

(13) -3 , (14) b) $\{(20, 5), (5, 20)\}$, (14) c) $\{(50, 20)\}$

(15) a) $\{(5, 2), (2, 5)\}$, b) $\{(1, 1), (4, 2)\}$, c) $(x, y) = (3, 3)$

(16) a) $\{(3/2, 1/2)\}$, b) $\{(16, 4)\}$, (17) $b = e^{2/5}$

(18) $\{(2, 1, 3)\}$, (19) $x = 81$ (20) $[0, 1\rangle \cup \langle 3, 4]$

(21) $[1 - \sqrt{2}, 0\rangle \cup [1 + \sqrt{2}, \infty\rangle$

(22)
$$f^{-1}(x) = \begin{cases} -6 - \sqrt{(x-4)^2 + 9} & , \quad x \le 0 \\ -10 \text{ Ln } x & , \quad 1 < x < e^{11/10} \ (\cong 3) \\ -3 + \sqrt{x+3} & , \quad x \ge 6 \end{cases}$$

(23) $\langle 1, 2\rangle$, (24) $(-\infty, 2\,\text{Log}_3 5]$, (25) $\langle 1/2, 1\rangle$

(26) $\langle 7/10, 1\rangle$, (27) a) $\{-3, \frac{1}{2}(-1 - \sqrt{21})\} \cup \langle \frac{1}{2}(-1 + \sqrt{21}), 2\rangle$

(27) b) $\varnothing$, c) $\langle 1, 3\rangle$, d) $\langle \frac{1}{2}(\sqrt{21} - 3), 1\rangle$, e) $\varnothing$

(28) $[2, 11/4\rangle \cup \langle 4, \infty\rangle$, (29) a) $(0 < y < x < 1) \cup (x > y > 1)$

(29) b) $[(0 < x < 1) \cap (-\sqrt{x} < y < \sqrt{x}) \cap (y \neq 0)] \cup [(x > 1) \cap$
$\cap \{(y > \sqrt{x}) \cup (y < -\sqrt{x})\}]$.

(30) $\langle 0, 1\rangle \cup \langle a, \infty\rangle$

(31) $[2/5, 5\rangle \cup [5, \infty\rangle$, (33) $[\sqrt{6} - 1, 2\rangle \cup \langle 2, 5]$

(32) $\langle \frac{1}{2}(3 - \sqrt{5}), \frac{1}{2}(3 - \sqrt{2})] \cup [\frac{1}{2}(3 + \sqrt{2}), \frac{1}{2}(3 + \sqrt{5})\rangle$

(34) $\langle -\infty, -2\rangle \cup \langle -1, (\sqrt{13} - 1)/6\rangle$, (35) $\langle 0, 1/2\rangle$

(36) Recordando que, para $x > 0$, $x \neq 1$:

$$\frac{1}{\text{Log } x} = \frac{\text{Log } 10}{\text{Log } x} = \text{Log}_x 10$$

se obtiene C. S. $= \langle 0, 10^{1/10}\rangle - \{1\}$.

(37) a) $\langle -\infty, 1\rangle$, b) $\mathbb{R}$,

c) $f^{-1}(x) = \frac{1}{2}(5 - \sqrt{2^{x+2} + 9})$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

(38) $\langle (5 - \sqrt{5})/2, 2\rangle \cup \langle 3, (5 + \sqrt{5})/2\rangle$,

(39) $\langle 0, 1\rangle \cup \langle 2, \infty\rangle$

(40) En el UNIVERSO U: $x \in \langle 0, 1\rangle \cup \langle 1, 4\rangle$ y $n > 1$, la ecuación se reduce a: $x^2 - 4x + \text{Log n} = 0$, cuyas soluciones son,

a) Si $n = 10^3$: $x = 3$, b) Si $n = 10^4$: $x = 2$ (raíz doble)

c) Si $n > 10^4$: no hay raíz real. (d) Si $1 < n < 10^4$, $n \neq 10^3$ entonces hay 2 raíces reales: $x = 2 \pm \sqrt{4 - \text{Log n}}$.

Ω Ω Ω Ω Ω

13

OPERACIONES BINARIAS

1. OPERACIONES BINARIAS

1.1 DEFINICIÓN.- Una OPERACIÓN BINARIA SOBRE UN CONJUNTO A es una regla (más precisamente, es una función), denotada por algún símbolo como "$*$", que asigna a cada par ordenado $(a, b) \in A \times A$ un elemento de A (y solamente uno), al cual se le denota: $a * b$.

$$\begin{aligned} * : \quad A \times A &\longrightarrow A \\ (a, b) &\longmapsto (a * b) \end{aligned}$$

Para describir una operación binaria $*$ sobre algún conjunto dado se caracteriza al elemento asignado $a * b$ mediante una propiedad definida en términos de los elementos componentes a y b de A.

1.2 EJEMPLO.- Sea $A = \mathbb{Z}^+$, definimos la operación binaria $*$ sobre el conjunto A mediante la regla (función):

$$a * b = 2a + b - 1, \quad \textit{para todo} \quad a, b \in A ,$$

entonces

$$\begin{aligned} 1 * 4 &= 2(1) + 4 - 1 = 5 \\ 2 * 5 &= 2(2) + 5 - 1 = 8 \quad \ldots (\alpha) \\ 5 * 2 &= 2(5) + 2 - 1 = 11 \quad \ldots (\alpha') \\ 4 * 2 &= 2(4) + 2 - 1 = 9 \\ 1 * 9 &= 2(1) + 9 - 1 = 10 \\ (1 * 4) * 2 &= (5) * 2 = 11 \quad \ldots (\beta) \\ 1 * (4 * 2) &= 1 * (9) = 10 \quad \ldots (\beta') \end{aligned}$$

De (α) y (α') vemos que $(2 * 5) \neq (5 * 2)$. En este caso, se dice que esta operación binaria ***no es conmutativa sobre*** $A = \mathbb{Z}^+$.

De (β) y (β') vemos que $(1 * 4) * 2 \neq 1 * (4 * 2)$, de modo que esta operación binaria $*$ ***no es asociativa***.

1.3 EJEMPLO.- Dado $A = \mathbb{R}$ (***Números Reales***) y la operación binaria $*$ definida por la suma usual de números reales,

$$a * b = a + b \quad , \quad \forall\, a \text{ y } b \in \mathbb{R} ,$$

la operación $*$ satisface ambas propiedades siguientes:

i) CONMUTATIVA: $a * b = b * a$
pues $a + b = b + a$, en $\mathbb{R}$.

ii) ASOCIATIVA: $(a * b) * c = a * (b * c) \quad , \quad \forall\, a, b, c \in \mathbb{R}$
pues $(a * b) * c = (a + b) * c = (a + b) + c$
$a * (b * c) = a + (b * c) = a + (b + c)$.

1.4 EJEMPLO.- Sea $*$ la operación binaria sobre $A = \mathbb{Z}^+$, definida por:

$a * b =$ ***el menor de*** a y b si $a \neq b$, ***y el valor común si*** $a = b$,

entonces

$$\begin{aligned} 6 * 8 &= 6 \quad , \quad 7 * 2 = 2 \\ 3 * 3 &= 3 \quad , \quad 4 * 4 = 4 \end{aligned}$$

Esta operación binaria es a la vez ***Conmutativa y Asociativa***.

1.5 TABLAS DE DEFINICIÓN

Si el conjunto A consiste de ***una cantidad finita de elementos***, se puede definir una operación binaria $*$ sobre el conjunto A por medio de una tabla. Por ejemplo, la siguiente tabla define una operación binaria $*$ sobre el conjunto $A = \{1, 2, 3\}$ mediante la regla siguiente:

" El elemento $(a * b)$ es el elemento que aparece en la intersección de la fila horizontal ***donde se encuentra la componente*** $\underline{a}$ ***(ver a la izquierda)*** con la columna vertical ***donde se encuentra la componente*** $\underline{b}$ ***(ver la parte superior)*** "

La primera tabla (de la izquierda) indica cómo es que deben distribuirse los elementos $(a * b)$ en general; y la tabla de la derecha representa un ejemplo ***particular***:

COLUMNAS

↑ → *	·	·	b
·			
a			a * b
·			

(FILAS →, →, →)

↑ → *	1	2	3
1	2	3	1
2	1	2	3
3	3	1	2

Así, se tiene: $2 * 3 = 3$ $\quad 1 * 2 = 3$ $\quad 1 * 1 = 2$
$3 * 2 = 1$ $\quad 1 * 3 = 1$ $\quad 2 * 2 = 2$
$3 * 1 = 3$ $\quad 3 * 3 = 2$ $\quad 2 * 1 = 1$

1.6 ADVERTENCIA .- Al definir una operación binaria $*$ sobre un conjunto A, hay que asegurarse de que:

a) Exactamente ***un elemento*** está asignado a cada posible par ordenado (a, b) de componentes a y b que pertenecen al conjunto A.

b) Para cada par (a, b) de elementos en A, el elemento asignado por la operación $*$, y denotado por $(a * b)$ ***debe también ser elemento del conjunto*** A. Esta característica, de toda operación binaria sobre A, es conocida como la **PROPIEDAD DE CLAUSURA**.

1.7 NOTA .- Sea $A = \mathbb{Z}^+$ (enteros positivos). Si en A se "define" la operación binaria $*$ por la regla (o función):

$$a * b = \frac{a}{b} \quad ,$$

se ve que esta regla ***no determina una operación binaria sobre*** $\mathbb{Z}^+$, pues el cociente de dos números enteros positivos no necesariamente es un entero positivo.

2. TIPOS DE OPERACIONES BINARIAS

2.1 OPERACIONES BINARIAS CONMUTATIVAS

Una operación binaria $*$ sobre A recibe el nombre de **CONMUTATIVA** si es que $\boxed{(a * b) = (b * a)}$, ***para todo*** a y b en A.

2.2 EJEMPLOS .- La Suma y la Multiplicación de números Reales $(A = \mathbb{R})$, son ambas operaciones conmutativas, pues

$$a + b = b + a \quad , \qquad a \cdot b = b \cdot a \quad .$$

2.3 EJEMPLO .- Sea $*$ definida por $a * b = 2a - b$, sobre $A = \mathbb{R}$ (Reales). Esta operación binaria ***NO ES CONMUTATIVA***, pues

por ejemplo, $4 * 3 = 2(4) - 3 = 5$,
mientras que $3 * 4 = 2(3) - 4 = 2$ (que es $\neq 5$)

Basta que la propiedad no se cumpla para algún par ordenado de elementos de A, en este caso $\mathbb{R}$, para que la operación binaria no sea Conmutativa.

2.4 EJEMPLO .- Dado un conjunto M, sea $*$ la operación binaria sobre el **CONJUNTO POTENCIA** $P(M) = \{X / X \subset M\}$ definida por la **UNIÓN** de conjuntos $A * B = A \cup B$, entonces

$$(A * B) = A \cup B = B \cup A = (B * A)$$

resultando así que esta operación $*$ es conmutativa.

Asimismo, también resulta que la **INTERSECCIÓN** y la **DIFERENCIA SIMÉTRICA** de conjuntos son operaciones binarias ***conmutativas*** sobre el conjunto potencia.

2.5 NOTA .- Una operación binaria $*$ es **CONMUTATIVA** si y sólo si su tabla que la define resulta ***simétrica con respecto a la DIAGONAL que va de la esquina superior izquierda a la esquina inferior derecha.***

Por ejemplo, esto ocurre con la operación binaria $*$ definida por la tabla

↑ → *	1	2	3
1	3	1	2
2	1	2	3
3	2	3	1

Donde $1 * 3 = 2 = 3 * 1$
$1 * 2 = 1 = 2 * 1$
$2 * 3 = 3 = 3 * 2$,

resultando así que $*$ es conmutativa, como se puede comprobar con la tabla.

2.6 OPERACIONES BINARIAS ASOCIATIVAS

Una operación binaria $*$ sobre A recibe el nombre de **ASOCIATIVA** si es que, para todo $a, b, c \in A$:

$$(a * b) * c = a * (b * c) \quad .$$

Por ejemplo, la Suma y la Multiplicación de Números **REALES** son operaciones binarias ***asociativas*** sobre $\mathbb{R}$, pues

$$(a + b) + c = a + (b + c) \quad , \qquad (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$$

2.7 EJEMPLO .- Dado un conjunto M y su conjunto Potencia $P(M)$, las operaciones de **UNIÓN**, **INTERSECCIÓN** y **DIFERENCIA SIMÉTRICA** de conjuntos son ***asociativas*** :

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C) \quad , \quad (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$$
$$(A \,\Delta\, B) \,\Delta\, C = A \,\Delta\, (B \,\Delta\, C) \quad \ldots \text{ (EMPLEAR DIAGRAMAS DE VENN).}$$

2.8 EJEMPLO .- La operación $*$ definida sobre $\mathbb{R}$ por la regla

$$a * b = a(1 - 3b) + b$$

es una operación asociativa, pues

$$\begin{aligned}(a * b) * c &= (a * b)(1 - 3c) + c \\ &= [a(1 - 3b) + b](1 - 3c) + c \\ &= [b(1 - 3a) + a](1 - 3c) + c \\ &= a + b(1 - 3a)(1 - 3c) - 3ac + c \qquad \ldots \quad (1)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}a * (b * c) &= a[1 - 3(b * c)] + (b * c) \\ &= a + (1 - 3a)(b * c) = a + (1-3a)[b(1-3c)+c] \\ &= a + b(1 - 3a)(1 - 3c) + c - 3ac \qquad \ldots \quad (2)\end{aligned}$$

Comparando (1) y (2), vemos que $(a * b) * c = a * (b * c)$.

2.9 EJEMPLO .- Sea $A = \mathbb{R}^2$, el plano euclidiano, $\forall\ (a,b)$ y $(c,d) \in \mathbb{R}^2$ definimos $*$ por la regla: $(a,b) * (c,d) = (a + c\ ,\ b + d)$.

Esta operación binaria $*$ es conmutativa :

$$\underset{\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim}{(a,b) * (c,d)} = (a + c, b + d) = (c + a\ ,\ d + b) = \underset{\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim}{(c,d) * (b,a)}$$

y además es asociativa, como lo puedes verificar fácilmente.

2.10 DEFINICIÓN .- A la operación binaria sobre A también se le llama **LEY DE COMPOSICIÓN INTERNA SOBRE A .**

2.11 EJERCICIO .- Sea $A \subset \mathbb{R}$, definido como sigue:

$$A = \{\, a + b\sqrt{2} \in \mathbb{R} \ /\ a, b \in \mathbb{Q}\ (\textit{racionales}) \,\}$$

Es decir, el conjunto A está constituido por aquellos números reales que tienen la forma $a + b\sqrt{2}$, con a y b números racionales.

a) Demuestre que la multiplicación usual de números Reales "$\cdot$" es una **LEY DE COMPOSICIÓN INTERNA SOBRE A.**

b) Demuestre que "$\cdot$" es **ASOCIATIVA** y **CONMUTATIVA** sobre **A** .

SOLUCIÓN

a) Para demostrar que la multiplicación usual "$\cdot$" es una LEY DE COMPOSICIÓN INTERNA, debemos demostrar que para cada par de elementos de A ,

$$a + (b\sqrt{2}) \quad \text{y} \quad c + (d\sqrt{2}) \quad , \quad \text{con} \quad a, b, c, d \in \mathbb{Q} \ ,$$

el elemento asignado por la operación "$\cdot$" : $[a + (b\sqrt{2})] \cdot [c + (d\sqrt{2})]$ ***también debe pertenecer al conjunto*** A ; es decir, dicho elemento debe satisfacer la condición de ser de la forma: $a_1 + (b_1\sqrt{2})$ para algún a_1 y b_1 ***racionales***. En efecto,

$$(a + b\sqrt{2}) \cdot (c + d\sqrt{2}) = (ac + 2bd) + (ad + bc)\sqrt{2} = a_1 + b_1\sqrt{2}$$

donde $a_1 = ac + 2bd$, $b_1 = bc + ad$ son ***racionales***, pues a, b, c y d son números racionales por hipótesis.

b) La operación "$\cdot$" es ***asociativa***. En efecto, sean $a + b\sqrt{2}$, $c + d\sqrt{2}$ y $m + n\sqrt{2}$ elementos del conjunto A , con a, b, c, d, m, n ***números racionales***, entonces

$$\begin{aligned}&[(a + b\sqrt{2}) \cdot (c + d\sqrt{2})] \cdot (m + n\sqrt{2}) \\ &= [(ac + 2bd) + (ad + bc)\sqrt{2}] \cdot (m + n\sqrt{2}) \\ &= [(ac + 2bd)m + 2(ad + bc)n] + [(ac + 2bd)n + (ad + bc)m]\sqrt{2} \\ &= [a(cm + 2dn) + 2b(dm + cn)] + [a(cn + dm) + b(2dn + cm)]\sqrt{2} \\ &= [a(cm + 2dn) + 2b(cn + dm)] + [a(cn + dm) + b(cm + 2dn)]\sqrt{2} \\ &= (a + b\sqrt{2}) \cdot [(cm + 2dn) + (cn + dm)\sqrt{2}] \\ &= (a + b\sqrt{2}) \cdot [(c + d\sqrt{2}) \cdot (m + n\sqrt{2})]\end{aligned}$$

Asimismo, esta operación "$\cdot$" también resulta ser conmutativa. (Ejercicio)

3. DISTRIBUTIVIDAD DE UNA OPERACIÓN BINARIA RESPECTO DE OTRA

Dadas dos operaciones binarias $*$ y Δ definidas sobre un mismo conjunto A, veremos las posibles relaciones que se presentan cuando se desea encontrar elementos de las formas siguientes:

$$(a \,\Delta\, b) * c \ , \quad a * (b \,\Delta\, c) \ , \quad (a * b) \,\Delta\, c \ , \quad a \,\Delta\, (b * c) \ .$$

3.1 DEFINICIONES.

(1) Se dice que LA OPERACIÓN $*$ es DISTRIBUTIVA A DERECHA RESPECTO A LA OPERACIÓN Δ , si para todo $a, b, c \in A$:

$$(a \,\Delta\, b) * c = (a * c) \,\Delta\, (b * c)$$

(2) Se dice que LA OPERACIÓN $*$ es DISTRIBUTIVA A IZQUIERDA RESPECTO

A LA OPERACIÓN Δ , si para toco $a, b, c \in A$:

$$a * (b \Delta c) = (a * b) \Delta (a * c)$$

(3) Se dice que LA OPERACIÓN $*$ es DISTRIBUTIVA RESPECTO DE LA OPERACIÓN Δ , si la operación $*$ lo es tanto A DERECHA como A IZQUIERDA RESPECTO a Δ ; es decir, si se cumplen **ambas** igualdades :

$$(a \Delta b) * c = (a * c) \Delta (b * c)$$
$$a * (b \Delta c) = (a * b) \Delta (a * c)$$

3.2 EJEMPLO .- La operación "$\cdot$" de multiplicación usual de números reales es ***distributiva respecto de la suma usual*** "$+$" de números Reales:

$$(a + b)\cdot c = (a\cdot c) + (b\cdot c) \quad , \quad a\cdot(b + c) = (a\cdot b) + (a\cdot c)$$

Sin embargo, la Suma "$+$" no es distributiva a izquierda respecto a la operación "$\cdot$" de Multiplicación en $\mathbb{R}$ ya que

$$a + (b\cdot c) = a + bc \neq (a + b)\cdot(a + c) ,$$

por ejemplo $5 + (4\cdot 2) = 5 + 8 \neq (5 + 4)\cdot(5 + 2)$ [$= 90$]

3.3 EJEMPLO .- Las operaciones de **UNIÓN e INTERSECCIÓN** de Conjuntos son distributivas una respecto de la otra. En efecto,

i) $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$
$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

y ii) $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$
$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

3.4 EJEMPLO .- La operación "$*$" de ***Potenciación*** sobre $\mathbb{N}$ (números naturales) definida por $m * n = m^n$, ***es distributiva a derecha respecto a la multiplicación*** "$\cdot$", pues para $a, b, n \in \mathbb{N}$

$$(a\cdot b) * n = (a\cdot b)^n = a^n \cdot b^n = (a * n)\cdot(b * n)$$

Sin embargo, no lo es a izquierda; en efecto,

$$n * (a\cdot b) = n^{(a\cdot b)} \neq n^a \cdot n^b \quad [= (n * a)\cdot(n * b)]$$

3.5 EJEMPLO .- La operación binaria de **INTERSECCIÓN** de conjuntos es distributiva respecto a la **DIFERENCIA** de conjuntos:

1) $(A - B) \cap C = (A \cap B') \cap C = (A \cap C) \cap B' = [(A \cap C) \cap B'] \cup \varnothing$
$= [(A \cap C) \cap B'] \cup [(A \cap C) \cap C'] = (A \cap C) \cap (B' \cup C')$
$= (A \cap C) \cap [(B \cap C)']$ $= (A \cap C) - (B \cap C)$

2) $A \cap (B - C) = (B - C) \cap A = (B \cap A) - (C \cap A)$ ... de (1)
$= (A \cap B) - (A \cap C)$.

Sin embargo, la DIFERENCIA no es distributiva respecto a la INTERSECCIÓN:

$A - (B \cap C) \neq (A - B) \cap (A - C)$ [Use Diagrama de Venn]

3.6 NOTA .- ***La operación de*** INTERSECCIÓN ***es distributiva respecto a la*** DIFERENCIA SIMÉTRICA de conjuntos; en efecto,

$$(A \Delta B) \cap C = (A \cap C) \Delta (B \cap C)$$
$$A \cap (B \Delta C) = (A \cap B) \Delta (A \cap C)$$

4. LOS ELEMENTOS NOTABLES: NEUTRO E INVERSO

4.1 ELEMENTO NEUTRO. Sea $*$ una operación binaria sobre A. Un elemento $e \in A$ es llamado el **ELEMENTO NEUTRO o ELEMENTO IDENTIDAD** para la operación $*$ si :

para todo elemento $a \in A$: $\begin{cases} a * e = a \\ e * a = a \end{cases}$, *simultáneamente.*

4.2 EJEMPLO. Sea $*$ la operación de SUMA $(+)$ sobre $\mathbb{R}$ (reales), entonces $e = 0$ es el ELEMENTO NEUTRO (o IDENTIDAD), pues ***para cada número real*** a : $a + 0 = a$ y $0 + a = a$.

4.3 EJEMPLO. El elemento $e = 1$ es el elemento ***Neutro o Identidad*** para la multiplicación "$\cdot$" de números **REALES** , pues ***para cada*** $a \in \mathbb{R}$:

$$a\cdot 1 = a \quad y \quad 1\cdot a = a .$$

4.4 EJEMPLO. Sea $A = \{1, 2, 3\}$. Para la operación binaria $*$ sobre A , definida por la tabla:

$*$	1	2	3
1	3	1	2
2	1	2	3
3	2	3	1

el elemento **NEUTRO** es $e = 2$, pues para cada $a \in A$ se cumplen ambas relaciones:

$$a * e = a \quad , \quad e * a = a \quad , \quad \textbf{\textit{a la vez}} ..$$

En efecto, de la tabla vemos que $1 * 2 = 1$, $2 * 1 = 1$

$$2 * 2 = 2 \quad , \qquad 2 * 2 = 2$$
$$3 * 2 = 3 \quad , \qquad 2 * 3 = 3$$

4.5 TEOREMA .- Si una operación binaria $*$ sobre un conjunto A tiene un ***elemento Neutro (o Identidad)*** $\underline{e} \in A$, entonces este elemento e es ***el único elemento Neutro de*** $*$.

PRUEBA

Supongamos que existen dos elementos neutros e y e' de $*$. Entonces ***para todo*** $a \in A$:

$$a * e = a \qquad (\alpha)$$
$$\text{y} \quad e' * a = a \qquad (\beta)$$

En particular, para $a = e'$ en (α) : $e' * e = e' \quad \ldots \quad (1)$

y para $a = e$ en (β) : $e' * e = e \quad \ldots \quad (2)$

De (1) y (2) tenemos que $e = e'$. Por lo tanto, hemos demostrado que el elemento neutro para la operación binaria $*$ es único.

4.6 ELEMENTO INVERSO

Si $*$ es una operación binaria sobre A, y $e \in A$ es su elemento neutro. Para cada elemento $\underline{a} \in A$ se denomina **ELEMENTO INVERSO DE** $\underline{a}$ al elemento de A denotado por a^{-1} que satisface las ***dos relaciones siguientes a la vez*** :

$$a^{-1} * a = e \quad , \quad a * (a^{-1}) = e \qquad \ldots \quad (\Omega)$$

4.7 PROPIEDAD FUNDAMENTAL DEL ELEMENTO INVERSO

Si $\underline{a^{-1}}$ es elemento inverso de $\underline{a}$: $\boxed{(a^{-1})^{-1} = a}$

Es decir, ***el elemento inverso del inverso de*** a ***es el mismo elemento*** a ..

En efecto, puesto que por definición del elemento inverso se cumple que:

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{INVERSO DE } a^{-1}}}{(a) * (a^{-1}) = e} \qquad \text{y} \qquad \underset{\substack{\uparrow \\ \text{INVERSO DE } (a^{-1})}}{(a^{-1}) * (a) = e}$$

y que el **elemento inverso** de (a^{-1}) es el elemento $\underline{a}$: $(a^{-1})^{-1} = \underline{a}$.

Compare el diagrama de arriba con el diagrama (Ω) , que viene a ser el mismo diagrama, debido a que el conectivo lógico " y " satisface la propiedad conmutativa.

4.8 EJEMPLO .- Sea " $+$ " la operación de Suma usual en $\mathbb{R}$, para la cual el número 0 (cero) es el elemento Neutro. Entonces para cualquier $\underline{a} \in \mathbb{R}$ su ***elemento Inverso*** (***aditivo***) es el elemento $(-a)$, debido a que:

$$(-a) + a = 0 \qquad \text{y} \qquad a + (-a) = 0 \ .$$

4.9 EJEMPLO .- Sea " $\cdot$ " la multiplicación usual en $\mathbb{R}$, para la cual el número 1 es el elemento Neutro (Identidad). Entonces para cualquier $a \neq 0$ en $\mathbb{R}$, su ***elemento Inverso*** (***multiplicativo***) es el elemento $a^{-1} = 1/a$, pues

$$(\frac{1}{a}) \cdot a = 1 \qquad \text{y} \qquad a \cdot (\frac{1}{a}) = 1 \ .$$

4.10 EJEMPLO .- En el Ejemplo [4.4] , donde $A = \{1, 2, 3\}$ con la operación $*$ definida por la tabla siguiente,

$\overset{\rightarrow}{\uparrow} *$	1	2	3
1	3	1	2
2	1	2	3
3	2	3	1

Vimos que su elemento Neutro es $e = 2$.
De la tabla tenemos que

$$1 * 3 = 2 = 3 * 1 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} 3^{-1} = 1 \\ 1^{-1} = 3 \end{cases}$$

Es decir, el inverso de 3 es 1, y viceversa, el inverso de 1 es 3 . Análogamente, como vemos que $2 * 2 = 2 = 2 * 2$ entonces $2^{-1} = 2$.

Así, el inverso del elemento 2 para esta operación $*$ es el mismo 2.

4.11 TEOREMA. Sea $*$ una operación binaria sobre el conjunto A , con elemento-Neutro e . Si $*$ es ***ASOCIATIVA*** , y si el elemento b es un inverso de a , entonces b es ***el único elemento de*** A ***que es inverso del elemento*** $a \in A$.

Es decir que si b y b' son inversos de a , entonces $b = b'$.

PRUEBA

Siendo b' y b inversos del elemento $\underline{a}$ por hipótesis, entonces

$$b * (a * b') = b * (e) = b$$
$$(b * a) * b' = (e) * b' = b' \ , \qquad \text{y como } * \text{ es asociativa :}$$
$$\therefore \qquad b * (a * b') = (b * a) * b' \ ; \quad \text{por lo tanto : } \ b = b' .$$

4.12 EJERCICIO .- Dado el conjunto $A = \mathbb{Q} - \{0\}$ (racionales distintos de cero), si se define la operación binaria $*$ sobre A mediante la regla:

$$a * b = 4ab ,$$

a) Halle el elemento Neutro e.
b) Indique cuáles son los elementos de A que tienen elemento inverso y cuáles son dichos inversos.

SOLUCIÓN

$$\text{i)} \quad a * e = a \Rightarrow 4ae = a , \ \forall a \in \mathbb{Q} - \{0\} \Rightarrow e = 1/4$$

$$\text{ii)} \quad a^{-1} * a = e \Rightarrow 4(a^{-1})a = 1/4 \Rightarrow a^{-1} = 1/(16a) = \frac{1}{16a}$$

Por ejemplo, para $a = \frac{1}{8} \in \mathbb{Q} - \{0\} = A$, su elemento inverso es

$$a^{-1} = (\tfrac{1}{8})^{-1} = \frac{1}{16a} = \frac{1}{16(\frac{1}{8})} = \frac{1}{2} \in A$$

4.13 NOTA .- El ejercicio precedente nos ilustra el hecho que, en general, el inverso a^{-1} está expresado en términos de a .

4.14 PROBLEMA .- Dada la operación binaria $*$ sobre $\mathbb{R}$, definida por la regla:

$$a * b = 2 - (ab) \quad \text{para todo } a, b \in \mathbb{R} .$$

¿Cuáles son verdaderas? :

(1) Existe el elemento Neutro, (2) $5 * x = 8 \Rightarrow x < 1$,
(3) La operación $*$ es conmutativa,
(4) Para cada $a \in \mathbb{R} - \{0\}$, existe algún $x \in \mathbb{R}$ tal que $a * x = a$.

SOLUCIÓN

(1) FALSA, pues $a * e = a \Rightarrow 2 - (ae) = a \Rightarrow e = (2 - a)/a$

de lo cual resultaría que el "elemento neutro" ***no sería único*** ya que si $a = 1$ entonces $e = 1$,
si $a = 4$ entonces $e = -1/2$,

pero, por el TEOREMA [4.5], solamente puede haber un (único) elemento Neutro para $*$. Luego, (1) es Falsa.

(2) VERDADERA, pues $8 = 5 * x = 2 - (5x) \Rightarrow x = -6/5 < 1$
(3) VERDADERA, pues $a * b = 2 - (ab) = 2 - (ba) = b * a$.
(4) VERDADERA, pues para cada $a \in \mathbb{R} - \{0\}$:

$$a * x = a \Rightarrow 2 - (ax) = a \Rightarrow x = \frac{2 - a}{a}$$

Luego, existe $x \in \mathbb{R}$ tal que $a * x = a$.

1.15 PROBLEMA. En el conjunto $A = \{1, 2, 3, 4\}$ definimos la operación binaria $*$ tal que **3** es el ***elemento Neutro***, cada elemento es su propio inverso, y los elementos de cada fila y de cada columna son diferentes.

Proporcione los resultados de todas las operaciones individuales mediante una tabla. Y, si $\underline{a}$ es la solución de la ecuación $(x * 3)^{-1} = (2 * 4^{-1})^{-1}$, halle el valor de

$$w = [(\underline{a} * 2)^{-1} * (\underline{a}^{-1} * 3^{-1})]^{-1} .$$

SOLUCIÓN Como $e = 3$ entonces $a * 3 = a = 3 * a$; además, $a^{-1} = a$, también por hipótesis. Luego, completamos la tabla con los otros datos

$*$	1	2	3	4
1	3	4	1	2
2	4	3	2	1
3	1	2	3	4
4	2	1	4	3

¿Por qué? (α)

CALCULO DE x , $\underline{a}$ y w : con ayuda de la tabla (α) ,

$$(x * 3)^{-1} = (2 * 4^{-1})^{-1} = (2 * 4^{-1}) = 2 * 4 = 1$$
(HIPÓTESIS) (HIPÓTESIS) (α)

$$\Rightarrow (x * 3) = (x * 3)^{-1} = 1 \Rightarrow x = 1 .$$
(HIPÓTESIS) (α)

Luego, $\underline{a} = 1$.

Por lo tanto, como $\underline{a}^{-1} = 1^{-1} = 1$, $3^{-1} = 3$ . . . por hipótesis,

entonces $w = [(1 * 2)^{-1} * (1 * 3)]^{-1} = [(4^{-1}) * (1)]^{-1}$
$= [(4) * (1)]^{-1} = [4 * 1] = 2$

NOTA: Recuerde que por hipótesis, cada elemento es su propio inverso.

4.16 PROBLEMA .- Si $*$ es una operación sobre $A = \{0, 1, 2\}$ tal que su elemento Neutro es $e = 2$, el único inverso de 1 es 0 , el único inverso de 0 es 1 , y si para todo $x \in A - \{2\}$: $(x * x) \neq x$, halle el valor de

$$w = [(0 * 1) - (0 * 0)] + [(1 * 1) - (1 * 0)] + (0 * 2) \in \mathbb{R} .$$

SOLUCIÓN .- DATOS: $e = 2$, $1 * 0 = 2$ en forma única ... (α)
$0 * 1 = 2$ en forma única
$a * 2 = a$, $2 * a = a$,

de donde

↑ * \ →	0	1	2
0		2	0
1	2		1
2	0	1	2

$\Rightarrow$

↑ * \ →	0	1	2
0	1	2	0
1	2	0	1
2	0	1	2

La relación $0 * 0 = 2$ no se cumple (en caso contrario, de (α) resultaría que $0 = 1$, lo cual es absurdo). Asimismo, tampoco puede cumplirse que $0 * 0 = 0$, pues por hipótesis: $x * x \neq x$ ***para todo*** $x \in A - \{2\}$.

Luego, concluimos que $0 * 0 = 1$, $1 * 1 = 0$.

De la tabla así construida, tenemos que

$$w = [(0 * 1) - (0 * 0)] + [(1 * 1) - (1 * 0)] + (0 * 2)$$
$$= [\ 2 - 1\ ] + [\ 0 - 2\ ] + 0 = -1 .$$

4.17 PROBLEMA .- Dada la operación binaria $*$ sobre $\mathbb{Q} - \{0\}$, definida por

$$a * b = a + \frac{1}{b} ,$$ halle el elemento neutro e indique aquellos elementos de $\mathbb{Q} - \{0\}$ que tienen inverso.

SOLUCIÓN

Supongamos que $\underline{e}$ es el elemento neutro de $*$, entonces para todo $a \in \mathbb{Q} - \{0\}$ (racionales no nulos) : $a * e = a \quad \Rightarrow$

$\Rightarrow \quad a + \frac{1}{e} = a \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{e} = 0$ ... ***ecuación que no tiene solución para ningún número racional*** $e \in \mathbb{Q} - \{0\}$.

Por lo tanto, $*$ no tiene elemento neutro y por consiguiente, tampoco tendrá elementos inversos. Así, esta operación no es conmutativa ni asociativa (¿?) .

4.18 PROBLEMA .- Si se define la operación binaria $*$ sobre $\mathbb{R}$ por

$$a * b = 3(a + b + 1) + 2ab ,$$

a) ¿La operación $*$ tiene elemento neutro e ?
b) ¿Cuántos de los valores siguientes tienen inverso? :

$$-\frac{2}{3} \quad , \quad 1 \quad , \quad -2 \quad , \quad -\frac{3}{2} \quad , \quad \frac{1}{2} .$$

SOLUCIÓN .- Podemos ver que $*$ es conmutativa.

a) Si existe el elemento neutro e, pues para todo $a \in \mathbb{R}$:

$$a * e = a \quad \Rightarrow \quad 3(a + e + 1) + 2ae = a$$
$$(3 + 2a)e = -(3 + 2a) \quad \Rightarrow \quad \boxed{e = -1}$$

b) Sea a^{-1} el inverso de $a \in \mathbb{R}$, entonces

$$a^{-1} * a = e \quad \Rightarrow \quad 3(a^{-1} + a + 1) + 2a^{-1}a = e = -1$$
$$\Rightarrow \quad a^{-1}(3 + 2a) = -(4 + 3a)$$

de donde $\boxed{a^{-1} = -\frac{(4 + 3a)}{3 + 2a}}$, ***para todo*** $a \neq -3/2$ (α)

Así, el único elemento en $\mathbb{R}$ que no tiene inverso es: $a = -3/2$.

Luego, solamente cuatro de los cinco valores indicados: $-\frac{2}{3}$, 1 , -2 y $\frac{1}{2}$ tienen elemento inverso los cuales, por (α), son : $-\frac{6}{5}$, $-\frac{7}{5}$, -2 y $-\frac{11}{8}$ respectivamente.

4.19 PROBLEMA .- Sea $*$ una operación binaria ***asociativa*** sobre A, con ***elemento neutro*** e. Demostrar que

$$\boxed{(a * b)^{-1} = (b^{-1}) * (a^{-1})} \quad , \quad \ldots \ (\alpha)$$

para cada par de elementos a y b ***que tienen inverso.***
[Note que el orden de los factores se invierte]

PRUEBA .-

DATOS : La operación $*$ es *asociativa* ,

$$a * a^{-1} = e = a^{-1} * a \quad y \quad b * b^{-1} = e = b^{-1} * b$$

Denotemos $c = b^{-1} * a^{-1}$. Si logramos demostrar que se cumplen las dos relaciones:

$$\begin{cases} (a * b) * c = e & \ldots (\beta) \\ c * (a * b) = e \end{cases}$$

ello indicará, por definición, que $\underline{c}$ es el elemento inverso de $(a * b)$, es decir, que

$c = (a * b)^{-1}$ [$\Rightarrow \quad b^{-1} * a^{-1} = (a * b)^{-1}$]

Veamos, i) $(a * b) * c = (a * b) * [b^{-1} * a^{-1}]$
$= a * (b * [b^{-1} * a^{-1}])$ ... * ASOCIATIVA
$= a * ([b * b^{-1}] * a^{-1})$ ... * ASOCIATIVA
(DATO:) $= a * (e * a^{-1}) = a * (a^{-1}) = e$.

ii) $c * (a * b) = e$ ... *(EJERCICIO)*

Por lo tanto, concluimos que: $b^{-1} * a^{-1} = (a * b)^{-1}$.

4.20 PROBLEMA .- Sea $*$ la operación binaria sobre $\mathbb{R}$, definida por :

$$a * b = a + b - 3ab$$

a) Pruebe que $*$ es conmutativa y asociativa.

b) ¿Existe el elemento neutro? . Si es así, ¿Cuál es? .

c) ¿Qué elementos $a \in \mathbb{R}$ tienen inverso respecto a la operación $*$, y qué forma tienen tales inversos?

d) Resuelva la ecuación : $(4 * x^{-1})^{-1} = -3$

e) Resuelva la inecuación : $(3 * x^{-1})^{-1} \leq 1$

f) Resuelva la inecuación : $(2^{-1} * x)^{-1} \geq 1$

SOLUCIÓN .- a) Es evidente que la operación $*$ es conmutativa; además,

i) $$\begin{aligned}(a * b) * c &= (a * b) + c - 3(a * b)c \\ &= (a + b - 3ab) + c - 3(a + b - 3ab)c \\ &= a + b + c - 3(ab + ac + bc) + 9abc\end{aligned}$$

ii) $$\begin{aligned}a * (b * c) &= a + (b * c) - 3a(b * c) \\ &= a + (b + c - 3bc) - 3a(b + c - 3bc) \\ &= a + b + c - 3(ab + ac + bc) + 9abc\end{aligned}$$

$\Rightarrow$ $(a * b) * c = a * (b * c)$. $\therefore$ la operación $*$ es asociativa.

b) Supongamos que existe el elemento neutro $\underline{e}$, entonces ***para todo*** $a \in \mathbb{R}$ se cumple: $a * e = a \Rightarrow a + e - 3ae = a$

$$\Rightarrow (1 - 3a)e = 0 \Rightarrow \boxed{e = 0}$$

c) De $a * a^{-1} = e = 0$, fácilmente se prueba que

$$\boxed{a^{-1} = \frac{a}{3a - 1} \quad , \quad \forall\ a \neq \frac{1}{3}}$$

d) Por el PROBLEMA [4.19] previo, la PROPIEDAD [4.7] y la parte (c):

$$(x^{-1})^{-1} * 4^{-1} = -3 \Rightarrow x * \left(\frac{4}{3(4) - 1}\right) = -3$$

$$\Rightarrow x * \frac{4}{11} = -3 \Rightarrow x + \frac{4}{11} - 3(x)\left(\frac{4}{11}\right) = -3$$

$$\Rightarrow \boxed{x = 37}$$

e) Para $x \neq 1/3$, la inecuación dada se transforma en:

$$(x^{-1})^{-1} * 3^{-1} \leq 1 \Rightarrow x * \left(\frac{3}{3(3) - 1}\right) \leq 1$$

$$\Rightarrow x * \frac{3}{8} \leq 1 \Rightarrow x + \frac{3}{8} - 3(x)\left(\frac{3}{8}\right) \leq 1$$

$$\Rightarrow -x \leq 5 \Rightarrow x \geq -5 \ \wedge \ x \neq \frac{1}{3}$$

$\therefore$ C. S. $= [-5, 1/3\rangle \cup \langle 1/3 , \infty\rangle$

f) $(2^{-1} * x)^{-1} \geq 1 \Leftrightarrow x^{-1} * (2^{-1})^{-1} \geq 1 \Leftrightarrow x^{-1} * 2 \geq 1$

$$\Leftrightarrow x^{-1} + 2 - 3(x^{-1})(2) \geq 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{x}{3x - 1} + 2 - 6\left(\frac{x}{3x - 1}\right) \geq 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{2x + 1}{3x - 1} \leq 0 \Leftrightarrow x \in \text{C. S.} = [-1/2, 1/3\rangle \ . \qquad \blacktriangle$$

En el siguiente problema estudiaremos una operación binaria muy interesante sobre el producto cartesiano $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, y corresponde precisamente a la operación de **MULTIPLICACIÓN DE NÚMEROS COMPLEJOS** después de hacer la identificación de un número complejo: $a + bi$ (a, b reales), con el par ordenado $(a, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, es decir $a + bi \equiv (a, b)$ donde $i = \sqrt{-1}$ es ***la unidad imaginaria*** .

4.21 PROBLEMA .- Sea $A = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, y sea $* : A \times A \longrightarrow A$ la operación binaria definida por la regla:

$$(a, b) * (c, d) = (ac - bd , ad + bc) .$$

a) Calcule: $(2, 3) * (4, 5)$ y $(-3, 1) * (4, -2)$.

b) Demuestre que $*$ es conmutativa y asociativa.

c) Determine, si existe, el elemento neutro $e = (e_1, e_2)$.

d) Determine los elementos de $A = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ que tienen inverso respecto a $*$.

e) Calcule: $(4, 3)^{-1}$ y $(1, -2)^{-1}$, si existen.

SOLUCIÓN .-

a) $$\begin{aligned}(2, 3) * (4, 5) &= (2 \times 4 - 3 \times 5 , 2 \times 5 + 3 \times 4) \\ &= (8 - 15, 10 + 12) = (-7, 22),\end{aligned}$$

$$(-3,1) * (4,-2) = ((-3)(4) - (1)(-2) , (-3)(-2) + (1)(4))$$
$$= (-10, 10) .$$

b) Conmutativa: $(a,b) * (c,d) = (ac - bd, ad + bc) = (c,d) * (a,b)$

Asociativa: $[(a,b) * (c,d)] * (e,f) = (a,b) * [(c,d) * (e,f)]$

$= (ace - bde - adf - bcf, acf - bdf + ade + bce)$ .. EJERCICIO

c) Sea $e = (e_1, e_2)$ el supuesto ***ELEMENTO NEUTRO***, hallaremos las componentes e_1 y e_2 sabiendo que, $\forall (a,b) \in A = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$:

$$(a,b) * (e_1,e_2) = (a,b) \Rightarrow (ae_1 - be_2, ae_2 + be_1) = (a,b)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} ae_1 - be_2 = a \\ be_1 - ae_2 = b, \end{cases} \quad (\text{incógnitas: } e_1 \text{ y } e_2)$$

Y aplicando la **REGLA DE CRÁMER**:

$$e = (e_1, e_2) = (1,0)$$

d) Sea $(a,b) \in A$. Si existe $(c,d) = (a,b)^{-1}$ entonces se cumple que:

$$(a,b) * (c,d) = e = (1,0) , \quad (\text{hallaremos: } \underline{c} \text{ y } \underline{d})$$

$$\Rightarrow (ac - bd, ad + bc) = (1,0) \Rightarrow \begin{cases} ac - bd = 1 \\ bc + ad = 0 \end{cases}$$

Y por la **REGLA DE CRÁMER**:

$$\forall (a,b) \neq (0,0) , \quad (a,b)^{-1} = (c,d) = \left(\frac{a}{a^2+b^2} , \frac{b}{a^2+b^2}\right)$$

e) De (d): $(4, 3)^{-1} = \left(\frac{4}{4^2+3^2} , \frac{-3}{4^2+3^2}\right)$

$$= \left(\frac{4}{25} , \frac{-3}{25}\right)$$

$$(1, -2)^{-1} = \left(\frac{1}{1^2+(-2)^2} , -\frac{(-2)}{1^2+(-2)^2}\right)$$

$$= \left(\frac{1}{5} , \frac{2}{5}\right) .$$

SERIE DE EJERCICIOS

1. Sea $*$ la operación binaria sobre $\mathbb{N}$ (naturales) definida por: $a * b = a$.

   i) ¿Es conmutativa? , ¿es asociativa?
   ii) ¿Existe elemento neutro? , ¿qué elementos de $\mathbb{N}$ tienen inverso?

2. Sea $*$ una operación binaria sobre A con elemento neutro e. Si $*$ es asociativa demuestre que $(a * b)^{-1} = (b^{-1}) * (a^{-1})$, para cada par de elementos a y b que tienen inverso.

3. Sea $*$ una operación binaria definida sobre $\mathbb{R}$ por

   $$a * b = a + b + 2ab$$

   i) ¿Es $*$ conmutativa? , ¿Es asociativa?
   ii) ¿Existe el elemento neutro para $*$? , ¿Cuál es?
   iii) ¿Qué elementos tienen inverso y cuáles son estos inversos?

4. Definimos en $\mathbb{R}$ la operación $*$ por: $a * b = a(1 - 2b) + b$,

   i) ¿Es $*$ asociativa? , ¿Es conmutativa?
   ii) Halle el elemento neutro.
   iii) ¿Cuáles elementos de $\mathbb{R}$ tienen inverso y cuáles son tales inversos con respecto a esta operación binaria $*$?

5. Sobre $\mathbb{Q}^+$ (racionales positivos) se define: $a * b = ab/2$. Demuestre que $*$ es asociativa y conmutativa. Halle el elemento neutro. ¿Qué elementos de $\mathbb{Q}^+$ tienen inverso, y cuáles son estos inversos?

6. Complete la siguiente tabla de forma tal que $*$ resulte una operación binaria conmutativa sobre $A = \{a, b, c, d\}$. Ver la TABLA E – 6 .

$\downarrow * \rightarrow$	a	b	c	d
a	a	b	c	?
b	b	d	?	c
c	c	a	d	b
d	d	?	?	a

TABLA E – 6

$\downarrow * \rightarrow$	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	b	a	c	d
c	c	d	c	d
d	?	?	?	?

TABLA E – 7

7. Si $*$ es una operación binaria asociativa sobre $A = \{a, b, c, d\}$, complete la TABLA E – 7 previa.

8. En el conjunto $A = \{1,2,3,4\}$ se define una operación binaria $*$ vía la TABLA E – 8. ¿Cuáles afirmaciones son verdaderas? :

   I) La operación $*$ no es conmutativa, y el elemento neutro es 2.

   II) $\forall\ x \in A,\ \exists\ y \in A\ /\quad x * y = y * x = 2$

   III) Las ecuaciones: $4 * x = 2$, $z * 3 = 2$ admiten soluciones únicas en A.

9. Dada la operación $*$ sobre $A = \{0,2,4,6,8\}$ definida por la TABLA E – 9,

   a) Halle el elemento neutro.

   b) Halle el valor de x en la ecuación: $2 = [(x^{-1} * 2^{-1}) * (6 * 8)^{-1}]^{-1}$.

TABLA E – 8

$\uparrow * \rightarrow$	1	2	3	4
1	1	1	1	2
2	1	2	3	4
3	3	3	1	3
4	2	4	2	2

TABLA E – 9

$\uparrow * \rightarrow$	0	2	4	6	8
0	4	6	8	0	2
2	6	8	0	2	4
4	8	0	2	4	6
6	0	2	4	6	8
8	2	4	6	8	0

10. En $Q - \{0\}$ se define $a * b = 2ab$. Verifique que $*$ es conmutativa y asociativa, que tiene elemento neutro, y además que todos los elementos de $Q - \{0\}$ son inversibles (es decir, que tienen elemento inverso).

11. En $\mathbb{N}$ (números naturales) se definen las operaciones binarias $*$ y Δ mediante las reglas: $a * b = a$, $a \Delta b = a + b$.
Determine si existe distributividad de $*$ respecto de Δ, y viceversa.

12. Sea $*$ la operación binaria definida sobre $A = Q \times Q$, (pares ordenados de números racionales), mediante : $(c,d) * (x,y) = (cx, cy + d)$.

   a) ¿Es $*$ conmutativa? . b) ¿Es asociativa? .

   c) Halle el elemento neutro para $*$, si es que existe.

   d) ¿Qué elementos de A, si existen, tienen inverso y cuáles son estos inversos?

13. Sean Δ , $\vee$, $\wedge$ tres operaciones binarias sobre un conjunto Potencia, definidas por

$$A \Delta B = (A \cup B) - (A \cap B) \quad \ldots \text{ Diferencia Simétrica}$$
$$A \vee B = A \cup B \quad \ldots \text{ Unión}$$
$$A \wedge B = A \cap B \quad \ldots \text{ Intersección}$$

   a) ¿Es Δ conmutativa? . b) ¿Es Δ asociativa?

   c) Halle el elemento identidad (neutro) para Δ.

   d) Halle el inverso de un 'conjunto' inversible, respecto a Δ.

   e) Pruebe que la operación $\vee$ no es distributiva respecto a Δ.

   f) Pruebe que la operación $\wedge$ sí es distributiva respecto a Δ.

14. Si e es el elemento neutro de una operación binaria $*$ definida sobre un conjunto A, ¿Por qué $e * e = e$?

15. En el conjunto $A = \{0,1,2,3,4\}$ se definen las operaciones binarias $*$ y Δ como sigue:

$$a * b = \text{residuo de dividir } a + 2b \text{ entre } 5.$$
$$a \Delta b = \text{residuo de dividir } 2ab \text{ entre } 5.$$

   a) Halle las dos tablas. b) Resuelva las siguientes operaciones:

   $(4 * 3) \Delta 2$, $(4 \Delta 2) * (3 \Delta 2)$, $1 * (4 \Delta 2)$,

   $[4 * (3 \Delta 2)] \Delta [(2 * 3) \Delta (1 * 4)]$.

   c) ¿Es $*$ conmutativa ? , ¿Es Δ conmutativa?

   d) ¿Tienen $*$ y Δ elemento neutro?

16. Dado el conjunto $A = \{a + b\sqrt{2} \in \mathbb{R} / \ a$ y b son racionales$\}$ y la operación de multiplicación usual "$\cdot$" de números reales

   a) Pruebe que el elemento neutro es $e = 1 + 0\sqrt{2} = 1$.

   b) Pruebe que todo elemento $\alpha \in A$, no nulo (a y/o b no nulos) tiene elemento inverso α^{-1}. Ver el Ejercicio [2.11] resuelto.

17. En $\mathbb{R}$ se define la operación $*$: $a * b = a + b - 7$.
Halle el Conjunto Solución de la ecuación: $3^{-1} * x \leq (4x) * (5 * 2)^{-1}$.

18. Sea $A = \mathbb{R} - \{-1/2\}$ y sea $*$ la operación binaria definida en A por la regla: $a * b = a + b + 2ab$ (ver el EJERC. PROP. [3])

   i) ¿Cuál es el elemento ***neutro*** (o ***identidad***) para $*$?

   ii) ¿Qué elementos a de A tienen elemento inverso respecto a $*$?
   ¿Qué forma tienen estos inversos?

   iii) Resuelva la ecuación: $(\frac{1}{2} * x^{-1}) * 2 = [(-x) * \frac{3}{2}] * 2$

RPTA : i) $e = 0$, ii) $a^{-1} = -a/(2a + 1)$, $\forall\ a \in A$
iii) $x = \pm 1/(2\sqrt{2})$

19. Sea $A = \{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{a,b,c\}\}$, y sea $*$ la operación binaria sobre A definida por: $X * Y = X \cap Y$.

a) ¿Existe el elemento neutro (***o identidad***) para la operación $*$?

b) ¿Qué elementos de A poseen inverso, y qué forma tienen éstos?

c) Resuelva las ecuaciones i) $\{a,b\} * X = \{a\}$
ii) $Y * \{b\} = Y$

RPTA: Esta operación $*$ de *INTERSECCIÓN DE CONJUNTOS*, sabemos que es conmutativa y asociativa.

a) Luego de hacer algunos gráficos con los Diagramas de Venn, vemos que $*$ sí tiene ***elemento neutro*** **E**, y viene a ser el elemento (conjunto) ***más grande*** de A, es decir $E = \{a,b,c\}$, pues al operar (***intersectar***) con cualquier otro elemento X de A, reproduce este último:

$E \cap X = \{a,b,c\} \cap X = X$ pues $X \subset \{a,b,c\}$.

b) Por el mismo razonamiento concluimos que para obtener el elemento ***neutro*** (***identidad***) $\{a,b,c\}$ en A, ***mediante la intersección de algún par de conjuntos*** (elementos) ***de*** A, éstos tienen que ser iguales y además coincidir con (el más grande) $\{a,b,c\}$.

Luego, ***el único elemento*** X ***que tiene inverso*** X^{-1} ***con respecto a*** $*$ ***es el conjunto*** (más grande) $X = \{a,b,c\} \Rightarrow X^{-1} = \{a,b,c\}$

Es fácil verificar que este X satisface: $X \cap X^{-1} = E$.

c) i) Resolver la ecuación $\{a,b\} * X = \{a\} \Leftrightarrow \{a,b\} \cap X = \{a\}$ equivale a encontrar los elementos (conjuntos) de A que ***al ser intersectados con*** $\{a,b\}$ ***den como resultado el conjunto unitario*** $\{a\}$.

Notamos que son (dos): $X = \{a\}$ y $X = \{a,c\}$.

c) ii) Razonando en forma análoga a (i) tenemos que los elementos (conjuntos) de A que resuelven la ecuación:

$Y * \{b\} = Y$ (es decir $Y \cap \{b\} = Y$)

son (dos): $Y = \varnothing$, $Y = \{b\}$. $\therefore$ C. S. $= \{\varnothing, \{b\}\}$.

20. En $\mathbb{R}$ se define: $\boxed{a \quad b} = 3a - 2b$.

Calcule: $\boxed{4 \quad \boxed{1 \quad 3}} \times \boxed{3 \quad \boxed{3 \quad 5}}$

RPTA: $(18)(11) = 198$.

21. En $\mathbb{Q}$ se define la operación $*$ como sigue:

$$\begin{cases} a * (-b) = a + 1 & , \text{ si } 0 \le b \le 5 \\ a * b = b^2 & , \textit{en cualquier otro caso} \end{cases}$$

Calcule: i) $(3 * 8) * (-4)$, ii) $3 * [8 * (-4)]$

RPTA: i) 65 , ii) 81

22. En $\mathbb{Q}$ se define: $\boxed{a \quad b} = a^2 - b^2$.

Calcule: $\boxed{\boxed{1 \quad 1} \quad 4 \qquad \boxed{2 \quad 1}}$

RPTA: $256 - 9 = 247$.

23. En $\mathbb{R}^+$ se define $a * b = \dfrac{a^2 + b^a}{a^b + b}$.

Calcule el valor de $E = (\ldots(((1 * 2) * 3) * 4) * 5) * \ldots) * 100$.

RPTA:

$$1 * 2 = \frac{1^2 + 2^1}{1^2 + 2} = 1 ,$$

$$(1 * 2) * 3 = 1 * 3 = \frac{1^2 + 3^1}{1^3 + 3} = 1 ,$$

$$((1 * 2) * 3) * 4 = (1 * 3) * 4 = 1 * 4 = \frac{1^2 + 4^1}{1^4 + 4} = 1 ,$$

y así sucesivamente hasta el factor 100, obtenemos: $E = 1$.

CLAVE DE RESPUESTAS

1. i) No ; Sí ; ii) No existe elemento neutro. Luego, no tiene sentido hablar de inversos cuando no hay el elemento neutro.

2. $(a * b) * (b^{-1} * a^{-1}) = a * [b * (b^{-1} * a^{-1})] = \ldots$ (asociativa)
$= a * [(b * b^{-1}) * a^{-1}] = a * (e * a^{-1}) = a * a^{-1} = e$.
Análogamente, se prueba que $(b^{-1} * a^{-1}) * (a * b) = e$.
De ambas igualdades y por definición de **ELEMENTO INVERSO**, concluimos que el inverso de $(a * b)$ es $(b^{-1} * a^{-1})$.

3. i) Sí, Sí ; ii) Sí, $e = 0$; iii) $a^{-1} = -a/(2a+1)$, $\forall\, a \neq -\frac{1}{2}$

4. i) Sí, Sí ; ii) $e = 0$; iii) $a^{-1} = \frac{a}{2a-1}$, $\forall\, a \neq \frac{1}{2}$

5. $e = 2$, $a^{-1} = 4/a$, $\forall\, a \in \mathbb{Q}^+$.

6.

$*$	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	b	d	a	c
c	c	a	d	b
d	d	c	b	a

7.

$*$	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	b	a	c	d
c	c	d	c	d
d	d	c	c	d

8. I) FALSA, pues $*$ no es conmutativa, pero su elemento neutro sí es 2 .
II) FALSA, pues para $x = 3$ no existe $y \in A$ tal que $3 * y = 2$
III) FALSA, pues la ecuación $4 * x = 2$ tienen tres soluciones: $x = 1, 3$ y 4 , aún cuando la ecuación $z * 3 = 2$ sí tiene una única solución: $z = 4$.

9. a) $e = 6$, b) $x = 4$. **10)** $e = 1/2$, $a^{-1} = \frac{1}{4a}$, $\forall\, a \in \mathbb{Q} - \{0\}$

11. i1) $(a \,\Delta\, b) * c = a \,\Delta\, b = a + b$,
$(a * c) \,\Delta\, (b * c) = a \,\Delta\, b = a + b$
$\Rightarrow \quad (a \,\Delta\, b) * c = (a * c) \,\Delta\, (b * c)$

i2) $a * (b \,\Delta\, c) = a$
$(a * b) \,\Delta\, (a * c) = a \,\Delta\, a = a + a = 2a$
$\Rightarrow \quad a * (b \,\Delta\, c) \neq (a * b) \,\Delta\, (a * c)$

De (i1) y (i2) resulta que $*$ no es distributiva respecto a Δ .

j1) $(a * b) \,\Delta\, c = a \,\Delta\, c = a + c$
$(a \,\Delta\, c) * (b \,\Delta\, c) = a \,\Delta\, c = a + c$
$\Rightarrow \quad (a * b) \,\Delta\, c = (a \,\Delta\, c) * (b \,\Delta\, c)$

j2) $a \,\Delta\, (b * c) = a \,\Delta\, b = a + b$
$(a \,\Delta\, b) * (a \,\Delta\, c) = a \,\Delta\, b = a + b$
$\Rightarrow \quad a \,\Delta\, (b * c) = (a \,\Delta\, b) * (a \,\Delta\, c)$

De (j1) y (j2) resulta que Δ sí es distributiva respecto a $*$.

12. a) No, b) Sí, c) Sí, el elemento $(1, 0)$.
d) Los elementos (a, b) tienen inverso $(a, b)^{-1} = (\frac{1}{a}, -\frac{b}{a})$, $a \neq 0$.

13. a) Sí, b) Sí, c) $e = \varnothing$, d) $A^{-1} = A$ (el mismo conjunto A)

(b), (e) y (f) con ayuda de los diagramas de Venn :

e) $(A \,\Delta\, B) \cup C \neq (A \cup C) \,\Delta\, (B \cup C)$

f) $\begin{cases} (A \,\Delta\, B) \cap C = (A \cap C) \,\Delta\, (B \cap C) , \\ A \cap (B \,\Delta\, C) = (A \cap B) \,\Delta\, (A \cap C) \end{cases}$

15. a)

$*$	0	1	2	3	4
0	0	2	4	1	3
1	1	3	0	2	4
2	2	4	1	3	0
3	3	0	2	4	1
4	4	1	3	0	2

Δ	0	1	2	3	4
0	0	0	0	0	0
1	0	2	4	1	3
2	0	4	3	2	1
3	0	1	2	3	4
4	0	3	1	4	2

b) 0, 0, 3, 4, respectivamente. (c) No, Sí.

d) $*$ no tiene elemento neutro; Δ sí : $e = 3$.

16. Sea $\alpha = a + (b\sqrt{2}) \in A$, con $a \neq 0$ y/o $b \neq 0$, y sea $\beta = c + (d\sqrt{2})$ tal que $\alpha \cdot \beta = 1 = \beta \cdot \alpha$, entonces

$$(ac + 2bd) + (ad + bc)\sqrt{2} = 1 = 1 + (0\sqrt{2}) \;\Rightarrow\; \begin{cases} ac + 2bd = 1 \\ \\ bc + ad = 0 \end{cases}$$

con incógnitas: c y d . Sean

$$\Delta = \det \begin{bmatrix} a & 2b \\ b & a \end{bmatrix} , \quad \Delta_1 = \det \begin{bmatrix} 1 & 2b \\ 0 & a \end{bmatrix} , \quad \Delta_2 = \det \begin{bmatrix} a & 1 \\ b & 0 \end{bmatrix}$$

entonces $\Delta = a^2 - 2b^2 \neq 0$ (¿Por qué?), $\Delta_1 = a$, $\Delta_2 = -b$.

Luego, por la **REGLA DE CRÁMER** (para resolver sistemas de ecuaciones):

$$c = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{a}{a^2 - 2b^2} \quad , \quad d = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-b}{a^2 - 2b^2}$$

Así, el inverso multiplicativo de α es $\alpha^{-1} = \beta = c + (d\sqrt{2})$ donde c y d tienen la forma que acabamos de encontrar.

17. $e = 7$, $a^{-1} = (14 - a)$, C. S. $= [-1, \infty)$.

Ω Ω Ω Ω Ω

14

ANÁLISIS COMBINATORIO

1. TÉCNICAS DE CONTEO

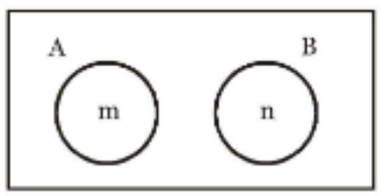
En este capítulo aplicaremos nuestros conceptos básicos de la Teoría de Conjuntos como los de *pertenencia, inclusión, subconjunto, conjuntos disjuntos, conjunto Universal, Unión de conjuntos, Intersección, Complemento de un conjunto, número de elementos, producto cartesiano, etc.*

Con esta base, presentaremos algunas técnicas para determinar, sin enumerar uno por uno, el número de resultados posibles de un experimento así como el número de elementos de un conjunto.

Estas técnicas constituyen el denominado ANÁLISIS COMBINATORIO.

1.1 PRINCIPIO BÁSICO DE CONTEO ADITIVO

" Si un evento A puede ocurrir de m maneras diferentes y otro evento B puede ocurrir de n maneras diferentes entonces el evento " A o B " puede ocurrir de: $m + n$ maneras distintas , siempre que los sucesos A y B no puedan presentarse simultáneamente (es decir, deben ser disjuntos) "



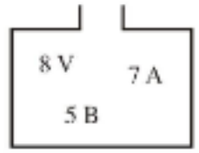
$$N(A \cup B) = N(A) + N(B) = m + n$$

pues $A \cap B = \varnothing$ (vacío).

EJEMPLO 1. Si en una urna hay 20 bolitas de las cuales 5 son de color blanco (B), 7 son azules (A) y 8 son de color verde (V), y se extrae una bolita de la urna. Denotemos los eventos

A : La bolita sale AZUL (A), B : La bolita sale BLANCA (B)
V : La bolita sale VERDE (V),
A o B : La bolita sale AZUL o bien sale BLANCA,
A o V : La bolita sale AZUL o bien sale VERDE.

¿De cuántas maneras diferentes puede ocurrir el evento " A o B " ?



SOLUCIÓN .- Consideraremos que todas las bolitas del mismo color son distinguibles entre sí. Así, tenemos

las 7 azules : $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6, A_7$
las 5 blancas: B_1, B_2, B_3, B_4, B_5
las 8 verdes : $V_1, V_2, V_3, V_4, V_5, V_6, V_7, V_8$

Al extraer UNA BOLITA de la urna, existen 7 posibilidades de que ésta sea azul (A), 5 posibilidades de que sea blanca (B) y 8 posibilidades de que sea verde (V); asimismo hay $7 + 5 = 12$ posibilidades de que la bolita extraída sea de UNO de los dos colores: azul (A) o blanca (B). Luego,

- El evento A puede ocurrir de $m = 7$ maneras distintas.
- El evento B puede ocurrir de $n = 5$ maneras distintas.
- El evento V puede ocurrir de $r = 8$ maneras distintas.

Y puesto que en la extracción de UNA BOLITA, ésta no puede ser AZUL y BLANCA al mismo tiempo, entonces:

- El evento "A o B" puede ocurrir de $m + n = 7 + 5 = 12$ maneras distintas.
- El evento "A o V" puede ocurrir de $m + r = 7 + 8 = 15$ maneras distintas.

1.2 NOTA .- Si los eventos A y B son disjuntos, también se dice que son **MUTUAMENTE EXCLUYENTES**.

1.3 GENERALIZANDO .- Si los eventos A, B y C pueden ocurrir de m, n y p maneras diferentes, respectivamente, entonces el evento "A o B o C" puede ocurrir de "$m + n + p$" maneras diferentes, siempre que tales eventos sean disjuntos dos a dos.

EJEMPLO 2. Se extrae una carta de una baraja de 52 naipes (un "mazo"). Halle el número n de maneras distintas en que la carta extraída pueda ser una espada o un diamante.

SOLUCIÓN .- Puesto que un mazo está compuesto de 4 "palos" y cada palo está compuesto de 13 cartas, y como existen 13 espadas y 13 diamantes, entonces la carta extraída puede ocurrir que sea una espada o un diamante de

$$13 + 13 = 26 \quad \text{maneras distintas.}$$

1.4 PRINCIPIO BÁSICO DE CONTEO (PRINCIPIO DE LA MULTIPLICACIÓN)

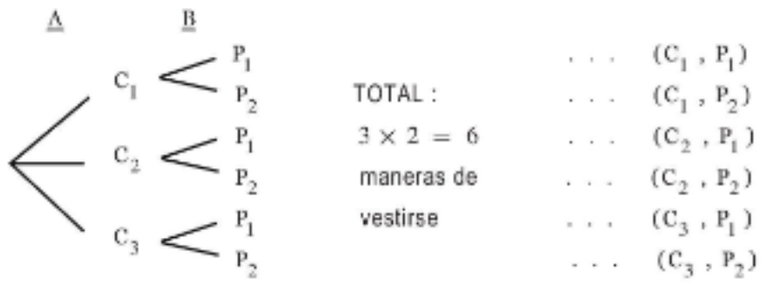
" Si un evento A puede realizarse de m maneras distintas, **y si después de ocurridas, para cada una de éstas** un evento B puede realizarse de n maneras distintas, entonces la acción completa de realizar ambos eventos A y B, en el orden indicado, puede llevarse a cabo de: $m \times n$ maneras distintas ".

EJEMPLO 3. Un joven tiene 3 camisas distintas y 2 pantalones distintos. Si en cada ocasión él se pone una de cada una de las prendas, ¿De cuántas maneras puede vestirse?.

SOLUCIÓN .- Denotemos las camisas: C_1, C_2 y C_3 y los pantalones: P_1 y P_2.

Usaremos un **DIAGRAMA DE ÁRBOL**. Sean los eventos

A : El joven se pone UNA de las 3 camisas
B : El joven se pone UNO de los 2 pantalones



Así vemos que el evento combinado, de dos pasos A y B, en este orden, puede realizarse de: $3 \times 2 = 6$ maneras distintas posibles.

NOTA .- Este principio tiene que ver con el número de elementos (pares ordenados) del producto cartesiano $A \times B$:

$$n(A \times B) = n(A) \cdot n(B)$$

1.5 EXTENSIÓN DEL PRINCIPIO BÁSICO DE CONTEO

" Dada una sucesión de eventos $A_1, A_2, \ldots, A_n$, si el evento A_1 puede de realizarse de m_1 maneras diferentes, y si después de ocurridas, para cada una de éstas el evento A_2 puede realizarse de m_2 maneras diferentes, y si después de ocurridas, para cada una de éstas un tercer evento A_3 puede realizarse de m_3 maneras diferentes, entonces el número total de maneras en que la secuencia completa de eventos $A_1, A_2, \ldots, A_n$, puede llevarse a cabo en el orden establecido es:

$$m_1 \cdot m_2 \cdot m_3 \cdot \ldots \cdot m_n \quad \text{(maneras diferentes)} \text{ "}$$

EJEMPLO 4. En el restaurante "El Tambo" el menú consiste de la elección de una de 3 ensaladas, uno de 4 tipos del plato principal y uno de 2 tipos de refresco. ¿Cuántos tipos de menú están disponibles?

SOLUCIÓN .- Denotando a las ensaladas: E_1, E_2, E_3, a los platos principales: P_1, P_2, P_3, P_4, y a los refrescos: R_1, R_2 ; entonces, por el Principio Básico de Conteo [1.5], el número total de tipos de menú disponibles es:

$$\begin{array}{ccc} E & P & R \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 3 & \cdot\ 4 & \cdot\ 2 \end{array} = 24 \quad \text{tipos diferentes.}$$

1.6 CONVENCIÓN PRÁCTICA

Utilizaremos el Principio Básico de Conteo [1.5] para emplear una notación en base a pequeñas marcas horizontales, tantas como eventos se van a considerar. Así, en el Ejemplo [4] tenemos los TRES EVENTOS:

E : UNA ensalada, P : UN plato principal, R : UN refresco

Entonces escribimos TRES MARCAS HORIZONTALES como sigue,

E P R : _ _ _

Luego, en el orden en que aparecen los eventos, escribimos arriba de la marca horizontal correspondiente a cada evento el número de maneras diferentes en que tal evento puede ocurrir; y finalmente multiplicamos todos estos números :

$$E \quad P \quad R: \quad \underline{3} \cdot \underline{4} \cdot \underline{2} = 24 \text{ tipos.}$$

Este producto representa el número total de maneras diferentes en que los tres eventos E, P, R, pueden ocurrir en el orden establecido.

EJEMPLO 5. En un examen de Matemáticas hay 10 preguntas de elección múltiple con 4 respuestas posibles. ¿De cuántas maneras diferentes podrían ser respondidas las diez preguntas?

SOLUCIÓN .- Para cada pregunta siempre están disponibles 4 maneras distintas de ser respondidas, entonces para las 10 preguntas se tendrán:

$1^a \quad 2^a \quad \ldots \quad 10^a$

$\underline{4} \times \underline{4} \times \ldots \times \underline{4} = 4^{10}$ maneras distintas posibles.

EJEMPLO 6. En un examen de Matemáticas hay 5 preguntas de elección múltiple con 3 respuestas posibles cada una, y 10 preguntas de la forma FALSO – VERDADERO . ¿De cuántas maneras distintas podrían ser respondidas las 15 preguntas?

SOLUCIÓN .- Cada una de las 5 primeras preguntas tiene 3 formas distintas de ser respondida, y cada una de las 10 preguntas restantes tiene 2 formas distintas de ser respondida (F o V) ; por lo tanto, las 15 preguntas podrían ser respondidas de:

1a 2a ... 5a 6a 7a ... 15a

$\underline{3} \times \underline{3} \times \ldots \times \underline{3} \times \underline{2} \times \underline{2} \times \ldots \times \underline{2} = 3^5 \cdot 2^{10} = 248\,832$ formas distintas.

EJEMPLO 7. La primera fila de un cine tiene 8 asientos numerados. ¿De cuántas formas distintas se pueden sentar 5 personas?

SOLUCIÓN .- La primera persona puede elegir cualquiera de los 8 asientos. La segunda persona sólo puede elegir una de los 7 asientos que quedan libres, y asi sucesivamente, entonces tenemos el esquema:

PERSONA: 1a 2a 3a 4a 5a

FORMAS: $\underline{8} \times \underline{7} \times \underline{6} \times \underline{5} \times \underline{4} = 6\,720$ formas distintas.

EJEMPLO 8. ¿De cuántas formas pueden ocupar 7 personas 4 asientos numerados de un cine?

SOLUCIÓN .- ASIENTO: A B C D

$\underline{7} \times \underline{6} \times \underline{5} \times \underline{4} = 840$ formas posibles.

EJEMPLO 9. ¿De cuántas formas podrán colocarse en fila 10 alumnos, si hay 2 que ocupan siempre el mismo puesto, uno el primero y otro el último? .

SOLUCIÓN .- Ya hay 2 lugares ocupados de antemano: el 1ro. y el 10 mo. por los dos alumnos ya determinados. Luego, el problema se reduce a calcular todas las formas posibles en que pueden colocarse en la fila los otros 8 alumnos :

A1 (A2 A3 A4 A5 A6 A7 A8 A9) A10

$1 \cdot \underline{8} \cdot \underline{7} \cdot \underline{6} \cdot \underline{5} \cdot \underline{4} \cdot \underline{3} \cdot \underline{2} \cdot \underline{1} \cdot \underline{1} = 40\,320$ formas.

EJEMPLO 10. Considere un conjunto A que tiene n elementos distintos. ¿Cuántos subconjuntos tiene A ?

SOLUCIÓN .- Si se desea hacer el conteo por extensión, el cálculo se complica cuando n es grande. Entonces lo enfocaremos como sigue. Sea B un subconjunto arbitrario de A . "Cualquier elemento de A puede pertenecer o no al subconjunto B ": **esto implica que** sólo hay 2 posibilidades para cada elemento de A respecto al subconjunto B :

ELEMENTO DE A : $1^\circ \quad 2^\circ \quad 3^\circ \quad \ldots \quad n^\circ$

$\underline{2} \cdot \underline{2} \cdot \underline{2} \cdot \ldots \cdot \underline{2} = 2^n$ formas posibles para construir subconjuntos B de A , incluyendo el CONJUNTO VACÍO, el cual resulta cuando CADA UNO DE LOS ELEMENTOS DE A NO VA A PERTENECER AL SUBCONJUNTO B.

$\therefore$ El conjunto A tiene 2^n subconjuntos distintos, incluyendo $\varnothing$ (VACÍO) .

EJEMPLO 11. Una placa de automóvil consta de 2 letras distintas seguidas de 3 dígitos distintos de los cuales el primero no es cero. ¿Cuántas placas distintas pueden ser grabadas? (No tomar la Ñ)

SOLUCIÓN .- El alfabeto sin la Ñ consta de 26 letras; entonces

LETRAS DÍGITOS

$\underline{26} \cdot \underline{25} \cdot \underline{9} \cdot \underline{9} \cdot \underline{8} = 421\,200$ placas distintas.

EJEMPLO 12. Si en el ejemplo previo los tres dígitos pueden repetirse, sin que el primero sea cero, ¿Cuántas placas distintas pueden ser grabadas?

SOLUCIÓN .-

LETRAS DÍGITOS

$\underline{26} \cdot \underline{25} \cdot \underline{9} \cdot \underline{10} \cdot \underline{10} = 585\,000$ placas distintas.

EJEMPLO 13. Una línea de ferrocarril tiene 25 estaciones. ¿Cuántos tipos de boletos se debe imprimir, si cada boleto lleva impresas las estaciones de origen y de destino?

SOLUCIÓN .- BOLETO : | OR | DE |

$25 \cdot 24 = 600$ tipos distintos.

EJEMPLO 14. ¿Cuántos números de 4 cifras distintas se pueden formar con las 7 primeras cifras significativas (sin el cero) ?

SOLUCIÓN .- NÚMERO : | | | | |

$7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 840$ números distintos.

EJEMPLO 15. ¿Cuántos números pares de tres cifras se pueden formar con los dígitos 3, 4, 5, 7, 8 y 9, sin repetir ninguna?

SOLUCIÓN .- La cifra de las unidades puede ser elegida sólo de 2 maneras (el 4 y el 8). Para las cifras de las decenas y centenas no hay restricciones adicionales a las del enunciado; entonces primero se escriben las posibilidades para la cifra de las unidades:

$5 \cdot 4 \cdot 2 = 40$ números pares posibles.

EJEMPLO 16. ¿Cuántos son los números naturales que se pueden obtener usando las cifras 1, 2, 6, 7 y 8, sin repetir ninguna ?

SOLUCIÓN .- Tales números pueden constar de una, dos, tres, cuatro o de cinco cifras :

	ó			ó				ó					ó					

$5 + 5 \cdot 4 + 5 \cdot 4 \cdot 3 + 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 + 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$

Sumando estos productos obtenemos un total de: 325 números naturales.

EJEMPLO 17. Con respecto al total de números posibles de 3 cifras,
a) ¿Cuántos son? , b) ¿Cuántos son múltiplos de 5 ?

SOLUCIÓN .- Como aquí se permiten las repeticiones tales como 121, 233, 444 y la primera no puede ser cero, entonces

a) | | | | : $9 \cdot 10 \cdot 10 = 900$ números de tres cifras

b) 0 ó 5

| | | | : $9 \cdot 10 \cdot 2 = 180$ múltiplos de 5 .

EJEMPLO 18. Se lanzan DOS dados normales A y B. (a) ¿Cuántos resultados posibles hay? (b) ¿De cuántas maneras se obtiene la suma par? (c) ¿De cuántas maneras los números que aparecen son diferentes? (d) ¿De cuántas maneras la suma es múltiplo de 3 ?

SOLUCIÓN .- TODOS los resultados posibles se presentan en el siguiente cuadro en el que, en cada par ordenado, la primera componente corresponde al valor del dado A y la segunda componente al del dado B:

A \ B	1	2	3	4	5	6
1	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
2	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
3	(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
4	(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
5	(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
6	(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

a) Observando el cuadro, existen: $6 \times 6 = 36$ resultados posibles.

b) Del cuadro, los pares ordenados que tienen ambas componentes pares o ambas componentes impares son: 18 en total cuya suma es PAR.

c) Como hay 6 formas en que ambas componentes son iguales , y ocurren en la diagonal principal, entonces hay: $36 - 6 = 30$ resultados cuyas componentes son diferentes.

d) Como la suma debe ser igual a: 3, 6, 9 ó 12, del cuadro vemos que esto ocurre exactamente de 12 maneras posibles.

EJEMPLO 19. Considerando todos los números posibles de 4 cifras que se pueden formar con los dígitos 1, 2, 3, 4, 5 y 6 .
(a) ¿Cuántos son? (b) Halle la SUMA de todos ellos.

SOLUCIÓN .- a) TOTAL: | | | | |

$6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 = 6^4 = 1296$ números.

(debido a que no se prohibe que las cifras se repitan)

(b) Algunos de tales números pueden ser: 1111, 1112, 1113, 1114, 1115, 1116, 1121, 1122, 1123, 1124, 1125, 1126, 1131, etc. Se puede deducir que EN LAS CIFRAS DE LAS UNIDADES: el dígito 1 aparece en un total de $(6^4) \div 6 = 216$ números, el dígito 2 aparece en 216 números, . . . , y el dígito 6 también aparece en 216 números.

Exactamente lo mismo ocurre EN LAS CIFRAS DE LAS DECENAS, DE LAS CENTENAS Y DE LOS MILLARES. Y como la SUMA de TODAS LAS CIFRAS DE LAS UNIDADES es:

$$216 \cdot (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6) = 4\,536$$

que es la misma para las decenas, centenas y millares, entonces la SUMA de TODOS LOS NÚMEROS DE LA PARTE (a) es:

$$S = 4\,536 \cdot (10^3 + 10^2 + 10 + 1) = 5\,039\,496 \quad \text{¿POR QUÉ?}$$

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Un joven tiene 4 camisas, 2 pantalones y 3 chompas. Si en cada ocasión él se pone una de cada una de las prendas, ¿De cuántas maneras puede vestirse?

2. Se puede bautizar a un niño recién nacido con 1 o con 2 nombres. ¿De cuántas formas diferentes se le puede llamar si se escogen los nombres de conjunto de 30 nombres, y si no se permiten repeticiones?

3. De A a B hay 6 caminos y de B a C hay 4.
   a) ¿De cuántas maneras se puede ir de A a C, pasando por B ?
   b) ¿De cuántas maneras se puede ir de A a C y regresar, siempre pasando por B ? .
   (c) ¿De cuántas maneras se puede ir de A a C y regresar, siempre pasando por B y sin emplear el mismo camino más de una vez ?

4. Si hay 7 aerolineas que vuelan entre las ciudades A y B y 5 empresas de ómnibus que viajan de B a C, ¿De cuántas maneras puede una persona viajar de A a B y después por ómnibus de B a C, y retornar hasta A sin usar la misma compañía dos veces?

5. En una caja hay 10 guantes amarillos (A) y 10 guantes blancos (B). Se procede a extraerlos de uno en uno.
   a) ¿Cuántos guantes deben sacarse como mínimo para estar seguros de conseguir un par del mismo color?
   b) ¿De cuántas maneras se pueden extraer dos guantes?
   c) ¿De cuántas maneras se pueden extraer dos guantes de distinto color?
   d) ¿De cuántas maneras se pueden extraer dos guantes del mismo color?

6. La placa de un automóvil contiene 1 ó 2 letras seguidas de un número de 4 dígitos. Calcule el número máximo de placas diferentes. (Sin la Ñ)

7. ¿De cuántas formas se pueden escoger tres palabras de diferentes números de letras, si son elegidas de los grupos formados por 5 palabras de tres letras, 7 palabras de cuatro letras y 9 palabras de cinco letras?.

8. Anita tiene 5 blusas y 4 faldas. Todas estas prendas de distinto color. ¿De cuántas maneras podrá vestirse, si su blusa celeste y su falda blanca siempre las usa juntas?.

9. Se tiene 6 fichas numeradas del 1 al 6. Si se cogen 2 fichas, ¿en cuántos casos la suma de los números de las fichas no es 4 ni 9 ?

10. Al tirar una moneda al aire 4 veces consecutivas anotando los resultados ordenadamente. ¿Cuántos posibles resultados se pueden obtener?

11. En un lanzamiento de dos dados (A y B). ¿De cuántas maneras la suma resultante puede ser 8, 2, 13 ó 12 ?

12. Considerar todos los enteros positivos con 3 dígitos distintos, que sean mayores que 500. a) ¿Cuántos hay ? , b) ¿Cuántos son impares? , c) ¿Cuántos son pares? , D) ¿Cuántos son divisibles por 5?

13. Una caja contiene 6 bolas rojas, 4 blancas y 8 azules. Se extrae una bola tras otra, reemplazando en la caja la bola extraida por otra igual. ¿De cuántas maneras se pueden extraer 3 bolas que resulten: a) roja, blanca y azul, en ese orden? , b) Las tres rojas? , c) Exactamente dos rojas?

14. a) Con los dígitos del 0 al 9, ¿Cuántos números telefónicos de la serie

    446 _ _ _ _ se pueden formar?

    b) Con los dígitos 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 , ¿Cuántos números pares de cinco dígitos distintos se pueden formar?

    c) ¿Cuántos números impares de 3 cifras se pueden formar con los dígitos 2, 3, 5, 6, 7 y 9 ?

15. En un caso de homicidio, el detective Ketín necesitaba determinar solamente algunos números de teléfono para resolver el caso. Los testigos habian oído el número pero no se ponian de acuerdo en dicho número. El interrogatorio produjo el siguiente resultado. El número de teléfono correcto es par, está formado por $\overline{447}$ y cuatro dígitos más a la derecha, el penúltimo dígito es 2 y el dígito mayor es 4 ; si estos cuatro últimos dígitos además son diferentes, ¿Cuántos números telefónicos nomás tendrá que investigar el detective Ketín, y cuáles son?

16. Un gerente de ventas va a elegir entre 6 almacenes uno de ellos para realizar una inspección con cualquiera de 3 vendedores en uno de los primeros 4 días laborales de la semana siguiente. ¿De cuántas maneras lo puede hacer?

17. En la codificación digital binaria se utiliza sólo el 0 y el 1. ¿Cuántos códigos de 5 dígitos se puede tener?

18. ¿Cuántos números de 3 cifras distintas se pueden formar con los dígitos 1, 2, 3, 5, 7 y 9 , que sean: a) Menores que 700 ? b) Múltiplos de 5 ? c) Impares ?

19. La empresa Datsun tiene para este año 3 modelos de autos y 6 clases de colores. ¿Cuántos autos debe exhibir un distribuidor para mostrar todas las posibilidades?

20. Con los dígitos 5, 7, 8 y 9 , ¿Cuántos números de 3 cifras pueden formarse que sean mayores que 700 y menores que 900 , y que:

    a) Sus cifras puedan repetirse. b) Sus cifras sean distintas entre sí.
    c) Sean pares. d) Sean pares y de cifras todas distintas.

21. En un concurso literario hay asignados 3 premios distintos para los 3 mejores trabajos presentados. Si participan 12 concursantes, ¿De cuántas maneras puede hacerse la distribución de los premios?

22. Si no se permite repetir cifras, ¿Cuántos números pares de 5 cifras puede formarse con los dígitos del 0 al 9 ?

23. Si no se permite repetir cifras, ¿cuántos números pares de 5 cifras distintas de cero pueden formarse?

24. ¿Cuántos números hay entre 5 000 y 6 000 que tengan todas sus cifras distintas?

25. a) ¿Cuántos enteros positivos mayores que 7 500 y de cuatro cifras distintas se pueden formar? , b) ¿Cuántos enteros positivos de la parte (a) son impares?.

26. Con las cifras 3 , 4 , 7 , 2 , a) ¿Cuántos números de 5 cifras pueden formarse?. b) Halle la suma de todos ellos. c) ¿Cuántos de estos números terminan en 7 ? d) Halle la suma de los números de (c). e) ¿Cuántos de los números en (a) comienzan con el 4 y terminan en 2 ?

CLAVE DE RESPUESTAS

1) $4 \cdot 2 \cdot 3 = 24$, **(2)**. $30 + (30 \cdot 29) = 900$

3) a) $A \to B \to C$: $6 \cdot 4 = 24$, c) $6 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 5 = 360$
b) $A \to B \to C \to B \to A$: $6 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 6 = 576$ **(4)** $7 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 6 = 840$

4) a) A o B , $\underline{AA}$ o AB o BA o $\underline{BB}$ (los subrayados son soluciones) ,
$\underline{A}B\underline{A}$ o $A\underline{BB}$ o $B\underline{AA}$ o $\underline{B}A\underline{B}$ (en todas hay un par del mismo color) ;
$\therefore$ Extrayendo de uno en uno TRES guantes como mínimo, siempre se tendrá dos de ellos del mismo color.
b) $\underline{20} \cdot \underline{19} = 380$, c) AB o BA : $10 \cdot 10 + 10 \cdot 10 = 200$,
d) AA o BB : $10 \cdot 9 + 10 \cdot 9 = 180$. **(8)** $(\underline{1} \cdot \underline{1}) + (\underline{4} \cdot \underline{3}) = 13$

6) $(26 \times 10^4) + (26^2 \times 10^3) = 936\,000$, **(7)** $5 \cdot 7 \cdot 9 = 315$ formas.

9) $(\underline{6} \cdot \underline{5}) - n\{(1,3),(3,1)\} - n\{(3,6),(4,5),(5,4),(6,3)\}$
$= 30 - 2 - 4 = 24$ casos

10) En cada lanzamiento puede salir cualquiera de dos: cara (C) o sello (S) ; en los 4 lanzamientos se puede tener: CSCC , CCCC , CCCS , . . . etc.
En general, $\underline{2} \cdot \underline{2} \cdot \underline{2} \cdot \underline{2} = 2^4 = 16$ posibles resultados.

11) (2,6),(3,5),(4,4),(5,3),(6,2);(1,1) ; ninguna ; (6,6): 7 maneras.

12) a) $\underline{5} \cdot \underline{9} \cdot \underline{8} = 360$, b) $(\underline{2} \cdot \underline{8} \cdot \underline{5}) + (\underline{3} \cdot \underline{8} \cdot \underline{4}) = 176$
c) Por diferencia: $360 - 176 = 184$, d) Si el primer dígito es 6 , 7 , 8 ó 9 y el último es 5 ó 0 , y si el primer dígito es 5 y el último 0 :
$(\underline{4} \cdot \underline{8} \cdot \underline{2}) + (\underline{1} \cdot \underline{8} \cdot \underline{1}) = 64 + 8 = 72$ números divisibles por 5 .

13) a) 192 , b) $\underline{6} \cdot \underline{6} \cdot 6 = 216$, c) $3(6^2 \cdot 12) = 1296$

14) a) 10^4 , b) El último dígito puede ser 0 ó distinto de 0 :
$(\underline{6} \cdot \underline{5} \cdot \underline{4} \cdot \underline{3} \cdot \underline{1}) + (\underline{5} \cdot \underline{5} \cdot \underline{4} \cdot \underline{3} \cdot \underline{3}) = 1260$, c) $\underline{6} \cdot \underline{6} \cdot \underline{4} = 144$

15) Para las cuatro últimas cifras, se tienen disponibles los dígitos 0 , 1 , 2 , 3 y 4 . El dígito 2 ya está fijado como penúltimo dígito, entonces quedan: 0 , 1 , 3 y 4 . Como el último dígito es PAR, puede ser 0 ó 4 .
a) Si el último es el 4 , las dos que faltan generan: $\underline{3} \cdot \underline{2} = 6$ números telefónicos posibles: 447AB24
b) Si el último es el 0 , entonces el 4 puede tener las dos ubicaciones siguientes, quedando disponibles el 1 y el 3 :
4474A20 ó 447A420 : $\underline{2} + \underline{2} = 4$ núm. Telef. posibles.
Por lo tanto, el detective Ketin solamente necesita investigar $6 + 4 = 10$ números telefónicos, los cuales son: 447 0124 , 447 0324 , 447 1024 , 447 1324 , 447 3024 , 447 3124 , 447 4120 , 447 4320 , 447 1420 , y 447 3420 .

16) . $\underline{6} \cdot \underline{3} \cdot \underline{4} = 72$, (17). $2^5 = 32$.

18) a) $\underline{4} \cdot \underline{5} \cdot \underline{4} = 80$, b) $\underline{5} \cdot \underline{4} \cdot \underline{1} = 20$, c) $\underline{5} \cdot \underline{4} \cdot \underline{5} = 100$

19) $\underline{3} \cdot 6 = 18$ autos , (20). a) 7ab ó 8cd : $2(\underline{4} \cdot \underline{4}) = 32$

20) b) $(\underline{3} \cdot \underline{2}) + (\underline{3} \cdot \underline{2}) = 12$, c) $\underline{4} \cdot \underline{4} \cdot \underline{1} = 16$, d) $\underline{3} \cdot \underline{2} \cdot \underline{1} = 6$

21) 1^o , 2^o , 3^o : $12 \cdot 11 \cdot 10 = 1320$

22) La primera cifra puede ser IMPAR o PAR (distinto de 0), entonces
$(\underline{5} \cdot \underline{8} \cdot \underline{7} \cdot \underline{6} \cdot 5) + (\underline{4} \cdot \underline{8} \cdot \underline{7} \cdot \underline{6} \cdot \underline{4}) = 13\,776$

23) $(\underline{5} \cdot \underline{7} \cdot \underline{6} \cdot \underline{5} \cdot \underline{4}) + (\underline{4} \cdot \underline{7} \cdot \underline{6} \cdot \underline{5} \cdot \underline{3}) = 6\,720$, **(24)** $\underline{1} \cdot \underline{9} \cdot \underline{8} \cdot \underline{7} = 504$

25) a) El primer dígito puede ser 7 y el segundo 5 , 6 , 8 ó 9 , o el primer dígito puede ser 8 ó 9 : $224 + 1008 = 1232$ enteros positivos.
b) Si comienzan con 7 : 75ab , hay $\underline{1} \cdot \underline{1} \cdot \underline{7} \cdot \underline{3} = 21$ impares
79cd , hay $\underline{1} \cdot \underline{1} \cdot \underline{7} \cdot \underline{3} = 21$ impares
($\overset{*}{a}$ puede ser 6 ú 8) 7abc , hay $\underline{1} \cdot \underline{2} \cdot \underline{7} \cdot \underline{4} = 56$ impares
Si comienzan con 8 : 8abc , hay $\underline{1} \cdot \underline{8} \cdot \underline{7} \cdot \underline{5} = 280$ "
Si comienzan con 9 : 9abc , hay $\underline{1} \cdot \underline{8} \cdot \underline{7} \cdot \underline{4} = 224$ "
SUMA TOTAL : $21 + 21 + 56 + 280 + 224 = 602$ impares.

26) a) Puesto que pueden repetirse y no está el 0 , en cada posición pueden usarse cualquiera de los 4 dígitos: $\underline{4} \cdot \underline{4} \cdot \underline{4} \cdot \underline{4} \cdot \underline{4} = 4^5 = 1024$

b) En las cifras de las unidades, cada uno de los cuatro dígitos dados se encuentra en: $(4^5) / 4 = 4^4 = 256$ números.
Lo mismo ocurre con las cifras de las decenas, de las centenas, etc. La Suma de todas las unidades en los 4^5 números resulta:
$$S_1 = (3 + 4 + 7 + 2)(4^4) = 4096$$

Este mismo valor coincide con la Suma de todas las cifras de las decenas,

$\therefore$ SUMA TOTAL: $S_1 \cdot (10^4 + 10^3 + 10^2 + 10 + 1) = 4\,096 \cdot (11111)$
$= 45\,510\,656$

c) $4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 = 4^4 = 256$

d) SUMA $= (3 + 4 + 7 + 2)(4^3)[10^4 + 10^3 + 10^2 + 10] + 7(4^4)[1]$
$= (1\,024)(11110) + 1\,792 = 11\,378\,432$

e) $4^3 = 64$ números.

2 PERMUTACIONES

2.1 PERMUTACIONES DE N OBJETOS TOMADOS TODOS A LA VEZ

Una **PERMUTACIÓN** de un conjunto de **N** ***objetos distintos***, tomados **TODOS A LA VEZ**, es cualquiera de los ordenamientos diferentes (o arreglos ordenados) que se pueden hacer con todos ellos.

Por ejemplo, tres objetos diferentes: A , B , C , pueden ser ORDENADOS TODOS A LA VEZ de las siguientes maneras:

ABC , ACB ; BAC , BCA ; CAB , CBA

obteniéndose un total de 6 PERMUTACIONES de (todos) los tres objetos.

ORDENAMIENTOS DIFERENTES DE LOS MISMOS OBJETOS SE CUENTAN COMO PERMUTACIONES DIFERENTES

Notamos que los 6 ordenamientos (permutaciones) hallados son diferentes y que no es posible hallar ningún otro ordenamiento de los tres objetos dados.

Sin embargo, en lugar de confeccionar una lista de todos los ordenamientos posibles, con frecuencia sólo nos interesa conocer el **NÚMERO DE PERMUTACIONES** ú ordenamientos. En particular esto tendrá mayor sentido cuando se trate con cantidades grandes de objetos.

Por tal razón trataremos de encontrar algunas fórmulas que nos proporcionen tales números.

Para facilitar estos cálculos, cuando no se pueda visualizar fácilmente un planteamiento de resolución de un problema, muchas veces es útil emplear el **ESQUEMA DEL CASILLERO** , el cual ya ha sido usado indirectamente en la sección anterior y que presentamos oficialmente a continuación.

Para ello tomaremos el caso de los tres objetos anteriores A , B , C ; si queremos hallar el número de **PERMUTACIONES** (ordenamientos) de ellos, tomados **TODOS A LA VEZ** , dibujamos un casillero con 3 casillas que representarán los posibles ordenamientos:

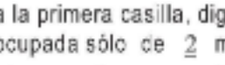
Ahora bien, avanzando de izquierda a derecha en general, la **1ra. CASILLA** , que representa la 1ra. letra , tiene 3 maneras distintas **de ser ocupada**: ya sea por la letra A , por la letra B , o por la letra C.

Una vez ocupada la primera casilla, digamos por la letra C, la **2da. CASILLA** podrá ser ocupada sólo de 2 maneras diferentes posibles: por la letra A o por la letra B ; digamos por la letra A .

Una vez ocupada la segunda casilla, en este caso por la letra A , la **3ra. CASILLA** podrá ser ocupada de 1 única manera: por la letra que queda, en este ejemplo por la letra B.

Entonces, debajo de cada casilla escribiremos el número de maneras distintas en que se puede elegir la letra que ocupará tal posición DESPUÉS DE HABER SIDO OCUPADA LA POSICIÓN ANTERIOR POR UNA DE LAS OPCIONES CORRESPONDIENTES A ELLA

Finalmente multiplicamos todos estos números:



$3 \cdot 2 \cdot 1 = 3! = 6$ maneras distintas

y que, por el PRINCIPIO BÁSICO DE CONTEO [1.5] , representa el número total de ordenamientos, o de "palabras" distintas (permutaciones) que se pueden formar con las 3 letras A , B , C .

En general, n objetos distintos pueden ser ordenados (permutados) todos a la vez, de

$$\underset{\downarrow}{1^\circ}\ \underset{\downarrow}{2^\circ}\ \underset{\downarrow}{3^\circ}\ \cdots\ \underset{\downarrow}{(n-1)^\circ}\ \underset{\downarrow}{n^\circ}$$
$$n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1 = n!$$

maneras distintas.

2.2 **TEOREMA .-** El número de permutaciones de **n** objetos distintos es **n!** .

- Para $n = 3$ objetos distintos hay en total $3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$ permutaciones.

– Para $n = 5$ objetos distintos hay en total $5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$ permutaciones.

2.3 CÁLCULOS CON FACTORIALES

Recordemos que si n es un entero positivo, se define el número denotado por $n!$ como el producto

$$n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ \ldots \ \cdot 2 \cdot 1$$

y se lee " n factorial ". Además, por definición : $1! = 1$, $0! = 1$.

También se tienen los siguientes resultados prácticos:

a) $(n+1)! = n!(n+1)$

b) $(n+2)! = n!(n+1)(n+2)$

c) $\dfrac{(n+3)!}{n!} = (n+1)(n+2)(n+3)$

Por ejemplo, $\dfrac{51!}{49!} = \dfrac{49!50 \cdot 51}{49!} = 50 \cdot 51 = 2\,550$.

ADVERTENCIA .- Tenga presente que $3! \times 2! \neq 6! \quad (6 \times 2 \neq 720)$ y que en general, para m y n enteros no negativos:

$m! + n! \neq (m+n)!$, salvo que $m = n = 1$

$m!n! \neq (mn)!$, salvo que $m = 1 \ \text{ó} \ n = 1$.

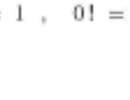
EJEMPLO .- Dados 5 objetos distintos A , B , C , D , E , ¿Cuántos ordenamientos diferentes de los 5 objetos tomados de 2 en 2 existen, sin repetición?

SOLUCIÓN .-

Empleando el Esquema del CASILLERO DE 2 CASILLAS , tenemos que:

La **1ra. CASILLA** puede ser ocupada de 5 maneras distintas, una por cada uno de los 5 objetos.

Y UNA VEZ OCUPADA LA 1ra CASILLA por **UNO** de los 5 objetos, digamos por la letra A , la **2da CASILLA** puede ser ocupada de $\underline{4}$ maneras distintas, a saber, **por cualquiera de los 4 objetos restantes**.



Por el principio Básico de Conteo [1.5] , efectuando el producto: $\underline{5} \cdot \underline{4} = 20$, obtenemos el total de maneras distintas en que las DOS CASILLAS ORDENADAS pueden ser ocupadas por los 5 objetos, un objeto por cada una de las 2 casillas.

Esto significa que existen $\underline{5} \cdot \underline{4} = 20$ ordenamientos diferentes de los 5 objetos dados, ***tomados de 2 en 2***, y estos son:

AB	BA	CA	DA	EA
AC	BC	CB	DB	EB
AD	BD	CD	DC	EC
AE	BE	CE	DE	ED

Así, hemos obtenido el número total de PERMUTACIONES posibles de 5 objetos, tomados de 2 en 2. Este número es: 20 , y se puede representar como sigue:

$$20 = (5)(4) = \frac{5 \cdot 4 \cdot (3!)}{3!} = \frac{5!}{3!} = \frac{5!}{(5-2)!}$$

2.5 PERMUTACIONES DE N OBJETOS DISTINTOS TOMADOS DE R EN R

El número de permutaciones ú ordenamientos de $\underline{n}$ objetos distintos tomados de $\underline{r}$ en $\underline{r}$, denotado por $P(n\,;r)$, es igual a:

$$\boxed{P(n\,;r) = \frac{n!}{(n-r)!}}$$

También se le denota por $_nP_r$, P_r^n , $P_{n,r}$.

Para la prueba, tomemos $\underline{r}$ **CASILLAS** a ser ocupadas **cada una**, en forma secuencial por **uno** de los $\underline{n}$ objetos. Esto se puede hacer de:

$P_r^n = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ \ldots \ \cdot (n-r+2) \cdot (n-r+1)$ maneras.

$$= \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ \ldots \ \cdot (n-r+1) \cdot [(n-r)!]}{(n-r)!} = \frac{n!}{(n-r)!} \ .$$

ADVERTENCIA .- NO ES CIERTO QUE P_r^n SEA IGUAL A : $\dfrac{n!}{r!}$.

EJEMPLO .- ¿De cuántas maneras distintas se puede ordenar un conjunto de 5 personas tomándolas: a) De 2 en 2 ? . b) De 3 en 3 ?

SOLUCIÓN .-

a) $P_2^5 = \frac{5!}{(5-2)!} = \frac{5!}{3!} = \frac{(3!)4\cdot 5}{3!} = 4\cdot 5 = 20$

o también:

$\underline{5} \cdot \underline{4} = 20$ maneras distintas.

b) $P_3^5 = \frac{5!}{(5-3)!} = \frac{5!}{2!} = \frac{(2!)3\cdot 4\cdot 5}{2!} = 3\cdot 4\cdot 5 = 60$ maneras distintas,

o colocándolas en tres casillas, ocupándolas una después de otra:

de $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$ maneras distintas.

PROBLEMAS RESUELTOS

1. En cada viaje un agente vendedor visita 5 de las 8 ciudades que tiene a su cargo. ¿De cuántas maneras puede planificar su ruta?

   RPTA: Como son selecciones ordenadas de 5 ciudades de un total de 8, su ruta la puede planificar de

   $P_5^8 = \frac{8!}{(8-5)!} = \frac{8!}{3!} = 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8 = 6720$ maneras distintas.

2. ¿De cuántas maneras diferentes pueden escoger un lapicero 6 estudiantes, de una muestra de 10 tipos diferentes de lapiceros?

   RPTA: Siendo selecciones ordenadas de 6 tipos distintos de lapiceros, de un total de 10 tipos, los pueden escoger de:

   $P_6^{10} = \frac{10!}{(10-6)!} = \frac{10!}{4!} = 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8\cdot 9\cdot 10 = 151\,200$ maneras.

3. Una compañía tiene 12 postulantes para 4 vacantes de Producción.
   a) ¿De cuántas maneras se pueden llenar estas vacantes?
   b) ¿De cuántas maneras se pueden llenar las vacantes si 3 de los postulantes son descartados por diferentes motivos?
   c) ¿De cuántas maneras se pueden llenar las vacantes si hay 5 postulantes para UNA de las vacantes y 7 postulantes para las otras TRES?

   RPTA: a) $P_4^{12} = 12!/8! = 9\cdot 10\cdot 11\cdot 12 = 11800$ maneras

   b) $P_4^9 = 9!/5! = 6\cdot 7\cdot 8\cdot 9 = 3024$ maneras

   c) $(P_1^5)\cdot(P_3^7) = (5!/4!)\cdot(7!/4!) = 5\cdot(5\cdot 6\cdot 7) = 1050$ man.

4. Cuatro matrimonios han comprado 8 asientos contiguos para el Teatro.

   a) ¿De cuántas maneras se pueden sentar? b) ¿De cuántas maneras se pueden sentar si los varones no se sientan juntos ni las mujeres se sientan juntas?.

   c) ¿De cuántas maneras se pueden sentar si todos los varones se sientan juntos y todas las mujeres se sientan juntas?

   d) ¿De cuántas maneras se pueden sentar si cada esposo se tiene que sentar a la izquierda de su respectiva esposa?

   RPTA:

   a) $8! = 40\,320$

   b) Es decir, intercalados (V M V M V M V M) ó (M V M V M V M V): $(4\cdot 4\cdot 3\cdot 3\cdot 2\cdot 2\cdot 1\cdot 1) + (4\cdot 4\cdot 3\cdot 3\cdot 2\cdot 2\cdot 1\cdot 1) = 2(4!4!)$ $= 1152$ maneras diferentes.

   c) (VVVVMMMM) ó (MMMMVVVV) : $4!4! + 4!4! = 1152$ man.

   d) $(\underline{4}\cdot\underline{1})(\underline{3}\cdot\underline{1})(\underline{2}\cdot\underline{1})(\underline{1}\cdot\underline{1}) = 4! = 24$ maneras distintas.

5. Halle el número de maneras de colocar en un estante 6 libros grandes, 4 medianos y 2 pequeños, de modo que los libros de igual tamaño se encuentren juntos?

   RPTA: Primero ordenamos los 3 tipos de tamaño, y luego ordenamos los libros correspondientes a cada tipo de tamaño, y obtenemos:

   $3!(6!4!2!) = 207\,360$ maneras.

6. Se va a tomar una fotografía a un grupo de 6 personas colocadas en línea. ¿De cuántas formas se puede hacer si 2 de ellas no se llevan y rehúsan posar una al lado de la otra?

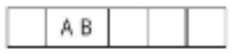
   RPTA: a) Calcularemos primero la cantidad de formas en que las dos personas (A y B) están una al lado de la otra. Considerémoslos como una sola " persona " X = AB. Entonces, hay que permutar a 5 "personas", y luego dentro de X a A y B: $5!2! = 240$ formas distintas.

   b) Por Complementación, el número de formas en que A y B no posarán juntas es: $6! - 5!2! = 480$ formas distintas.

7. En una sesión de conferencias van a hablar 6 oradores A, B, C, D, E, F.
   a) ¿ De cuántas formas se pueden ordenar los oradores si B no debe preceder a A ?
   b) ¿De cuántas formas si B habla inmediatamente después de A ?

   RPTA: a) A precede a B el mismo número de ordenamientos en que B precede a A: $(6!)/2 = 360$ formas posibles.

   b)



   Haciendo X = AB, equivale a permutar 5 "personas" de: $5! = 120$ formas en total.

8. Sea A el número de formas de ordenar r objetos de un total de "r + p" objetos distintos y B el número de formas de ordenar "p + r" objetos distintos de modo que "p" de ellos estén todos juntos. Halle A · B .

   RPTA: $A = P_r^{r+p} = (r+p)!/(r+p-r)! = (r+p)!/p!$.

   Para el cálculo de B consideramos a los "p" objetos juntos como uno solo, y como habían r adicionales, se considera como si hubieran "r + 1" objetos; de esta manera: $B = (r+1)!\,p!$

   Por lo tanto, $A \cdot B = (r+p)!\,(r+1)!$

9. Hay 12 sillas en fila. ¿De cuántas maneras se pueden sentar 5 alumnos en sillas consecutivas?

   RPTA: El bloque de 5 alumnos en las 5 sillas consecutivas puede ser ubicado en $\overline{1} + 7 = 8$ posiciones, y por cada una de ellas los 5 alumnos pueden ocupar dicho bloque de 5! maneras. Por lo tanto, la respuesta al problema es: $8(5!) = 960$ maneras diferentes.

10. En el Problema [9] previo, ¿De cuántas maneras pueden sentarse los 5 alumnos en una fila para un examen si debe hacer exactamente una silla vacía entre cada 2 de ellos?

    RPTA: El bloque de 9 sillas con 5 alumnos intercalados puede ser elegido de $\overline{1} + 3 = 4$ maneras; y por cada una de ellas los 5 alumnos pueden ordenarse de: 5! maneras. Por lo tanto, la respuesta buscada es que hay:

    $4 \cdot (5!) = 480$ maneras diferentes.

11. Con los dígitos $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$, ¿Cuántos números de 7 cifras distintas se pueden formar si el 1 y el 2 deben estar juntos mientras que el 6 y el 7 deben estar separados?

    RPTA: Por complementación, a la cantidad de números de 7 cifras que tienen el 1 y el 2 juntos le restamos aquellos en los que el 6 y el 7 están juntos: $6!\,2! - 5!\,2!\,2! = 960$ números.

12. ¿De cuántas maneras se puede establecer un rol de exámenes para 6 asignaturas en un periodo de 2 semanas, si 2 de las asignaturas deberán tomarse en Lunes, uno de los Viernes es feriado y se debe tomar a lo más un examen por día?

    RPTA: Uno de los Lunes se puede tomar para cualquiera de los 6 cursos, y el otro Lunes para cualquiera de los 5 cursos restantes. Si un Viernes está descartado, los 4 cursos restantes pueden ser evaluados en los 7 días aún disponibles de P_4^7 maneras.

Por lo tanto, el rol de exámenes se puede hacer de:

$$6 \cdot 5 \cdot P_4^7 = 30 \cdot \frac{7!}{3!} = 25\,200 \text{ maneras.}$$

2.6 (EXPERIMENTOS CON DEVOLUCIÓN o SUSTITUCIÓN)

De una urna con n bolas numeradas de 1 a n , ¿de cuántas maneras diferentes se pueden escoger r bolas extrayéndolas una por una (este hecho implica un ordenamiento) y regresándolas cada vez a la urna?

SOLUCIÓN .- Considerando cada casilla como una extracción:

$$\underset{1^a}{\square} \cdot \underset{2^a}{\square} \cdot \ldots \cdot \underset{r^a}{\square}$$

$$n \times n \times \ldots \times n = \boxed{n^r} \text{ maneras ordenadas diferentes}$$

pues **en cada extracción**, al devolverla se vuelven a tener las mismas n posibilidades para la siguiente extracción.

2.7 (EXPERIMENTOS SIN DEVOLUCIÓN)

De una urna con n bolas numeradas de 1 a n . ¿De cuántas maneras se pueden escoger r bolas extrayéndolas una por una (esto implica un ordenamiento) y no regresándolas a la urna?

SOLUCIÓN.- Ya sabemos que el resultado es $\boxed{P_r^n = \frac{n!}{(n-r)!}}$

EJEMPLO 1. ¿De cuántas maneras diferentes se pueden elegir 5 cartas *sucesivas* de una baraja de 52 naipes:

a) Con devolución? . b) Sin devolución?

RPTA: a) $\underset{1a}{\underline{52}} \cdot \underset{2a}{\underline{52}} \cdot \underset{3a}{\underline{52}} \cdot \underset{4a}{\underline{52}} \cdot \underset{5a}{\underline{52}} = 52^5$ maneras distintas.

b) $\underset{1a}{\underline{52}} \cdot \underset{2a}{\underline{51}} \cdot \underset{3a}{\underline{50}} \cdot \underset{4a}{\underline{49}} \cdot \underset{5a}{\underline{48}} = \frac{52!}{47!} = P_5^{52}$

EJEMPLO 2. En una baraja de 52 naipes, ¿de cuántas M maneras se pueden elegir 3 cartas , sin interesar el orden en que aparecen?

RPTA: Obtengamos primero los resultados ordenados:

$$\underline{52} \cdot \underline{51} \cdot \underline{50} = 52!/49! = P_3^{52}$$

que viene a ser el número de muestras de 3 cartas ordenadas seleccionadas de la baraja de 52 naipes; y para una muestra (ordenada) como

1ra.	2da.	3ra.
2 de espadas	10 de flores	7 de corazones

y como el orden NO INTERESA, a sus correspondientes $3! = 6$ permutaciones se les considera la misma elección y por lo tanto repetidas. Esto indica que en P_3^{52} cada resultado se está repitiendo $3!$ veces. Así el número pedido es

$$M = \frac{P_3^{52}}{3!} = \frac{52!}{(52-3)!} \cdot \frac{1}{3!} = \frac{52!}{3!\,49!} = \boxed{\binom{52}{3}}$$

$$M = \frac{52 \cdot 51 \cdot 50}{6} = 22\,100 \quad \text{maneras.}$$

2.8 PERMUTACIONES CIRCULARES

Dados n objetos diferentes dispuestos alrededor de un círculo (mesa redonda), se considera la siguiente definición:

" Dos Permutaciones Circulares de tales n objetos son **IGUALES** cuando tomando **EL SENTIDO DE LAS AGUJAS DEL RELOJ**, al ubicar un mismo objeto en ambas permutaciones, donde sea que se encuentre, es **SEGUIDO (o** PRECEDIDO) **POR EL MISMO OBJETO** en las dos permutaciones para cada uno de los n objetos "

Podemos comprobar visualmente que esta definición se cumple para el objeto A en los siguientes 5 arreglos circulares de los 5 objetos: A, B, C, D, E. Y también se cumple lo mismo para B, para C, para D y para E:

Así tenemos que estos 5 arreglos circulares de A, B, C, D y E son **IGUALES**.

Equivalentemente,

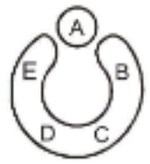
" Dos Permutaciones Circulares son **DIFERENTES** si, tomando **EL SENTIDO DE LAS AGUJAS DEL RELOJ**, existe al menos uno de los n objetos tal que al ser ubicado en ambas permutaciones, es **SEGUIDO** (o PRECEDIDO) por un objeto distinto en cada una de ellas ".

Presentamos esta situación mediante un bosquejo:

Entonces, para obtener el número total de arreglos circulares (o **PERMUTACIONES CIRCULARES**) primero se fija la posición de UNO CUALQUIERA de los n objetos y luego se calcula el número de permutaciones de los $(n-1)$ objetos restantes COMO SI ESTOS ESTUVIERAN EN UNA RECTA. Por lo tanto,

> El número de permutaciones diferentes de n objetos distintos alrededor de un CÍRCULO es:
> $$(n-1)!$$

Dados los 5 objetos A, B, C, D y E alrededor de un círculo se fija alguno de ellos, digamos A, y se permutan los 4 restantes.

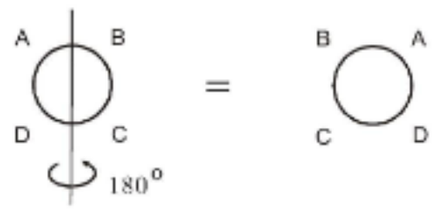


EJEMPLO . El número de arreglos (permutaciones) diferentes en los que 5 personas pueden sentarse alrededor de una mesa circular es $4! = 24$.

2.8.1 PERMUTACIONES EN LLAVEROS CIRCULARES

Otra situación frecuente se presenta cuando se trata de ordenar una cierta cantidad de llaves en un llavero circular, o las cuentas de un collar. Entonces se conviene en que: "Dos arreglos son los mismos si uno de ellos se obtiene del otro al girar el llavero alrededor de algún diámetro, en 180^o ."

Así, podemos ver que cada permutación circular se repite DOS VECES. Por lo tanto, para $n \geq 3$, se cumple que:



El número de permutaciones diferentes de n llaves en un llavero, o de n cuentas en un collar es:

$$\frac{(n-1)!}{2} \qquad (*)$$

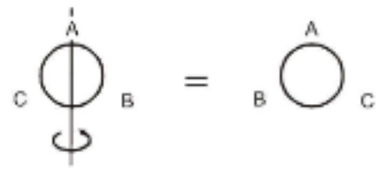
EJEMPLO 1. ¿De cuántas maneras distintas se pueden ordenar 4 llaves en un llavero circular?

RPTA: Aquí $n = 4$; entonces hay

$$\frac{(n-1)!}{2} = \frac{3!}{2} = \frac{6}{2} = 3 \quad \text{maneras distintas.}$$

EJEMPLO 2 Tres llaves pueden ser ordenados en un llavero circular de 1 única manera posible; en efecto, siendo $n = 3$ en $(*)$:

$$\frac{(n-1)!}{2} = \frac{2!}{2} = 1$$



PROBLEMAS RESUELTOS

1. a) Halle el número de maneras distintas en que 6 personas pueden sentarse alrededor de una mesa circular.
   b) ¿Cuántas maneras hay si 2 de las 6 personas insisten en sentarse una al lado de la otra?

   RPTA: a) Hay $5! = 120$ maneras distintas.

   b) Sean A y B tales personas, considerémoslas como una sola $X = (AB)$, entonces permutando 5 "personas" y luego permutando A y B en X obtenemos:

   $$4!\,2! = 48 \quad \text{maneras distintas.}$$

2. ¿De cuántas maneras se pueden sentar 5 trujillanos, 4 chiclayanos, 6 cusqueños y 3 arequipeños, de modo que todos los provenientes de un mismo lugar se sienten juntos: a) En una fila? b) Alrededor de una mesa circular?

   RPTA: a) Ordenando primero los 4 lugares de procedencia y luego las personas correspondientes a cada lugar se obtienen:

   $$4!\,(5!\,4!\,6!\,3!) = 298\,598\,400 \quad \text{maneras distintas.}$$

   b) Ordenando primero los 4 lugares de procedencia alrededor de la mesa y luego a las personas correspondientes a cada lugar se obtienen:

$$3!\,(5!\,4!\,6!\,3!) = 74\,649\,600 \quad \text{maneras distintas.}$$

3. ¿Cuántos collares diferentes se pueden fabricar enlazando 10 cuentas de distintos colores?

   RPTA: (Modelo del Llavero Circular) Para $n = 10$, se pueden fabricar
   $(n-1)!/2 = 9!/2 = 181\,440$ collares diferentes.

4. Cuatro caballeros y cuatro damas se sientas alrededor de una mesa circular. Si los caballeros y las damas se alternan, ¿cuántos ordenamientos diferentes se pueden hacer?

   RPTA: Fijamos UN caballero en la mesa, entonces los 4 caballeros se sientan de $3!$ maneras alrededor de la mesa, y las damas (como si estuvieran en una recta) de $4!$ maneras diferentes; así, todo el conjunto se puede sentar de: $3!\,4! = 144$ maneras diferentes.

5. Si cuatro matrimonios se sientan alrededor de una mesa circular de modo que cada esposo se sienta junto a su esposa, ¿De cuántas maneras se pueden ordenar?

   RPTA: Equivale a ordenar alrededor de una mesa circular a 4 bloques (compuestos de un esposo y su esposa, la cual puede estar a su derecha o bien a su izquierda) y luego dentro de cada bloque a ambos esposos, de

   $$3!\,2! = 12 \quad \text{maneras distintas.}$$

2.9 PERMUTACIONES CON REPETICIÓN. PERMUTACIONES DISTINGUIBLES.

Llamaremos así a las diferentes formas en que se pueden ordenar un conjunto de n elementos de los cuales exactamente n_1 son de un tipo, n_2 son de un segundo tipo, . . . , y n_k son de un k – ésimo tipo distinto a todos los anteriores.

EJEMPLO 1. Queremos hallar todos los ordenamientos DISTINGUIBLES de todas las letras de la palabra **O Z O N O**:

Supongamos que las 3 O's son distintas y denotémoslas O_1, O_2 y O_3, entonces reunidas con las letras **Z** y **N** obtenemos inicialmente las $5!$ permutaciones de las 5 letras O_1, O_2, O_3, Z y N.
Cada una de estas $5! = 120$ permutaciones presenta la siguiente característica común: tomemos cualquiera de ellas, digamos la permutación $O_1\ Z\ O_2\ N\ O_3$

en la cual fijaremos en sus posiciones a las letras **Z** y **N** y luego permutaremos las tres O's restantes; así obtenemos los $3! = 6$ ordenamientos siguientes:

$$O_1\,Z\,O_2\,N\,O_3 \quad , \quad O_2\,Z\,O_1\,N\,O_3 \quad , \quad O_3\,Z\,O_1\,N\,O_2$$
$$O_1\,Z\,O_3\,N\,O_2 \quad , \quad O_2\,Z\,O_3\,N\,O_1 \quad , \quad O_3\,Z\,O_2\,N\,O_1$$

que son todas las que se pueden obtener manteniendo **Z** y **N** fijas.

Note que si eliminamos los subíndices, todas estas $3!$ permutaciones coinciden con la **PERMUTACIÓN DISTINGUIBLE O Z O N O** , razón por la cual son denominadas permutaciones **INDISTINGUIBLES.**

Sin embargo, la permutación **O Z O N O** es Distinguible de la permutación **O N O Z O** , para la cual también se presenta la misma situación anterior.

Por lo tanto, en las $5! = 120$ permutaciones iniciales de las 5 letras de la palabra **O Z O N O** , cada una de ellas se repite $3! = 6$ veces debido a las 3 letras "O" que aparecen.

Así resulta que el número total de Permutaciones DISTINGUIBLES de todas las letras de la palabra **O Z O N O** está dado por el cociente:

$$\frac{5!}{3!} = \frac{120}{6} = 4 \times 5 = 20 \ .$$

EJEMPLO 2. Con el mismo razonamiento anterior, si se tienen 8 discos del mismo tamaño de los cuales 5 son negros y 3 son rojos, entonces el número de maneras diferentes en cue se pueden colocar en una fila de modo que se obtengan diferentes arreglos de colores es:

$$\frac{8!}{5!\,3!} = \frac{6 \cdot 7 \cdot 8}{6} = 56 \qquad \text{maneras DISTINGUIBLES}$$

En general, se cumple el siguiente resultado acerca de las Permutaciones Distinguibles.

2.9.1 TEOREMA DE PERMUTACIONES DISTINGUIBLES

El número de permutaciones Distinguibles de un conjunto de n objetos, tomados todos a la vez, de los cuales exactamente n_1 son de un mismo tipo, exactamente n_2 son de un segundo tipo, . . . , y exactamente n_k son de un tipo k – ésimo distinto a los anteriores, y tales que $n_1 + n_2 + \ldots + n_k = n$, es

$$\frac{n!}{n_1!\,n_2!\,\ldots\,n_k!}$$

NOTA .- Algunos de los enteros n_1 puede ser igual a 1 .

EJEMPLO 3. ¿Cuántos números distintos se pueden escribir con todos los dígitos del número 11112225 ?

RPTA: Identificando: $n = 8$; $n_1 = 4$, $n_2 = 3$, $n_3 = 1$, entonces se puede escribir:

$$\frac{n!}{n_1!\,n_2!\,n_3!} = \frac{8!}{4!\,3!\,1!} = \frac{5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}{6} = 280 \text{ números distintos.}$$

PROBLEMAS RESUELTOS

1. ¿De cuántas maneras se pueden ordenar en una fila: 4 monedas de 1 nuevo sol, 3 monedas de 2 nuevos soles y 5 monedas de 50 céntimos?

   RPTA: De un total de 12 monedas, 4 son idénticas de un tipo, 3 son idénticas de otro tipo y 5 son idénticas de un tercer tipo. Aplicando el Teorema previo resultan
   $$\frac{12!}{4!\,3!\,5!} = 27\,720 \text{ maneras distintas.}$$

2. Halle el número de permutaciones que pueden formarse con todas las letras de la palabra **M A N Z A N A** .

   RPTA: En total hay 7 letras: 3A's, 2N's, 1M y 1Z . Entonces hay
   $$\frac{7!}{3!\,2!\,1!\,1!} = 420 \text{ permutaciones distintas.}$$

3. Tres urnas contiguas contienen 5 fichas numeradas del 1 al 5 cada una. Se extrae UNA ficha de cada urna y se forma un número de 3 cifras. ¿Cuántos números diferentes cuya suma de cifras sea 6 se pueden generar?

   RPTA:

MUESTRA			
1 1 4	generan	$3!/2! = 3$	números
1 2 3	generan	$3! = 6$	números
2 2 2	generan	$3!/3! = 1$	número

   $\therefore$ Hay en total: $3 + 6 + 1 = 10$ números.

4. Un partido de fútbol ha terminado con el resultado de 2 a 4 a favor de los visitantes. ¿De cuántas maneras posibles se pudo haber llegado a este resultado?

   RPTA: Como en total se han marcado 6 goles: 2 de los locales (L) y 4 de los visitantes (V) , un resultado posible es la siguiente permutación distinguible de los símbolos L y V ,

1°	2°	3°	4°	5°	6°
L	V	V	V	L	V

Así, se obtienen $\frac{6!}{2!\,4!} = 15$ maneras posibles.

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Se van a formar números de tres cifras con los dígitos $3, 5, 7$ y 8.
   a) ¿Cuántos hay? b) ¿Cuántos hay en los que no se permiten repeticiones?
   c) Cuántos son impares? d) ¿Cuántos tienen todas sus cifras impares?
2. Halle el número de maneras en que 6 personas pueden sentarse en una fila. ¿Cuántas maneras hay si 2 de ellas insisten en sentarse una al lado de la otra?
3. Se van a ordenar en una fila a 5 varones y 5 damas. ¿De cuántas formas se puede hacer esto si deben estar intercalados un varón y una dama?
4. ¿De cuántas maneras se pueden colocar en fila 8 personas, sabiendo que 2 de ellas deben estar separadas siempre?
5. Usando los dígitos $1, 2, 3, 4, 5, 6$, se desea establecer una clave con "palabras" de tres dígitos que no se repiten. ¿Cuál es el número máximo de "palabras" en este lenguaje?
6. Un testigo de un asalto a un Banco dijo que el número de la placa del automóvil de los ladrones era un número de 5 dígitos de los cuales los tres primeros eran 526 en ese orden. No recordó los últimos 2 dígitos, pero estaba totalmente seguro que ninguno era 0 y que eran distintos entre sí.
   ¿Cuántos números de placa de automóviles tendría que investigar la policía?
7. ¿De cuántas maneras pueden sentarse 4 chicos y 3 chicas en una fila si siempre deben estar juntas todas las chicas?
8. Se tienen n niños y r niñas. ¿De cuántas maneras pueden sentarse en una fila de $n + r$ sillas si las niñas deben sentarse todas juntas?
9. Halle el número de formas ordenadas en las que 4 proyectos de Ley pudieran ser aprobados de un conjunto de 10 en una sesión del Congreso?
10. ¿Cuántas señales diferentes, cada una consistente de 7 banderas colgadas en una línea vertical, pueden formarse con 4 banderas rojas idénticas, 2 banderas azules idénticas y 1 bandera blanca?
11. ¿Cuántas señales horizontales diferentes se pueden formar con 5 banderolas diferentes, presentando un número cualquiera de ellas a la vez?
12. Halle el número de permutaciones distintas que pueden formarse con todas las letras de la palabra **ROCOTO**.
13. Si se colocan 7 llaves distintas en un llavero redondo, ¿Cuántos ordenamientos diferentes son posibles?
14. En una Convención hay 2 delegados colombianos, 6 peruanos, 5 brasileños, 3 argentinos y 2 uruguayos. ¿De cuántas maneras posibles podrán ordenarse las delegaciones alrededor de una mesa (circular) si los miembros de cada país deben permanecer siempre juntos?
15. ¿Cuántas "palabras" distintas se pueden formar con todas las letras de la palabra **RADAR**?
16. Alrededor de una mesa redonda se van a sentar 5 mujeres y 5 varones. ¿De cuántas formas se puede hacer esto:
   a) Si deben estar intercalados un varón y una mujer?
   b) Si no deben estar dos varones juntos?
   c) Si en (a) Pedro y Rocío deben sentarse juntos?
   d) Si en (a) Juan y María no deben sentarse juntos?
17. Calcule la suma de todos los números de 5 cifras que se pueden escribir con sólo las cifras impares sin repetir en cada número ninguna cifra.
18. Demuestre que la suma de todos los números de 4 cifras distintas que se pueden formar con los dígitos $2, 4, 6$ y 8 es $6666 \cdot (2 + 4 + 6 + 8)$.
19. Demuestre que la suma de los números representados por las permutaciones de todas las cifras $1, 2, 3, 4, 5$ es $3\,999\,960$.
20. Halle el número de permutaciones distinguibles de todas las letras de la palabra **INGENIERIA**.
21. ¿Cuántas "palabras" de 8 letras pueden formarse con las letras de la palabra **INGENIERIA**, si deben contener **sólo dos** de las tres **I** y **sólo una** de las dos **N**?

CLAVE DE RESPUESTAS

1. a) $4^3 = 64$, (b) $4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$, (c) $4 \cdot 4 \cdot 3 = 48$, (d) $3! = 6$
2. $6! = 720$, $5!\,2! = 240$
3. La fila puede comenzar con un varón o con una dama; así tenemos:
   VDVDVDVDVD ó DVDVDVDVDV, $5!5! + 5!5! = 28\,800$ maneras.
4. $8! - (7!\,2!) = 30\,240$ **(5)**. $6 \cdot 5 \cdot 4 = P_3^6 = 120$
6. $9 \cdot 8 = P_2^9 = 72$ **(8)**. $(n + 1)!\,r!$ **(9)**. $P_4^{10} = 5\,040$
7. Considerando a las 3 chicas como si fueran 1 sola: $5!\,3! = 720$.
10. $7!/(4!\,2!\,1!) = 105$ **(12)** $(6!)/(3!) = 120$
11. $P_1^5 + P_2^5 + P_3^5 + P_4^5 + P_5^5 = 325$ señales horizontales diferentes.
13. $(6!)/2 = 360$ **(14)** $(5 - 1)!\,(2!\,6!\,5!\,3!\,2!) = 49\,766\,400$

15. $5!/(2!\,2!) = 30$ "palabras" distintas.

16. a) Fijando alguno de ellos, digamos un varón, hay $5!$ formas de ubicar a las damas; luego sólo falta permutar los otros cuatro varones: $4!$. Así hay $5!\,4! = 2880$ formas. En general, $n!\,(n-1)!$.

    b) Equivalente a tener intercalados un varón y una mujer como en (a) ; así se tiene: $5!\,4! = 2880$ formas distintas posibles.

    c) Fijando a Pedro y Rocio juntos en el orden alternado, hay $4!$ formas para ubicar a los demás varones y $4!$ formas de ubicar a las demás mujeres. Luego intercambiamos las posiciones de Rocío y Pedro.

    $\therefore\ \ 2(4!)(4!) = 1152$. En general, $2[(n-1)!\,(n-1)!]$.

    d) Fijando a Juan, María no deben sentarse a ninguno de los dos lados de Juan: $(n-2)[(n-1)!\,(n-1)!]$. $\therefore\ \ 3(4!\,4!) = 1728$
    O por complementación: $5!\,4! - 2(4!\,4!) = 1728$.

17. Con las cifras $1, 3, 5, 7, 9$, hay un total de $5! = 120$ números.
    En las cifras de las unidades, cada una de las cinco cifras impares dadas aparece en $(120)/5 = 24$ números.

    Lo mismo ocurre en las cifras de las decenas, en las de las centenas, etc. La Suma S_1 de todas las unidades será:

    $$S_1 = (1+3+5+7+9)\cdot 24 = 600$$

    Este mismo valor coincide con la Suma de todas las cifras de las decenas, con la de todas las cifras de las centenas, etc.

    $\therefore$ **SUMA TOTAL** $= S_1\cdot(10^4 + 10^3 + 10^2 + 10 + 1) = (600)(11111)$
    $= 6\,666\,600$

19. $S = (1+2+3+4+5)\cdot\dfrac{5!}{5}(10^4 + 10^3 + 10^2 + 10 + 1)$; es decir,

    $S = (15)(24)(11111) = 3\,999\,960$.

20. $10!/(3!\,2!\,2!\,1!\,1!\,1!) = 151\,200$

21. Como se disponen de 8 letras $\{I, I, N, E, E, G, R, A\}$, entonces se pueden formar: $8!/(2!\,2!\,1!\,1!\,1!\,1!) = 10\,080$ "palabras".

3. COEFICIENTES BINOMIALES Y MULTINOMIALES

Si n y k son números enteros, $0 \le k \le n$, se llama **COEFICIENTE BINOMIAL** al símbolo $\binom{n}{k}$, que representa un ***número entero positivo*** cuyo valor es:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

Se lee "PARÉNTESIS n SOBRE k ".

A los números n y k se les denomina **ÍNDICE SUPERIOR e ÍNDICE INFERIOR** respectivamente.

EJEMPLOS

a) $\binom{8}{3} = \dfrac{8!}{3!\,(8-3)!} = \dfrac{8!}{3!\,5!} = \dfrac{5!\,6\cdot7\cdot8}{5!\,1\cdot2\cdot3} = 56$

b) $\binom{4}{0} = \dfrac{4!}{0!\,(4-0)!} = \dfrac{4!}{0!\,4!} = 1$, pues $0! = 1$.

c) $\binom{5}{5} = \dfrac{5!}{5!\,(5-5)!} = \dfrac{5!}{5!\,0!} = 1$ $\left[= \binom{5}{0} \right]$

d) $\binom{6}{1} = \dfrac{6!}{1!\,(6-1)!} = \dfrac{6!}{1!\,5!} = \dfrac{5!\cdot6}{5!} = 6$, pues $1! = 1$

e) $\binom{10}{4} = \dfrac{10!}{4!\,(10-4)!} = \dfrac{10!}{4!\,6!} = \dfrac{6!\cdot7\cdot8\cdot9\cdot10}{6!\cdot1\cdot2\cdot3\cdot4} = 210$

f) $\binom{n}{0} = 1$, $\binom{n}{n} = 1$; $\binom{n}{1} = n$, $\binom{n}{n-1} = n$.

3.1 PROPIEDADES DE LOS COEFICIENTES BINOMIALES

PROPIEDAD I : $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$

Note que la SUMA de los Índices Inferiores es igual al Índice Superior común:

$$k + (n-k) = n \ .$$

EJEMPLOS .- a) $\binom{8}{3} = \dfrac{8!}{3!\,5!} = \dfrac{8!}{5!\,3!} = \binom{8}{5}$

b) $\binom{6}{2} = \binom{6}{4}$, c) $\binom{9}{4} = \binom{9}{5}$

NOTA .- A los números enteros positivos $\binom{n}{k}$ y $\binom{n}{n-k}$ se les llama **COEFICIENTES BINOMIALES COMPLEMENTARIOS.**

PROPIEDAD II :

$$\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}$$

EJEMPLOS .- a) $\binom{8}{4} + \binom{8}{5} = \binom{9}{5}$, es decir $70 + 56 = 126$

b) $\binom{10}{7} + \binom{10}{8} = \binom{11}{8}$, $[\ 120 + 45 = 165\ ]$.

3.2 TRIÁNGULO DE PASCAL

Como una aplicación muy sencilla y muy útil de las PROPIEDADES I y II de los coeficientes binomiales, obtenemos el siguiente triángulo aritmético conocido con el nombre de TRIÁNGULO DE PASCAL o TRIÁNGULO DE TARTAGLIA:

$$\binom{0}{0}$$
$$\binom{1}{0}\ \binom{1}{1}$$
$$\binom{2}{0}\ \binom{2}{1}\ \binom{2}{2}$$
$$\binom{3}{0}\ \binom{3}{1}\ \binom{3}{2}\ \binom{3}{3}$$
$$\binom{4}{0}\ \binom{4}{1}\ \binom{4}{2}\ \binom{4}{3}\ \binom{4}{4}$$
$$\downarrow \quad \binom{5}{0}\ \binom{5}{1}\ \binom{5}{2}\ \binom{5}{3}\ \binom{5}{4}\ \binom{5}{5} \quad \downarrow$$

Note que los coeficientes de cada renglón se obtienen del renglón inmediatamente anterior, y recordando que

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1 \qquad , \qquad \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}$$

Es así que basta conocer un renglón para conocer el siguiente.

Es decir

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\
1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccccccc}
1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1 \\
1 & 7 & & 21 & & 35 & & 35 & & 21 & & 7 & 1
\end{array}$$

Todos los números que figuran en cada renglón corresponden a los **COEFICIENTES** de las sucesivas potencias del binomio de Newton:

$(a + b)^n$, para $n = 0,\ n = 1,\ n = 2,\ n = 3,\ n = 4,\ n = 5,\ n = 6,$ $n = 7, \ldots,$ etc.

Por esta razón los números $\binom{n}{k}$ son llamados **COEFICIENTES BINOMIALES.**

3.3 TEOREMA DEL BINOMIO DE NEWTON .-

Sea n entero ≥ 1:

$$(a + b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \ldots + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + \binom{n}{n}b^n .$$

El número de sumandos de este desarrollo es: $n + 1$.

3.4 CONSECUENCIA .-

Si en la fórmula del desarrollo del Binomio [3.3] hacemos $a = 1$, $b = 1$, resulta la fórmula:

$$2^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \ldots + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n}$$

En forma análoga a como aparecen los Coeficientes Binomiales en el desarrollo de las potencias del binomio: $(a + b)^n$, presentaremos los llamados COEFICIENTES MULTINÓMICOS, los cuales aparecen como coeficientes del desarrollo de las potencias de un multinomio: $(a_1 + a_2 + \ldots + a_r)^n$.

3.5 COEFICIENTES MULTINÓMICOS

Sea n un entero positivo ≥ 1 y sean $n_1, n_2, \ldots, n_r$, enteros ≥ 0 tales que $n_1 + n_2 + \ldots + n_r = n$; se define la expresión:

$$\binom{n}{n_1, n_2, \ldots, n_r} = \frac{n!}{n_1!\, n_2! \ \ldots\ n_r!}$$

Estos números reciben el nombre de **COEFICIENTES MULTINÓMICOS** en razón de la fórmula siguiente para Potencias de Multinomios, que generaliza el Teorema del Binomio de Newton [3.3] .

TEOREMA .- Sean $a_1, a_2, \ldots, a_r$ números reales (o complejos) :

$$(a_1 + a_2 + \ldots + a_r)^n = \sum_{n_1 + n_2 + \ldots + n_r = n} \binom{n}{n_1, n_2, \ldots, n_r} a_1^{n_1} \cdot a_2^{n_2} \cdot \ldots \cdot a_r^{n_r}$$

En esta fórmula $n_1, n_2, \ldots, n_r$ son enteros ≥ 0 con la única condición adicional de que $n_1 + n_2 + \ldots + n_r = n$. Esto significa que algunos de ellos pueden repetirse (o todos) ; que pueden tomar el valor $0, 1, \ldots$ etc.

EJEMPLO 1.

$$\binom{8}{2,3,3} = \frac{8!}{2!\,3!\,3!} = \frac{3! \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}{3! \cdot 2 \cdot 6} = 560$$

$$\binom{9}{1,2,6} = \frac{9!}{1!\,2!\,6!} = \frac{6! \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9}{6! \cdot 2} = 252$$

$$\binom{6}{0,4,2} = \frac{6!}{0!\,4!\,2!} = \frac{4! \cdot 5 \cdot 6}{4! \cdot 1 \cdot 2} = 15$$

$$\binom{6}{3,0,1,2} = \frac{6!}{3!\,0!\,1!\,2!} = \frac{3! \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6}{3! \cdot 1 \cdot 2} = 60$$

EJERCICIO .- Si $n = n_1 + n_2$, todos enteros ≥ 0 , entonces

$$\binom{n}{n_1, n_2} = \binom{n}{n_1} = \binom{n}{n_2} .$$

SOLUCIÓN .- Puesto que $n_2 = n - n_1$ y $n_1 = n - n_2$, entonces

$$\binom{n}{n_1, n_2} = \frac{n!}{n_1!\, n_2!} = \begin{cases} \dfrac{n!}{n_1!\,(n - n_1)!} = \binom{n}{n_1} \\ \dfrac{n!}{(n - n_2)!\, n_2!} = \binom{n}{n_2} \end{cases}$$

EJEMPLO 2 .- Desarrolle la potencia: $(a + b + c)^2$.

SOLUCIÓN .- $(n = 2, r = 3)$ $n_1 + n_2 + n_3 = n = 2$.

Entonces por la fórmula del Teorema previo:

$$(a + b + c)^2 = \binom{2}{2,0,0} a^2 b^0 c^0 + \binom{2}{1,1,0} a^1 b^1 c^0 + \binom{2}{1,0,1} a^1 b^0 c^1 +$$

$$+ \binom{2}{0,2,0} a^0 b^2 c^0 + \binom{2}{0,1,1} a^0 b^1 c^1 + \binom{2}{0,0,2} a^0 b^0 c^2$$

$$= a^2 + 2ab + 2ac + b^2 + 2bc + c^2 . \quad [\text{ 6 sumandos }]$$

EJEMPLO 3. Desarrolle: $(a + b + c)^3$

SOLUCIÓN .- $(n = 3, r = 3)$ $n_1 + n_2 + n_3 = n = 3$,

$$(a + b + c)^3 = \binom{3}{3,0,0} a^3 + \binom{3}{2,1,0} a^2 b + \binom{3}{2,0,1} a^2 c + \binom{3}{1,2,0} ab^2$$

$$+ \binom{3}{1,0,2} ac^2 + \binom{3}{1,1,1} abc + \binom{3}{0,3,0} b^3 + \binom{3}{0,2,1} b^2 c$$

$$+ \binom{3}{0,1,2} bc^2 + \binom{3}{0,0,3} c^3 =$$

$$= a^3 + 3a^2 b + 3a^2 c + 3ab^2 + 3ac^2 + 6abc + b^3 + 3b^2 c + 3bc^2 + c^3$$

[Este desarrollo tiene 10 sumandos]

3.5.1 TEOREMA .- El desarrollo de $(a_1 + a_2 + \ldots + a_r)^n$ tiene

$$\frac{(n + r - 1)!}{n!\,(r - 1)!} \quad \text{sumandos (o términos)}$$

cuyos Coeficientes Multinomiales son de la forma: $\binom{n}{n_1, n_2, \ldots, n_r}$,

donde los n_k son enteros ≥ 0 tales que: $n_1 + n_2 + \ldots + n_r = n$.

PRUEBA .- Tomemos en particular $n = 10$ $\qquad n_1 + n_2 + n_3 + n_4 = 10$

Una suma posible es por ejemplo $3 + 2 + 0 + 5 = 10$

Convengamos en representar cada unidad con un triángulo pequeño (Δ), con lo cual esta suma se representaría como $\Delta\Delta\Delta + \Delta\Delta + + \Delta\Delta\Delta\Delta\Delta$

Otra suma posible es: $0 + 0 + 4 + 6 = 10$,

representada por $+ + \Delta\Delta\Delta\Delta + \Delta\Delta\Delta\Delta\Delta\Delta$

Otra suma posible es: $0 + 0 + 0 + \quad 10 \quad = \quad 10$
representada por $+ \ + \ + \quad \Delta\Delta\Delta\Delta\Delta\Delta\Delta\Delta\Delta\Delta$.

NOTE que por haber $\underline{r = 4}$ sumandos existen $\underline{r - 1 = 3}$ signos $(+)$, y que cuando aparece un sumando que sea 0 no se coloca nada.
Así, cada posibilidad está representada por una permutación de un total de

$$\underline{n + (r - 1)} = 10 + 3 = 13 \text{ símbolos ,}$$

los cuales son solamente de 2 tipos distintos, a saber ,

$n = 10$ triángulos (Δ) y $(r - 1) = 3$ signos $(+)$.

Entonces todas las posibilidades estarán representadas por el total de **PERMUTACIONES DISTINGUIBLES** de los $13 = n + (r - 1)$ símbolos , y que es igual a:

$$\frac{13!}{10!\,3!} \quad , \quad \text{es decir} \quad \frac{[\,n + (r - 1)\,]!}{n!\,(r - 1)!} \qquad L\,.\,q\,.\,q\,.\,d\,.$$

EJEMPLO 4. En el desarrollo de $(1 - 3x + 2x^2)^8$, halle:
a) El coeficiente de x^6 . b) El coeficiente de x^{13} .

SOLUCIÓN .- Identificando $a = 1, \ b = -3x, \ c = 2x^2$.
Un **SUMANDO GENÉRICO** es:

$$\binom{8}{n_1, n_2, n_3} a^{n_1} b^{n_2} c^{n_3} = (\,n_1, n_2, n_3 \geq 0, \ n_1 + n_2 + n_3 = n\,)$$

$$= \frac{n!}{n_1!\,n_2!\,n_3!}(-3)^{n_2}(2)^{n_3}(x)^{n_2+2n_3} \quad \ldots (\beta)$$

a) CONDICIÓN EN (β): $\boxed{n_2 + 2n_3 = 6}$ y $\boxed{n_1 + n_2 + n_3 = 8}$

CASOS POSIBLES PARA $(n_1, n_2, n_3) = (n_1, (n_2, n_3))$:

$$(2,(6,0)), \ (3,(4,1)), \ (4,(2,2)), \ (5,(0,3)) .$$

Por lo tanto, el coeficiente de x^6 será:

$$\frac{8!}{2!\,6!\,0!}(-3)^6 2^0 + \frac{8!}{3!\,4!\,1!}(-3)^4 2^1 + \frac{8!}{4!\,2!\,2!}(-3)^2 2^2 + \frac{8!}{5!\,0!\,3!}(-3)^0 2^3 =$$
$$= \quad 20\,412 \ + \ 45\,360 \ + \ 15\,120 \ + \ 448 \quad = \quad 81\,340$$

b) El coeficiente de x^{13} es : $-59\,136$ (EJERCICIO) .

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. La novena fila del Triángulo de Pascal es:
   1 9 36 84 126 126 84 36 9 1
   Halle la octava y la décima filas de dicho Triángulo.
2. En el desarrollo de $(1 + x^2 - x^3)^9$, halle el coeficiente de x^8 .
3. En el desarrollo de $(1 + x^2 - 2x^3)^9$, halle el coeficiente de x^{15} .
4. En el desarrollo de $(x^2 + \frac{1}{x} + x)^8$, halle:
   a) El coeficiente de x^6 . b) El término independiente.

CLAVE DE RESPUESTAS

1. 8va. fila: 1 8 28 56 70 56 28 8 1
   10ma. fila: 1 10 45 120 210 252 210 120 45 10 1
2. 378 , **(3)**. $-17\,976$, **(4)**. a) 708 , b) 238 .

4. COMBINACIONES

Sea M un conjunto que contiene n elementos disjuntos . Se denomina **COMBINACIÓN DE r ELEMENTOS DEL CONJUNTO** M a cualquier subconjunto de M que contenga r elementos, distintos entre sí.

Por definición de Subconjunto se deduce que en toda **COMBINACIÓN** el orden en los elementos no interesa.

4.1 NOTACIÓN . Al número total de **COMBINACIONES** (Subconjuntos) de r objetos distintos, tomados de un total de n objetos se le denota por

$$C(n\,;r) \quad \text{o} \quad C_r^n \ .$$

Es decir, $C(n\,;r)$ representa el número total de COMBINACIONES de n objetos, EN GRUPOS DE r .

EJEMPLO 1. De un conjunto de 5 estudiantes A , B , C , D , E , ¿Cuántos comités diferentes conformados por 3 de ellos se pueden formar?

SOLUCIÓN .- Observando que el comité $\{A, B, C\}$ es el mismo que el comité $\{B, C, A\}$ pues el orden en los elementos no interesa, entonces se pueden formar todos los comités siguientes:

$\{A,B,C\}$, $\{A,B,D\}$, $\{A,B,E\}$, $\{A,C,D\}$, $\{A,C,E\}$,
$\{A,D,E\}$, $\{B,C,D\}$, $\{B,C,E\}$, $\{B,D,E\}$, $\{C,D,E\}$.

Puesto que éstas son todas las Combinaciones de 5 en grupos de 3 , y resultaron 10 en total, entonces la respuesta es: $C(5;3) = 10$.

NOTA .- Vemos que DOS Combinaciones son diferentes si una de ellas tiene un elemento que la otra no lo tiene.

Por otra parte, tomando una Combinación cualquiera, como $\{A, B, E\}$, de 3 elementos, ésta tienen asociada $3! = 6$ permutaciones de dichos tres elementos,

$$\{A, B, E\} \rightarrow ABE\ ,\ AEB\ ,\ BAE\ ,\ BEA\ ,\ EAB\ ,\ EBA$$

Por lo tanto, permutando entre si los 3 elementos de CADA COMBINACIÓN en los $C(5;3)$ posibles, de $3!$ maneras distintas, obtenemos el Número Total de Permutaciones de los $n = 5$ estudiantes tomados de 3 en 3:

$$C(5;3)\cdot 3! = P_3^5 \quad \text{de donde} \quad C(5;3) = \frac{1}{3!}P_3^5 = \frac{1}{3!}\cdot\frac{5!}{2!}$$

$$\Rightarrow\ C(5,3) = \frac{5!}{3!\,2!} = \binom{5}{3} \quad \ldots \text{ de la Sección [3] anterior.}$$

4.2 TEOREMA .- El Número Total de Combinaciones de n objetos distintos tomados en Grupos de r es:

$$C(n;r) = \binom{n}{r} = \frac{n!}{r!\,(n-r)!}$$

EJEMPLO 2. Dados los dígitos del 1 al 9 , ¿de cuántas maneras diferentes se puede elegir subconjuntos (grupos) de 3 de ellos?

SOLUCIÓN .- Puesto que el orden en los elementos no interesa, hallaremos el número de Combinaciones de los 9 dígitos en grupos de 3 :

$$\binom{9}{3} = \frac{9!}{3!(9-3)!} = \frac{9!}{3!\,6!} = \frac{6!\cdot 7\cdot 8\cdot 9}{6!\cdot 1\cdot 2\cdot 3} = 84 \quad \text{maneras.}$$

4.3 NOTA .- Debido al TEOREMA [4.2] es que a los COEFICIENTES BINOMIALES $\binom{n}{r}$ también se les denomina **NÚMEROS COMBINATORIOS .**

EJEMPLO 3. Un estudiante tiene que resolver 10 preguntas en un examen que contiene 13 preguntas. a) ¿De cuántas maneras las puede elegir?.
b) ¿De cuántas maneras puede resolver el examen si las 2 primeras preguntas son obligatorias?

SOLUCIÓN .- Por las características de las situaciones (a) y (b) el orden en la selección no interesa.

a) Combinaciones de 13 preguntas en grupos de 10 :

$$C(13;10) = \binom{13}{10} = \frac{13!}{10!\,3!} = \frac{11\cdot 12\cdot 13}{1\cdot 2\cdot 3} = 286 \quad \text{maneras.}$$

b) Se eligen las 2 primeras preguntas en grupo de 2 obligatoriamente, de una única manera, y las 8 preguntas siguientes las puede elegir dentro de las 11 preguntas restantes, de

$$\binom{2}{2}\cdot\binom{11}{8} = 1\cdot\frac{11!}{8!\,3!} = \frac{9\cdot 10\cdot 11}{1\cdot 2\cdot 3} = 165 \quad \text{maneras.}$$

EJEMPLO 4. ¿De cuántas maneras se puede formar un grupo de 4 personas de un conjunto de 5 damas y 3 varones, si cada grupo debe incluir por lo menos 1 varón?

SOLUCIÓN .- Tal grupo puede incluir 1 varón, 2 varones o los 3 varones.

$$\underset{V}{\binom{3}{1}}\cdot\underset{D}{\binom{5}{3}} + \underset{V}{\binom{3}{2}}\cdot\underset{D}{\binom{5}{2}} + \underset{V}{\binom{3}{3}}\cdot\underset{D}{\binom{5}{1}} = 65 \quad \text{maneras.}$$

EJEMPLO 5. ¿De cuántas maneras se pueden formar 2 equipos de 4 integrantes cada uno de un conjunto de 5 niñas y 3 niños, si cada equipo debe incluir por lo menos 1 niño?

SOLUCIÓN .- $\{V = \text{niño}\ ,\ D = \text{niña}\}$ Se tienen $3V$ y $5D$.

EQUIPOS UN EQUIPO Y OTRO EQUIPO
$\{1V, 3D\}$ $\{2V, 2D\}$ . . . ¿Único esquema posible?

$\therefore$ Hay $\binom{3}{1}\cdot\binom{5}{3}\cdot\binom{2}{2}\cdot\binom{2}{2} = 3\cdot 10\cdot 1\cdot 1 = 30$ maneras ,

pues una vez elegido el 1er. equipo, sólo se dispone de 2 niños para ser elegidos ambos en un conjunto de manera única, y de 2 niñas para ser elegidas ambas en un conjunto también de manera única.

EJEMPLO 6. Veinte "cachimbos" son presentados entre si el primer día de clases. Si cada uno saluda al resto con un apretón de manos, determinar el número total de apretones de mano entre todos ellos.

SOLUCIÓN .- Equivale a formar conjuntos de 2 cachimbos distintos, tomándolos del grupo de 20, de todas las maneras posibles; es decir de

$$\binom{20}{2} = 190 \quad \text{formas posibles (o apretones posibles) .}$$

EJEMPLO 7. Diez parejas están en una fiesta. Si cada persona saluda al resto con un apretón de manos excepto a su propio acompañante, determinar el número total de apretones de mano posibles.

SOLUCIÓN .- Debemos descartar 10 subconjuntos correspondientes a aquellas parejas que asisten juntos, los cuales no se dan la mano. Entonces hay:

$$\binom{20}{2} - 10 = 180 \quad \text{apretones de mano.}$$

EJEMPLO 8. ¿Cuántos subconjuntos de 12 elementos se pueden formar a partir de un conjunto de 15 elementos distintos?

SOLUCIÓN .- Son las Combinaciones de 15 elementos en grupos de 12:

$$\binom{15}{12} = \frac{15!}{12!3!} = 455 \quad \text{subconjuntos de 12 elementos.}$$

EJEMPLO 9. Si un conjunto tiene 15 subconjuntos de 2 elementos cada uno, ¿cuántos subconjuntos tendrá en total?

SOLUCIÓN .- Hallaremos primero el número total n de ***elementos*** que tiene el conjunto en cuestión. Como la condición para ello es que:

$$\binom{n}{2} = 15 \Rightarrow \frac{n(n-1)}{1\cdot 2} = 15 \Rightarrow n^2 - n - 30 = 0$$

$$(n-6)(n+5) = 0 \Rightarrow \underline{n = 6}\ .$$

Entonces en total hay $2^n = 2^6 = 64$ subconjuntos, incluyendo el conjunto vacío.

EJEMPLO 10. Un conjunto tiene tantos subconjuntos de 3 elementos como subconjuntos de 8 elementos. a) ¿Cuántos elementos tiene?
b) ¿Cuántos subconjuntos de 2 elementos tiene?

SOLUCIÓN .- a) CONDICIÓN: $\binom{n}{3} = \binom{n}{8}$

Aplicando la Propiedad (I) de los Coeficientes Binomiales :

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} \Rightarrow k = 3 \quad y \quad n - k = 8$$

$$\Rightarrow \underline{n = 11}\ .$$

b) De (a): $\binom{n}{2} = \binom{11}{2} = 55$ subconjuntos de 2 elementos cada uno.

EJEMPLO 11. Una caja contiene 15 bolas numeradas del 1 al 15. Si las bolas son elegidas sin devolución y el orden no interesa, ¿ se tendrá mayor cantidad de maneras de elegir grupos de 3 bolas de la caja o grupos de 12 bolas?

SOLUCIÓN .- Calculemos el número de Combinaciones en ambos casos:

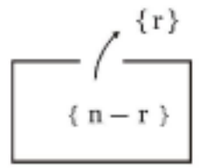
$$C(15;3) = \binom{15}{3} = \frac{15!}{3!\,12!} = 455 \quad \text{grupos de 3 cada uno}$$

$$C(15;12) = \binom{15}{12} = \frac{15!}{12!\,3!} = 455 \quad \text{grupos de 12 cada uno.}$$

Así vemos que AMBOS RESULTADOS ¡ COINCIDEN !. Veamos por qué esto es cierto.

En efecto, cada vez que elegimos un Subconjunto de 3 bolas y lo extraemos, indirectamente también hemos seleccionado un Subconjunto de 12 bolas, que es el que se queda dentro de la caja.

Por lo tanto , existen tantas maneras de tomar un Subconjunto de r objetos como maneras de dejar (o de seleccionar) un Subconjunto de $n - r$ objetos.



Esta situación está representada en la fórmula:

$$C(n;r) = C(n;n-r)\ , \quad \text{es decir} \quad \binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$$

4.4 OTRA INTERPRETACIÓN

El número $\binom{n}{r}$ también es interpretado como que representa el número de maneras en que un conjunto de n elementos distintos es dividido en 2 Subconjuntos **DISJUNTOS**: uno de r elementos y el otro de $(n - r)$ elementos.

Por lo tanto, se cumple la fórmula siguiente.

$$\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r} = \binom{n}{r,\ n-r}$$

EJEMPLO 1. Un estudiante debe responder a cualquiera 8 preguntas en un examen que contiene 12 preguntas. a) ¿De cuántas formas posibles puede elegir las 8 preguntas a responder? b) ¿De cuántas formas posibles puede elegir las 4 preguntas que no va a responder?

RPTA: a) $\binom{12}{8} = 495$ formas. b) $\binom{12}{4} = 495 = \binom{12}{8}$.

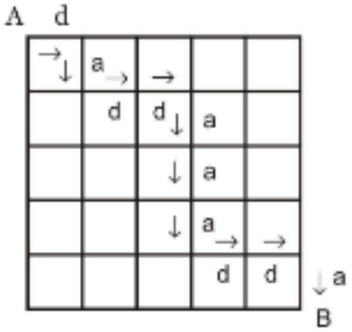
PROBLEMAS RESUELTOS

12. Un pueblo consiste de un lado Norte y un lado Sur. El lado Norte tiene 16 casas y el lado Sur 10. Se le pide a un encuestador que visite 4 casas en el lado Norte y 3 en el lado Sur. ¿De cuántas maneras lo puede hacer?

RPTA: Como el orden en que las visite no tiene importancia, lo podrá hacer de:

$$[\text{N y S}]: \quad \binom{16}{4}\binom{10}{3} = 218\,400 \quad \text{maneras.}$$

13. El diagrama indica las posibles rutas entre dos casas situadas en las esquinas A y B de un Distrito. Las líneas representan calles. Una persona ubicada en A desea llegar a B asumiendo que en cada ruta elegida puede recorrer a lo más dos calles de una misma manzana y en ningún caso debe retroceder. ¿Cuántas rutas diferentes puede elegir de A a B?



SUG: Denotar

a = avanzar 1 cuadra hacia abajo.

d = avanzar 1 cuadra hacia la derecha.

SOLUCIÓN.- Una posible ruta es:

d a d d a a a d d a ;

notamos que cada ruta está constituida por 10 recorridos de 1 cuadra cada una, donde 5 siempre son hacia abajo (a) y 5 son hacia la derecha (d).

Por lo tanto, hay $\binom{10}{5,5} = \binom{10}{5} = 252$ rutas posibles de A a B.

14. De un grupo de 20 fumadores y 10 que no lo son, ¿de cuántas maneras se puede seleccionar un conjunto de 6 personas que contenga exactamente 4 fumadores?

RPTA: Y por supuesto 2 que no lo son: de $\binom{20}{4}\binom{10}{2} = 218\,025$ maneras.

15. Un sargento que dirige un pelotón de 16 soldados emplea 4 en la guardia. Después de haberlos asignado de todas las maneras posibles, a) ¿Cuántas veces sirvió cada soldado en la guardia? b) ¿Cuántas veces sirvieron 2 soldados determinados en la misma guardia?

RPTA: a) Calculemos la cantidad de veces en que el soldado A sirvió en la guardia. Como él ya estaba fijo, sólo faltaba determinar el número de maneras en que su grupo de 4 se completaba, y resultó

$$\binom{1}{1}\cdot\binom{15}{3} = 455 \quad \text{veces.}$$

b) Sean A y B tales soldados fijos: $\binom{2}{2}\cdot\binom{14}{2} = 91$ veces.

16. En un examen de 12 preguntas un estudiante debe responder 9. ¿Cuántas posibilidades de elección tiene si de las 6 primeras debe responder por lo menos 4?

RPTA: 6 primeras: elegir 4, 5 ó 6
6 últimas: elegir 5, 4 ó 3 respectivamente.

Así, hay $\binom{6}{4}\binom{6}{5} + \binom{6}{5}\binom{6}{4} + \binom{6}{6}\binom{6}{3} = 200$ posibilidades.

17. De 3 lapiceros Fáber, 5 Lucas y 4 Párker, se desea comprar 3 de ellos de modo que se escoja por lo menos un lapicero Fáber. ¿De cuántas maneras puede hacerse? **SUG:** {F, ×, ∗} o {F, F, ∗} o {F, F, F}.

RPTA: $\binom{3}{1}\binom{9}{2} + \binom{3}{2}\binom{9}{1} + \binom{3}{3} = 136$ maneras.

18. ¿De cuántas maneras se puede escoger 4 números diferentes en el conjunto $\{1, 2, \ldots, 50\}$, si el menor de ellos debe ser mayor que 26?

RPTA: Del 27 al 50 existen 24 números; $\binom{24}{4} = 10\,626$ maneras.

19. ¿De cuántas maneras pueden seleccionarse 4 ó más personas de un conjunto de 12 personas?

RPTA: $\binom{12}{4} + \binom{12}{5} + \ldots + \binom{12}{12} =$

$$= 2^{12} - [\binom{12}{0} + \binom{12}{1} + \binom{12}{2} + \binom{12}{3}] = 3\,797 \quad \text{maneras.}$$

20. En un club estudiantil hay 10 varones y 4 chicas. Se va a designar un grupo de 5. ¿De cuántas maneras distintas se puede hacer esto si siempre debe haber al menos 3 chicas en el grupo?

RPTA: Hay exactamente 3 chicas y 2 varones o bien exactamente 4 chicas y 1 varón: $\binom{4}{3}\binom{10}{2} + \binom{4}{4}\binom{10}{1} = 190$ maneras.

21. Hallar el número de formas diferentes de seleccionar comités de 7 personas de un conjunto de 10, de las cuales 6 son varones y 4 mujeres, de manera que el número de integrantes del sexo femenino sea siempre distinto de 2.

RPTA : Por complemento: $\binom{10}{7} - \binom{6}{5}\binom{4}{2} = 84$ formas.

22. En una mesa se tienen n fichas blancas numeradas de 1 a n y también n fichas negras numeradas de 1 a n. ¿De cuántas maneras se puede tomar r de ellas que sean del mismo color?

RPTA : Las r blancas o bien las r negras: $\binom{n}{r} + \binom{n}{r} = 2\binom{n}{r}$.

23. Se tienen 5 consonantes diferentes y 4 vocales diferentes. a) ¿Cuántos conjuntos de 4 letras se pueden formar de modo que contengan 2 consonantes y 2 vocales? b) ¿Cuántas "palabras" o códigos de 4 letras se pueden formar de modo que contengan 2 consonantes diferentes y 2 vocales diferentes?

RPTA : a) El orden no interesa: $\binom{5}{2}\binom{4}{2} = 60$ grupos

b) Los códigos BCAE y ABCE son distintos pues aquí el orden sí interesa. Así, primero elegimos 2 consonantes y 2 vocales, y luego permutamos de todas las formas posibles estas 4 letras elegidas. Obtenemos

$$\binom{5}{2}\binom{4}{2} \cdot 4! = 1440 \quad \text{códigos de este tipo.}$$

24. En el Congreso Nacional se ha designado a 12 parlamentarios, de los cuales se va a conformar una comisión de 7 de ellos para el estudio de un proyecto de Ley. ¿De cuántas maneras se puede conformar dicha comisión si se sabe que 3 de ellos no desean pertenecer a la misma comisión?

RPTA : Puede estar 1 ó ninguno de los tres en la comisión, (¿POR QUÉ?)

a) No está ninguno de los **tres** : $\binom{9}{7} = 36 = a$

b) Está **uno** sólo de los **tres** : $\binom{3}{1}\binom{9}{6} = 252 = b$

$\therefore$ En total hay $a + b = 288$ maneras posibles.

25. Una señora tiene 11 amigos y amigas cercanas y desea invitar a 5 a una cena. a) ¿De cuántas maneras lo puede hacer? b) ¿De cuántas maneras si dos están casados y asisten a la reunión sólo si van juntos? c) ¿De cuántas maneras si 2 de ellos no se llevan bien y no asisten juntos? d) ¿De cuántas maneras en (c) si hay dos que están casados y no asisten el uno sin la otra?

RPTA : a) De $\binom{11}{5} = 462$ maneras posibles.

b) – Si la pareja asiste : $1 \cdot 1 \cdot \binom{9}{3} = 84$
– Si la pareja no asiste: $\binom{9}{5} = 126$
$\Rightarrow 84 + 126 = 210$

c) Va uno y no va el otro o no asiste ninguno de ellos: {A, B, 9},

$$1 \cdot \binom{9}{4} + 1 \cdot \binom{9}{4} + \binom{9}{5} = 3\binom{9}{4} = 378 \quad \text{maneras.}$$

O por complemento, quitando las maneras en que ambos asisten:

$$\binom{11}{5} - 1 \cdot 1 \cdot \binom{9}{3} = 378 \quad \text{maneras.}$$

d) Va la pareja y a lo más uno de los que no se llevan bien, o no va la pareja y va a lo más uno de los que no se llevan bien:

$$2[1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \binom{7}{2}] + 1 \cdot 1 \cdot \binom{7}{3} + 2[1 \cdot \binom{7}{4}] + \binom{7}{5} = 168.$$

26. ¿Cuántas "palabras" diferentes de 6 letras se pueden formar con todas las letras de la palabra PARABOLA, a) Si deben contener las tres letras A? b) Si deben contener juntas las tres letras A?

RPTA : Se dispone del conjunto {A, A, A, P, R, B, O, L}

a) [A] [ ] [A] [ ] [ ] [A]

De 6 casillas escogemos los grupos de 3 donde estarán las tres A's; luego ocupamos las tres casillas que quedan, en orden, con 3 letras de las 5 del conjunto {P, R, B, O, L}. Hay $\binom{6}{3} \cdot P_3^5 = 1200$ palabras.

b) Consideremos a las tres letras juntas AAA como 1 "letra" y elijamos un subconjunto de 3 letras de {P, R, B, O, L}. Luego, permutamos todas estas 4 letras. Hay $\binom{5}{3} \cdot 4! = 240$ palabras:

[AAA] [ ] [ ] [ ]

27. ¿Cuántas "palabras" diferentes de 8 letras pueden formarse con todas las letras de la palabra **PONTIFICIA**.
a) Si deben estar las tres I? b) Si deben estar juntas las tres I?
c) Si deben estar las tres letras I, pero separadas?

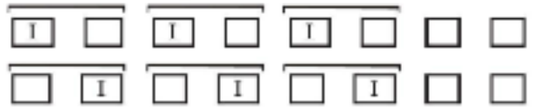
RPTA : En total hay 10 letras incluyendo las tres I. No hay otra letra que se repita, {I, I, I, P, O, N, T, F, C, A}

a) [I] [ ] [I] [ ] [ ] [I] [ ] [ ]

Por Casillas: $\binom{8}{5} \cdot P_5^7 = 141120$

b) Por Letras: $(\,{}^{7}_{5}\,)\cdot 6! = 15\,120$

c) Eligiendo 3 "casillas" de un total de 5, y permutando 7 letras tomándolas de 5 en 5 :

 ó

$\therefore \quad [\,(\,{}^{5}_{3}\,) + (\,{}^{5}_{3}\,)\,]\cdot P_5^7 = 50\,400$ palabras.

28. ¿Cuántas sumas diferentes de dinero pueden formarse con 6 monedas de distintos valores?

RPTA : $(\,{}^{6}_{1}\,) + (\,{}^{6}_{2}\,) + (\,{}^{6}_{3}\,) + (\,{}^{6}_{4}\,) + (\,{}^{6}_{5}\,) + (\,{}^{6}_{6}\,) = 2^6 - (\,{}^{6}_{0}\,) = 63$.

29. Hay 10 puntos $A_1, A_2, \ldots, A_{10}$, en un plano dado, no existiendo tres de ellos sobre una misma recta.

a) ¿Cuántas rectas se pueden trazar por estos puntos?

b) ¿Cuántas de estas rectas pasan por el punto A_1 ?

c) ¿Cuántos triángulos están determinados por estos puntos?

d) ¿Cuántos de estos triángulos contienen al punto A_1 como vértice?

RPTA : a) Como dos puntos determinan una recta, hay $(\,{}^{10}_{2}\,) = 45$ rectas.

b) El otro punto que determina una recta con A_1 puede ser cualquiera de los otros $\underline{9}$ puntos. Así, hay 9 rectas que pasan por A_1.

c) Tres puntos no colineales determinan un triángulo. Así, se tienen en total: $(\,{}^{10}_{3}\,) = 120$ triángulos.

d) Los otros 2 puntos (vértices) con los cuales A_1 determina un triángulo son seleccionados de: $(\,{}^{9}_{2}\,) = 36$ maneras. Y ésta resulta ser la cantidad de triángulos con A_1 como vértice.

30. ¿Cuántas diagonales tiene un polígono regular de n lados?

RPTA : El polígono por tener n lados, tiene n vértices. Cada par de vértices determina ***un lado o una diagonal***. Así : *# lados + # diagonales* $= (\,{}^{n}_{2}\,)$.

Como hay n lados, entonces hay

$$(\,{}^{n}_{2}\,) - n = \frac{n(n-3)}{2} \quad \textit{diagonales}$$

31. ¿Cuántas diagonales tiene un heptágono? RPTA : $(\,{}^{7}_{2}\,) - 7 = 14$ diag.

32. ¿Qué polígono regular tiene el mismo número de lados que de diagonales?

RPTA : $n(n-3)/2 = n \quad \Rightarrow \quad n = 5$: PENTÁGONO

33. ¿Cuántas diagonales tiene un: a) hexágono? b) decágono?

RPTA : a) Para $n = 6$: $n(n-3)/2 = 9$ diagonales.
b) Para $n = 10$: $n(n-3)/2 = 35$ diagonales.

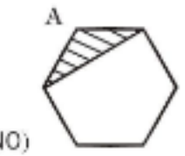
34. ¿Cuántos triángulos se determinan por los vértices de un octógono regular?

RPTA : Cada grupo de tres vértices determina un triángulo.
Así hay $(\,{}^{n}_{3}\,) = (\,{}^{8}_{3}\,) = 56$ triángulos.

35. ¿Cuántos triángulos se determinan por los vértices de un hexágono regular, si los lados del hexágono no van a ser lados de ningún triángulo?

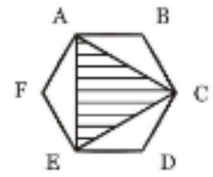
RPTA : Cada vértice (A) es el extremo de $6 - 4 = 2$ lados del hexágono que determinarán cada uno un triángulo ; y cada vértice (A) es extremo de 2 lados del hexágono que determinan un mismo triángulo.

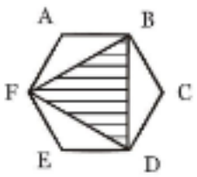
Y como hay 6 vértices, entonces se determinan:
$(\,{}^{6}_{3}\,) - 6(\,{}^{6-4}_{1}\,) - 6 = 2$ triángulos.



(NO)

En efecto,





son tales triángulos.

36. a) ¿Cuántos triángulos se determinan por los vértices de un polígono regular de n lados, si los lados del polígono no van a ser lados de ningún triángulo?
b) Resuelva la misma pregunta para el caso del Octógono ($n = 8$).

RPTA : a) $(\,{}^{n}_{3}\,) - n(\,{}^{n-4}_{1}\,) - n$. b) 16 triángulos.

4.5 PROBLEMAS DE NAIPES

La baraja de 52 cartas o naipes, a la que se le denomina un MAZO contiene 26 cartas con figuras de color ROJO y 26 cartas de color NEGRO.

Asimismo la baraja está compuesta de 4 grupos de 13 cartas cada uno, llamados PALOS. Cada palo consta de 13 cartas, a saber:

- Un AS, que toma el valor 1 y también el valor 14.
- Nueve cartas numeradas del 2 al 10,
- Un J, que tiene el valor 11 y se llama SOTA,
- Un Q, que tiene el valor 12 y se llama REINA,
- Un K, que tiene el valor 13 y se llama REY.

Los palos tienen nombres particulares:

COLOR	PALO
ROJO	CORAZONES (o COPAS) DIAMANTES (o COCOS, OROS)
NEGRO	ESPADAS TRÉBOLES (o FLORES, BASTOS)

EJEMPLO 1. Al repartir 5 cartas de un mazo normal de 52 naipes. ¿De cuántas maneras diferentes se puede conseguir:

a) Las 5 cartas? b) Rojas todas? c) Sólo Espadas?
d) Cuatro ASES ?
e) Un Póquer de ASES (Cuatro Ases y la quinta arbitraria) ?

SOLUCIÓN.- a) $\binom{52}{5}$, b) $\binom{26}{5}$, c) De $\binom{13}{5}$ maneras.

d) Como existen sólo cuatro ASES, *uno por cada palo*, a todo este subconjunto de **cuatro Ases** se le puede elegir de *una única manera*; la quinta carta puede ser elegida cualquiera de las 48 cartas restantes. Así se tendrán:

$\binom{4}{4} \cdot 48 = 48$ maneras. e) Igual que (d): 48 maneras.

EJEMPLO 2. Al repartir 5 cartas de un mazo normal de 52 naipes, ¿de cuántas maneras diferentes se puede conseguir:

a) Tres cartas de un palo y dos de otro?
b) Tres Reyes y un PAR (dos cartas de un mismo valor, distinto de 13)?
c) Un FULL (tres cartas de un valor y dos de otro) ?
d) Un PÓQUER (cuatro cartas de un mismo valor y la quinta arbitraria) ?

SOLUCIÓN.-

a) Primero seleccionamos un palo (de los 4 existentes); hecho esto, seleccionamos un subconjunto de tres cartas (de los 13) de este palo. Luego, seleccionamos el otro palo (de los 3 restantes), y hecho esto, seleccionamos un subconjunto de dos cartas (de los 13 existentes) de este palo, como por ejemplo: ♦ : {8, 2, 9} y ♥ : {4, 9}.

Así se obtienen $4\binom{13}{3} \cdot 3\binom{13}{2} = 267\,696$ maneras diferentes.

b) Seleccionamos tres de los cuatro 13's; en el par, seleccionamos primero uno de los 12 valores posibles distintos del valor 13, y hecho esto, elegimos un subconjunto de 2 cartas de las 4 existentes con este valor, de $\binom{4}{3} \cdot 12\binom{4}{2} = 288$ maneras diferentes.

c) {5, 5, 5, 8, 8}, como un caso particular; así, un FULL se puede conseguir de: $13\binom{4}{3} \cdot 12\binom{4}{2} = 3\,744$ maneras diferentes.

d) {2, 2, 2, 2, 9} como un caso particular; así, un PÓQUER se puede conseguir de: $13\binom{4}{4} \cdot 48 = 624$ maneras diferentes.

EJEMPLO 3. Al repartir 5 cartas de una baraja de 52 naipes, ¿de cuántas maneras se puede conseguir:

a) Un COLOR (Las cinco de un mismo palo)?
b) Dos PARES (Un par de un valor, un par de otro valor y la quinta de un valor distinto de los anteriores)?
c) Las 5 con valores distintos ?
d) Dos PARES, con el 8 y el 6 (la 5ta. con valor distinto a estos dos)?
e) Las 5 espadas, incluyendo el AS ? f) Un Full con el 5 y el 9 ?

SOLUCIÓN.-

a) Elegimos uno de los 4 palos y hecho esto, seleccionamos 5 cartas de este palo; todo esto de $4\binom{13}{5} = 5\,148$ maneras diferentes.

b) {3, 3, 7, 7, 9} = {7, 7, 3, 3, 9}: seleccionamos los valores de los 2 PARES, y hecho esto elegimos un grupo de 2 cartas de cada uno de estos valores. La quinta carta corresponde a un valor distinto. Así, esto se puede conseguir de $\binom{13}{2}\binom{4}{2}\binom{4}{2} \cdot 44 = 123\,552$ maneras diferentes.

c) Seleccionamos 5 de los 13 valores posibles; hecho esto elegimos una carta de cada uno de tales valores, de $\binom{13}{5} \cdot 4^5$ maneras diferentes.

d) $\{8, 8, 6, 6, 7\}$: $\binom{4}{2}\binom{4}{2} \cdot 44 = 1584$ maneras diferentes.

e) $\{1, 4, 5, 7, 9\}$: $1 \cdot \binom{12}{4} = 495$ maneras diferentes.

f) $\{5, 5, 5, 9, 9\}$ ó $\{9, 9, 9, 5, 5\}$: $2\binom{4}{3}\binom{4}{2} = 48$ maneras.

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. De una urna se extraen 2 de 10 cartas numeradas del 1 al 10. Hallar el número de maneras en que: a) Las dos cartas se sacan en conjunto.
   b) Se sacan una tras otra sin reposición.
   c) Se sacan las dos cartas una tras otra con reposición.

2. ¿De cuántas maneras se puede tomar una muestra del salario de 6 empleados, escogiéndolos entre un grupo de 50 empleados?

3. ¿De cuántas maneras podrá un entrenador seleccionar un equipo de 5 jugadores de baloncesto entre un grupo de 12 jugadores, si dos de ellos tienen que estar incluidos en la selección?

4. Un constructor vende casas y ofrece proveerlas de aire acondicionado, lavadoras, alfombras, aparatos musicales, refrigeradoras y garajes, como opciones complementarias. ¿De cuántas maneras puede vender las casas?

5. Se extraen 3 bolas de una bolsa que contiene 5 bolas rojas, 4 blancas y 3 negras, todas distinguibles entre sí. ¿De cuántas maneras puede hacerse esto si 2 de ellas deben ser rojas?

6. En una liga de fútbol hay 12 equipos. En un campeonato en el que un equipo juega contra otro una sola vez, ¿cuántos partidos se jugarán en total?

7. Un equipo médico consta de 2 médicos y 3 enfermeras. ¿Cuántos médicos pueden formarse de una lista de 6 médicos y 8 enfermeras disponibles?

8. Una librería tiene 7 ejemplares de la novela A, 4 ejemplares de la novela B y 5 ejemplares de la novela C. Además, tiene 3 ejemplares de una edición combinada de A y B, y 6 de la edición combinada de B y C. ¿De cuántas formas podemos comprar una selección de cada una de las 3 novelas?

9. En un club estudiantil hay 12 varones y 6 chicas. Se va a designar un grupo de 4 de ellos. ¿De cuántas maneras es posible hacer esto si siempre debe haber por lo menos 2 chicas en el grupo?

10. Una academia comercial ofrece 5 cursos: mecanografía, taquigrafía, contabilidad, mercadotecnia y publicidad. ¿De cuántas maneras podrá un estudiante tomar los cursos si se requiere matricularse cuando menos en 2 de ellos?

11. Se organizó un club con 20 estudiantes. a) ¿De cuántas maneras se pueden cubrir los cargos de Presidente, Secretario y Director de programas entre los 20 estudiantes. b) ¿De cuántas maneras se podrá formar un comité de tres miembros entre los estudiantes?

12. Cierta compañía publicitaria ofrece premios para varones o mujeres. Los varones pueden escoger 2 objetos entre 5 y las mujeres 3 objetos entre 6 ofrecidos y distintos a los anteriores. Hallar el número de maneras en que se pueden seleccionar los premios, sea el premiado varón o mujer.

13. ¿De cuántas maneras pueden guardarse 7 documentos en 3 archivadores rotulados A, B y C en ese orden, si en cada archivador debe guardarse el doble de documentos que en el anterior?

14. Dado el conjunto de letras $\{a, b, c, d, e, f, g, h\}$. a) ¿Cuántas combinaciones pueden formarse de 4 en 4 y estando la f en todas ellas?
    b) ¿Cuántas permutaciones tomadas de 4 en 4 pueden formarse, estando la letra f en todas ellas?

15. Una prueba consta de 10 preguntas para responder Falso o Verdadero. ¿De cuántas maneras diferentes puede un estudiante: a) Llenar la hoja de respuestas?
    b) Responder la prueba y obtener exactamente 8 respuestas correctas?
    c) Responder la prueba y obtener al menos 8 respuestas correctas?

16. De un equipo de 12 astronautas, 7 han volado al espacio exterior y 5 no. ¿De cuántas maneras diferentes se pueden seleccionar 4 miembros del equipo si al menos dos de ellos ya tienen experiencia en el espacio?

17. ¿De cuántas formas se pueden agrupar 7 niñas y 5 niños en dos equipos de 5 cada uno, si cada equipo debe incluir por lo menos a 2 niños?

18. ¿De cuántas formas se pueden agrupar 7 niñas y 5 niños en dos equipos de 6 cada uno, si cada equipo debe incluir por lo menos: a) 2 niños?, b) 1 niño?

19. ¿Cuántos comités de 4 integrantes se pueden formar con 3 estudiantes del 1er. año y con 7 estudiantes del 2do. año, si cada comité debe tener al menos dos estudiantes del 2do. año?

20. Se tienen 7 libros de Biología y 5 libros de Química. ¿De cuántas maneras puede una persona seleccionar 2 libros de Biología y 3 libros de Química y ordenarlos en un estante?

21. En una fiesta hay 12 varones. a) ¿De cuántas maneras se puede seleccionar a 8 de ellos para formar un grupo de baile? b) Se desea emparejar en el baile a 8 mujeres con 8 de los 12 varones. ¿De cuántas formas puede hacerse esto?

22. Con las letras del abecedario, 21 consonantes y 5 vocales, se desea formar "palabras" de 5 letras, de tal manera que cada palabra esté compuesta de 3 consonantes y 2 vocales alternadas. ¿Cuántas palabras se pueden formar?

23. Dados 10 puntos en el plano cartesiano: $A_1, A_2, \ldots, A_{10}$, y si no existen 3 de estos puntos que sean colineales,

    a) ¿Cuántos segmentos orientados determinan los 10 puntos?
    b) ¿Cuántas rectas distintas determinan los puntos?
    c) ¿Cuántos triángulos se pueden formar con dichos puntos?
    d) ¿Cuántos heptágonos se pueden formar con dichos puntos?
    e) ¿Cuántos triángulos tienen como lado el segmento $\overline{A_1 A_2}$?
    f) ¿Cuántos pentágonos tienen como vértice el punto A_8 ?

24. ¿Cuántas "palabras" de 8 letras pueden formarse con las letras de la palabra **INGENIERIA**, si deben contener las tres letras **I** y las dos **N** ?

25. ¿Cuál es el polígono regular cuyo número de diagonales es el DOBLE del número de lados?

26. ¿Cuál es el polígono regular cuyo número de diagonales es el TRIPLE del número de lados?

27. Al repartir 5 cartas de una baraja de 52 naipes, ¿De cuántas maneras diferentes se puede conseguir: a) Tres Ases con un par? b) Tres Ases, sin el cuarto As y sin otro par? c) Un trío, sin otro par? d) Un par? e) Un par de Ases?

28. Al repartir 5 cartas de una baraja de 52 naipes, ¿de cuántas maneras diferentes se puede conseguir: **a)** Una escalera del mismo palo: ESCALERA COLOR (números consecutivos de un mismo palo? **b)** Una escalera (números consecutivos no todos del mismo palo) ? **c)** Una escalera de flores (números consecutivos de flores? **d)** Una escalera Real (números consecutivos del mismo palo, incluyendo el As , pero con valor 14 .) ?
    e) Un BLACKJACK (en las primeras dos cartas: sale un As y una carta que puede ser un 10, un J , un Q o un K) ?

29. Al repartir 7 cartas de una baraja de 52 naipes, ¿de cuántas maneras diferentes se puede conseguir: **a)** Una escalera de cuatro cartas del mismo palo (el As vale tanto 1 como 14) y un trío ?
    b) Una escalera de tres cartas del mismo palo y cuatro del mismo valor?
    c) Tres cartas del mismo valor y cuatro de otro valor? , **d)** Cuatro Ases?

30. Hay 9 puntos en el espacio tales que no hay cuatro que estén en un mismo plano con excepción de cinco de ellos que están todos en un mismo plano; ¿Cuántos planos distintos quedan bien definidos con los nueve puntos?

31. Si en un campeonato de fútbol, donde cada equipo jugó contra todos los demás una vez, se jugaron 78 partidos en total, ¿cuántos equipos participaron?

32. Dos chicos y tres chicas van al cine y encuentran 5 asientos consecutivos libres en una misma fila donde quieren acomodarse. ¿De cuántas maneras distintas pueden sentarse si las 3 chicas no desean estar una al costado de la otra?

33. En una reunión hay 10 varones y 5 mujeres. Se va a formar un grupo de tres personas. ¿De cuántas maneras distintas puede hacerse si dicho grupo debe contener exactamente 2 mujeres?

34. Un palco de 4 asientos es vendido a 2 parejas. ¿De cuántas maneras diferentes se pueden acomodar si cada pareja desea estar junta?

35. ¿De cuántas maneras pueden colocarse en un estante 4 libros en español distintos y 1 en inglés, si el libro de inglés debe ocupar siempre la parte media, haciéndose la selección de un conjunto de 7 libros en español y 3 en inglés?

36. Un auto puede llevar 2 en el asiento delantero y 1 en el asiento de atrás. Si entre 8 sólo 2 conducen, ¿de cuántas maneras se puede llenar el auto?

37. Con ocho cuentas de colores diferentes, cuantos brazaletes distintos se pueden confeccionar ensartándolas todas?

38. Un coro consiste de 5 chicos y 5 chicas. ¿De cuántas maneras se pueden colocar **(a)** en una fila mirando al frente alternando chico y chica? , **(b)** en dos filas mirando hacia el frente con un chico detrás de una chica? , **(c)** en un anillos los chicos mirando al centro y las chicas de espalda al centro? , **(d)** en dos anillos concéntricos, ambos mirando al centro, un chico detrás de cada chica?

39. Cuatro viajeros llegan a un pueblo donde existen seis hoteles. ¿De cuántas maneras pueden hospedarse si **(a)** deben hacerlo en hoteles distintos cada uno de ellos? , **(b)** pueden hacerlo en cualquier forma? , **(c)** deben hacerlo todos juntos en algún hotel? , **(d)** en cada hotel hay dos habitaciones, considerando que los viajeros ocupan habitaciones diferentes?

40. Un bote de diez remos va tripulado por 10 personas A , B , C , D , E , F , G , H , I y J . Si la tripulación puede ubicarse de modo que a cada lado van 5 personas, calcular el número de maneras distintas en que **(a)** lo pueden hacer en cualquier disposición, **(b)** A , B , C , D y E deben remar a la izquierda y el resto a la derecha, **(c)** A , B , y C deben ubicarse a la derecha, F y G a la izquierda y el resto en cualquiera de las demás posiciones, **(d)** A rema en un lugar fijo de la derecha, F y G reman en cualquier lugar de la izquierda, y el resto en cualquier ubicación.

41. Cuatro señores, cuatro damas y cuatro niños en una reunión desean sentarse. Calcular el número de maneras distintas en que:
    (a) se sientan en una fila,
    (b) se sientan en una fila de modo que quede un señor junto a una dama, y los niños separados entre sí,
    (c) se sientan en una fila los señores juntos, las damas juntas y los niños juntos,
    (d) se sientan en una fila las damas juntas , los niños juntos y los señores indis-

tintamente,
(e) se sientan alrededor de una mesa circular,
(f) se sientan los señores juntos, las damas juntas, y los niños juntos alrededor de una mesa circular,
(g) se sientan los niños juntos alrededor de una mesa circular, y los señores y las damas con ubicación indistinta.

42. Diez personas van a sentarse en una mesa circular. Encontrar el número de colocaciones posibles si el anfitrión y la anfitriona van a sentarse opuestos uno al otro.

43. Cuatro parejas van a sentarse alrededor de una mesa circular. Encontrar el número de arreglos al sentarse si cada pareja desea estar junta.

44. Una heladería tiene helados en veinte sabores diferentes. ¿De cuántas maneras distintas puede una persona pedir un barquillo de 3 bolas con distintos sabores (a) si el orden de los sabores debe ser tomado en cuenta?, (b) si el orden de los sabores no interesa?

45. Una heladería tiene helados en veinte sabores diferentes. ¿De cuántas maneras distintas puede una persona pedir un barquillo de 3 bolas, en el que puede repetirse los sabores, **a)** si el orden de los sabores debe ser tomado en cuenta? , **b)** si el orden de los sabores no interesa pero sí se distinguen por la cantidad de bolas del mismo sabor?

46. Probar que el número total de *combinaciones* de n objetos distintos tomados en grupos de cualquier número de ellos es: $2^n - 1$.

47. ¿De cuántas maneras distintas puede Luisito invitar a por lo menos uno de 5 amiguitos del barrio a su fiesta de cumpleaños?

48. De un grupo de 12 fumadores y 16 no fumadores, dos sicólogos que trabajan en un programa de prevención de enfermedades cardíacas necesitan escoger 3 fumadores y 4 no fumadores para un estudio. ¿De cuántas maneras lo pueden hacer?

49. Una comisión de 5 personas va a ser conformada de un grupo de 12 caballeros y 8 damas. ¿De cuántas maneras diferentes puede hacerse **(a)** si la comisión debe consistir de 3 caballeros y 2 damas? , **(b)** si la comisión debe consistir de por lo menos 3 caballeros y 1 dama?

50. a) ¿De cuántas maneras pueden seleccionarse 13 cartas de una baraja normal de 52 ?, (b) ¿De cuántas maneras pueden seleccionarse estas 13 cartas si uno desea obtener 5 espadas, 3 corazones, 3 tréboles y 2 cocos?

51. Van a ser elegidos 4 delegados entre 8 miembros de un club. (a) ¿Cuántas elecciones son posibles?, (b) ¿Cuántas deben contener al miembro A? c) ¿Cuántas contienen a A o B pero no ambos?

52. "Manos" consistentes de 3 cartas son extraídas de una baraja normal de 52 cartas. Demuestre que la cantidad de manos posibles consistentes de 3 cartas con

distintos números es igual a 352 veces la cantidad de manos posibles consistentes de 3 cartas del mismo número.

53. ¿Cuántas sumas de dinero consistentes cada una de 3 ó más monedas pueden formarse de 6 monedas de distintos valores?

54. Encontrar el número de maneras distintas en que puede un librero vender 8 libros de diferentes tipos a 2 estudiantes, de modo que cada uno compre 4 libros.

55. ¿De cuántas maneras pueden distribuirse 6 libros distintos entre 3 niños si cada niño ha de obtener 2 libros?

56. Hallar el número de maneras en que pueden repartirse 11 personas en dos grupos de 5 y 6 miembros si una persona determinada de las 11 debe estar en el grupo más pequeño.

57. Encontrar el número de maneras de escoger 8 libros entre 10 libros de Matemática diferentes y 7 libros de Física diferentes si (a) 5 han de ser libros de Matemática; (b) 3 ó 4 han de ser libros de Física.

58. Encontrar el número de maneras de seleccionar 9 pelotas entre 6 pelotas rojas, 5 pelotas blancas y 4 pelotas azules, si cada selección consiste de 3 pelotas de cada color. Las pelotas del mismo color son distinguibles.

59. ¿De cuántas maneras pueden estar colocadas en fila 7 monedas horizontalmente sobre una mesa de modo que una o más caras queden mirando hacia arriba?

60. ¿Cuántas sumas de dinero pueden formarse con una moneda de 1 céntimo, una de 5 céntimos, una de 10 céntimos, una de 20 céntimos, una de 50 céntimos y otra de 1 sol?

61. Veinte personas están en una reunión. Si cada persona saluda con un apretón de manos a todos los asistentes, determine el número total de apretones de mano.

62. A una fiesta asistieron 20 parejas. Si cada persona saluda con un apretón de manos a todos los demás asistentes con excepción de su esposo o esposa, determinar el número total de apretones de mano.

63. En el juego de lotería METINKA se disponen 40 números del 1 al 40. Quince de estos números son elegidos como los números ganadores. Si una persona ha marcado 10 números en su cartilla, ¿de cuántas maneras puede la persona seleccionar únicamente 6 de los números ganadores?

64. Un cargamento de 20 máquinas de escribir contiene 5 defectuosas. ¿De cuántas maneras se pueden escoger 9 de estas máquinas de modo que
a) no esté incluida ninguna defectuosa?
b) estén incluidas exactamente dos defectuosas?

65. En un torneo de ajedrez se llegaron a realizar 45 partidas. Si cada participante jugó una sola vez con cada uno de los demás, ¿cuántos jugadores participaron?

66. Un grupo de 16 estudiantes van a conformar dos equipos de 10 y 6 estudiantes respectivamente. ¿De cuántas maneras se puede hacer esto?

67. Dieciséis profesionales, de los cuales 5 son mujeres, postulan a 6 puestos vacantes de una compañía. Si la compañía ha decidido contratar 2 mujeres y el resto varones, ¿de cuántas maneras distintas se puede hacer esto?

68. Un profesor de geología tiene 5 silicatos, 7 piritas y 8 cuarzos en su colección de minerales. Él coge 6 de estas piedras para que un estudiante las analice. ¿De cuántas maneras diferentes se puede tener en este grupo:
(a) 2 silicatos, 1 pirita y 3 cuarzos?
(b) 2 silicatos? (c) 2 silicatos y 3 piritas?

69. Ocho personas están en un picnic y sus edades son: $15, 5, 20, 2, 7, 30, 40$ y 23 años. ¿De cuántas maneras diferentes se puede tener un grupo de 3 de ellos cuyas edades combinadas excedan de 27 años?

70. En un grupo de 8 objetos hay exactamente 3 defectuosos y 5 que no lo son. Tomando una muestra de tres objetos, ¿de cuántas maneras se puede obtener:
(a) los 3 defectuosos? (b) Los tres perfectos? (c) 2 perfectos y 1 defectuoso? (d) 2 defectuosos y 1 perfecto?

71. Cinco libros de Matemática diferentes, cuatro de Física diferentes y 2 libros de Historia diferentes van a colocarse en un estante con los libros sobre cada tema juntos. Dar el número de maneras en que pueden ser colocados.

72. Cinco copias de un libro de Matemáticas, cuatro copias de uno de Física, y cuatro copias de uno de Historia Universal van a colocarse en un estante. Si las cubiertas son de colores diferentes para cada clase de libro, ¿cuántas maneras distintas de colocar los libros existen?

73. ¿De cuántas maneras es posible para 10 clientes comprar 5 latas de miel, 3 latas de piña y 2 latas de tomate, si cada cliente adquiere una lata?

74. Encontrar el número de maneras en que pueden distribuirse entre 12 niños: 2 monedas de 50 céntimos, 4 de 1 sol, y 6 de 2 soles, si cada uno recibe una moneda.

75. ¿Cuántas sumas de dinero diferentes se puede obtener si se posee cinco billetes tales que (a) todos son del mismo valor?, (b) todos tienen distinto valor: $5, 10, 20, 50$ y 100 nuevos soles?

76. Ocho amigos deciden postular a la UNI. Luego del examen de admisión se enteran que al menos uno logró ingresar pero no su nombre. (a) ¿Cuántas maneras distintas hay de indicar quiénes pudieron haber ingresado?, (b) ¿De cuántas maneras distintas se puede hacer el orden de méritos de los que pudieron haber ingresado, si no existe igualación de puntajes?

77. En una reunión, después de que cada uno de los asistentes saludó a los restantes, se realizaron 66 salutaciones distintas en total. Halle el número de personas presentes en la reunión si: **(a)** entre ellos se saludaron sólo una vez,
(b) por equivocación hubieron 21 salutaciones repetidas,
(c) hubieron 15 personas que no se saludaron entre sí.

78. Hay 3 manzanas, 4 peras y 2 naranjas. ¿De cuántas maneras se pueden elegir 3 frutas, en las que debe haber al menos una manzana? Asumir que las frutas del mismo tipo son distinguibles entre sí.

79. ¿Cuántas comisiones distintas de dos o más miembros pueden ser conformados de un grupo de 10 personas?

80. Sea A el número de selecciones de fruta que puede hacerse de 3 duraznos, 4 manzanas y 2 naranjas, tomando cuando menos una de cada clase, y sea B el número de permutaciones que pueden formarse con las letras de la palabra **CUADERNO** de modo que comiencen con C y terminen con O. Si las frutas de la misma clase son distinguibles entre sí, halle la suma $A + B$.

CLAVE DE RESPUESTAS

1. a) $\binom{10}{2} = 45$, b) $10 \cdot 9 = 90$, c) $10 \cdot 10 = 100$, **(2)** $\binom{50}{6}$

3) $\binom{10}{3}$, **(4)** $\binom{6}{0} + \binom{6}{1} + \binom{6}{2} + \binom{6}{3} + \binom{6}{4} + \binom{6}{5} + \binom{6}{6} = 2^6 = 64$

5. {R, R, N o B}: $\binom{5}{2} \cdot \binom{7}{1} = 10 \cdot 7 = 70$ maneras.

6. $\binom{12}{2} = 66$, **(7)** $\binom{6}{2} \cdot \binom{8}{3} = 840$

8. Existen: 7A, 4B, 5C, 3AB, 6BC, entonces se pueden comprar de
$\binom{7}{1}\binom{4}{1}\binom{5}{1} + \binom{7}{1}\binom{6}{1} + \binom{5}{1}\binom{3}{1} = 197$ formas.

9. $\binom{6}{2}\binom{12}{2} + \binom{6}{3}\binom{12}{1} + \binom{6}{4} = 1215$ maneras posibles.

10. $\binom{5}{2} + \binom{5}{3} + \binom{5}{4} + \binom{5}{5} = 26$, **(11)** a) 6840, b) $\binom{20}{3}$

12. $\binom{5}{2} + \binom{6}{3} = 30$, **(13)** $\binom{7}{1} + \binom{6}{2} + \binom{4}{4} = 105$ maneras.

14. a) $\binom{1}{1}\binom{7}{3} = 35$, b) $3!\binom{1}{1}\binom{7}{3} = 210$ permutaciones.

15. a) $2^{10} = 1024$, b) $\binom{10}{8}$, c) $\binom{10}{8} + \binom{10}{9} + \binom{10}{10} = 56$

16. $\binom{7}{2}\binom{5}{2} + \binom{7}{3}\binom{5}{1} + \binom{7}{4}$, **(17)** $\binom{5}{2}\binom{7}{3} \cdot [\binom{3}{2}\binom{4}{3} + \binom{3}{3}\binom{4}{2}]$

18. a) $\{2V, 2D\}$ y $\{3V, 3D\}$: $\binom{5}{2}\binom{7}{4} \cdot \binom{3}{3}\binom{3}{3} = 350$ formas

b) $\{1V, 5D\}$ y $\{4V, 2D\}$: $\binom{5}{1}\binom{7}{5} \cdot \binom{4}{4}\binom{2}{2} = 350$ formas

19. $\binom{3}{2}\binom{7}{2} + \binom{3}{1}\binom{7}{3} + \binom{7}{4} = 203$, **(20)** $\binom{7}{2}\binom{5}{3}5! = 25\,200$

21. a) $\binom{12}{8}$, b) $\binom{12}{8}8^2$

22. Primero seleccionamos los grupos de 3 consonantes y los de 2 vocales, y luego los ordenamos alternadamente: **C V C V C**,

$$\binom{21}{3}\binom{5}{2}3!2! \quad \text{o también} \quad P_3^{21} \cdot P_2^5 = 159\,600$$

23. a) $P_2^{10} = 90$, b) $\binom{10}{2} = 45$, c) $\binom{10}{3}$, d) $\binom{10}{7}$, e) $\binom{8}{1}$, f) $\binom{9}{4}$

24. En total se dispone de: I, I, I, N, N, E, E, G, R, A.

a) Si no contienen ninguna E: $a = 8!/(3!2!) = 3360$ palabras

b) Si contienen una sola E: como I, I, I, N, N, E * *,

$b = \binom{8}{3}\binom{5}{2}\binom{3}{1} \cdot P_2^3$ o también $\binom{3}{2}[8!/(3!2!)] = 10\,080$

c) Si contienen las dos E: como I, I, I, N, N, E, E *,

$c = \binom{8}{3}\binom{5}{2}\binom{3}{2} \cdot P_1^3$ o también $\binom{3}{1}[8!/(3!2!2!)] = 5040$

$\therefore$ INCÓGNITA: $a + b + c = 18\,480$ "palabras".

25. $n = 7$, **26.** $n = 9$

27. a) $\{1, 1, 1, 6, 6\}$: $\binom{4}{3} \cdot 12\binom{4}{2} = 288$

b) $\{1, 1, 1, 3, 5\}$: $\binom{4}{3}\binom{12}{2}(4)(4)$. O también, quitando todos los pares distintos del "1": $\binom{4}{3}\left[\binom{48}{2} - 12\binom{4}{3}\right]$

c) $\{5, 5, 5, 3, 2\}$: $13\binom{4}{2} \cdot \binom{12}{2}(4)(4)$. O también, quitando todos los pares distintos al del trío: $13\binom{4}{3}\left[\binom{48}{2} - 12\binom{4}{2}\right]$

d) $\{7, 7, 9, 3, 4\}$: $13\binom{4}{2}\binom{12}{3}4^3$; **(e)** $\binom{4}{2}\binom{12}{3}4^3$

28. a) $\{1,2,3,4,5\}, \ldots, \{9,10,11,12,13\}, \{10,11,12,13,\overset{14}{1}\}$
Así, hay $4(10)(1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1) = 40$ maneras.

b) Sustrayendo las escaleras del mismo palo, se puede conseguir de
$10(4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4) - 40 = 10 \cdot 4^5 - 40 = 10\,200$ maneras.

c) Solo 10 maneras; **(d)** 4 solamente, una por cada palo.

e) Un Blackjack: de $\binom{4}{1}\binom{16}{1} = 64$ maneras.

29. a) $\{1,2,3,4,1,1,1\}$ ó $\{1,2,3,4,6,6,6\}$: Se obtienen de
$4 \cdot 11 \cdot [4 + 9\binom{4}{3}] = 1760$ maneras diferentes.

b) $\{1,2,3,5,5,5,5\}$: De $4 \cdot 12 \cdot 10 = 480$ maneras.

c) $13\binom{4}{3}12\binom{4}{4} = 624$; **(d)** $\binom{4}{4}\binom{48}{3} = 17\,296$ maneras.

30. $1 + \binom{4}{3} + 5\binom{4}{2} + 4\binom{5}{2} = 75$ planos distintos.

31. $\binom{n}{2} = 78 \Rightarrow n = 13$. **(32).** CVCVC: $3!2! = 12$ maneras.

33. $\{2M, 1V\}$: $\binom{5}{2}\binom{10}{1} = 10 \cdot 10 = 100$ maneras.

34.

PAREJA 1		PAREJA 2	
A_1	B_1	A_2	B_2

: $2!(2!2!) = 8$,

35. $P_4^7 \cdot 3 = 2520$ **(36).** $2 \cdot P_2^7 = 84$

37. $(n-1)!/2 = 2520$ **(38).** a) $2 \cdot (5!5!) = 28\,800$

38. b) $5!5! = 14\,400$, c) $9! = 362\,880$, d) $4!5! = 2880$

39. a) $P_4^6 = 360$, b) $6^4 = 1296$, c) $P_1^6 = 6!/5! = 6$

d) Es como si existieran 12 habitaciones posibles de ser ocupadas, cada una por un viajero a lo más: $P_4^{12} = 12!/8! = 11\,880$

40. a) $10!$, b) $5!5!$, c) $3!2!5!$, d) $P_2^5 \cdot 7! = (5 \times 4) \cdot 7!$.

41. a) $12!$, b) $2[(4!4!) \cdot 2 \cdot 4!] = 55\,296$, c) $3![4!4!4!]$

d) $6![4!4!]$, e) $11!$, f) $2!(4!)^3$, g) $8!4!$

42. $8!$, **(43)** $3!(2!2!2!) \cdot 2! = 96$

44. a) $P_3^{20} = 18 \times 19 \times 20 = 6840$, b) $\binom{20}{3} = 1140$

45. a) a1) Las 3 bolas de distintos sabores: $P_3^{20} = 6840$

a2) Dos bolas de un mismo sabor y la tercera de otro sabor:

$$P_2^{20} \cdot \frac{3!}{2!} = (19 \times 20) \cdot 3 = 1140$$

o a3) Las 3 bolas del mismo sabor: $P_1^{20} = 20$

$\therefore$ Sumando (a1) + (a2) + (a3): $6840 + 1140 + 20 = 8000$

b) $\binom{20}{3} + 2 \cdot \binom{20}{2} + \binom{20}{1} = 1540$ maneras distintas.

46. Cada uno de los n objetos tiene 2 opciones: *de ser elegido o de no serlo*. Entonces hay $\underline{2}\times\underline{2}\times\underline{2}\times\ \dots\ \times\underline{2} = 2^n$ ($1^o\ 2^o\ 3^o \dots n^o$)

maneras de elegir grupos de al menos un elemento del conjunto o de no elegir ninguno. Esto también equivale a obtener la suma de todas las combinaciones posibles de los n objetos en grupos de: *ninguno* (conjunto vacío), *de uno, de dos, de tres, ... , o de* n de tales objetos, es decir:

$$2^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \dots + \binom{n}{n}$$

Luego, excluyendo el grupo vacío $(\varnothing)$ que no contiene ninguno de los objetos, representado por el término $\binom{n}{0} = 1$, el número total de combinaciones tomadas de al menos uno de los n objetos es: $\boxed{2^n - 1}$.

47. $\binom{5}{1} + \binom{5}{2} + \binom{5}{3} + \binom{5}{4} + \binom{5}{5} = 2^5 - 1 = 31$ maneras distintas.

48. $\binom{12}{3}\binom{16}{4} = 400\,400$. **(49)**. a) $\binom{12}{3}\binom{8}{2} = 6160$

49. b) $\{3C, 2D\}$ o $\{4C, 1D\}$: $\binom{12}{3}\binom{8}{2} + \binom{12}{4}\binom{8}{1} = 10120$

50. a) $\binom{52}{13}$, b) $\binom{13}{5}\binom{13}{3}\binom{13}{3}\binom{13}{2}$, **(51)**. a) $\binom{8}{4} = 70$

51. b) $1\cdot\binom{7}{3} = 35$, c) $1\cdot\binom{6}{3} + 1\cdot\binom{6}{3} = 2\cdot\binom{6}{3} = 40$

52. A = Cantidad de posibles manos de 3 cartas con distintos números

$= \binom{13}{3}4^3 = \frac{1}{3!}\binom{13}{1}\binom{4}{1}\cdot\binom{12}{1}\binom{4}{1}\cdot\binom{11}{1}\binom{4}{1}$ (3 7 8 = 7 3 8)

$A = 18\,304$

B = Cantidad de manos posibles de 3 cartas del mismo número $= 13\binom{4}{3} = 52$

De estos valores vemos que: $A = 18\,304 = 352 \times 52 = 352\cdot B$

53. $2^6 - \binom{6}{0} - \binom{6}{1} - \binom{6}{2} = 42$, **(54)**. $\binom{8}{4}\binom{4}{4} = 70$

55. $6!/[\,2!2!2!\,] = 90$, **(56)**. $1\cdot\binom{10}{4}\binom{6}{6} = 210$

57. a) $\binom{10}{5}\binom{7}{3} = 8\,820$, b) $\binom{7}{3}\binom{10}{5} + \binom{7}{4}\binom{10}{4} = 16170$

58. $\binom{6}{3}\binom{5}{3}\binom{4}{3} = 800$, **(59)**. $2^7 - 1 = 127$ (Por complementación)

60. $\binom{6}{1} + \binom{6}{2} + \dots + \binom{6}{6} = 2^6 - 1 = 63$, **(61)**. $\binom{20}{2} = 190$

62. $\binom{40}{2} - 20 = 760$, **(63)**. $\binom{25}{4}\binom{15}{6} = 69\,069\,000$ maneras

64. a) $\binom{15}{9} = 5\,005$, b) $\binom{15}{7}\binom{5}{2} = 64\,350$

65. $\binom{n}{2} = 45 \Rightarrow n(n-1) = 90 \Rightarrow n = 10$,

66. $\binom{16}{10}\binom{6}{6} = 8\,008$, **(67)** $\binom{5}{2}\binom{11}{4} = 3300$,

68. a) $\binom{5}{2}\binom{7}{1}\binom{8}{3} = 3920$, b) $\binom{5}{2}\binom{15}{4}$, c) $\binom{5}{2}\binom{7}{3}\binom{8}{1} = 2800$

69. Colocando en orden creciente: 2, 5, 7, 15, 20, 23, 30 y 40

a) Si se incluye al de 2 años: $\binom{7}{2} - 4 = 17$

b) Si se incluye al de 5 años y no al de 2 : $\binom{6}{2} - 1 = 14$

c) No se incluye ni al de 2 años ni al de 5 años: $\binom{6}{3} = 20$

$\therefore$ Sumando (a) + (b) + (c) : $17 + 14 + 20 = \underline{51}$.

70. a) $\binom{3}{3} = 1$, b) $\binom{5}{3} = 10$, c) $\binom{5}{2}\cdot\binom{3}{1}$, d) $\binom{5}{1}\cdot\binom{3}{2} = 15$

71. $3!\,5!\,4!\,2!$, **(72)**. $13!/(5!\,4!\,4!) = 90\,090$, **(73)**. $10!/(5!\,3!\,2!)$

74. $12!/(2!\,4!\,6!) = 13\,860$ maneras distintas.

75. a) 1 bill., 2 bill., 3 bill., 4 bill., 5 bill. : 5 Sumas distintas

b) $\binom{5}{1} + \binom{5}{2} + \binom{5}{3} + \binom{5}{4} + \binom{5}{5} = 2^5 - 1 = 31$ Sumas distintas

76. a) $\binom{8}{1} + \binom{8}{2} + \dots + \binom{8}{8} = 2^8 - 1 = 255$

b) $P_1^8 + P_2^8 + \dots + P_8^8 = 109\,600$

77. a) $\binom{n}{2} = 66 \Rightarrow n = 12$ personas, b) $\binom{m}{2} = 66 - 21 = 45 \Rightarrow$

$m = 10$ personas, **c)** $66 + \binom{15}{2} = 171 = \binom{n}{2}$ salutaciones

$\Rightarrow n(n-1) = 342$, de donde resulta: $n = 19$ personas.

78. En el grupo puede haber 1, 2 ó las 3 manzanas:

$\binom{3}{1}\binom{6}{2} + \binom{3}{2}\binom{6}{1} + \binom{3}{3} = 64$. O por complementación, quitando los grupos de tres frutas donde NO HAY ninguna manzana: $\binom{9}{3} - \binom{6}{3} = 64$.

79. $\binom{10}{2} + \binom{10}{3} + \dots + \binom{10}{10} = 2^{10} - \binom{10}{0} - \binom{10}{1} = 2^{10} - 11 = 1013$.

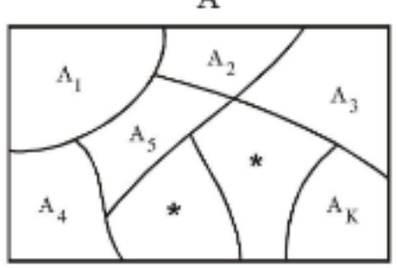
80. D M N $A = (2^3 - 1)(2^4 - 1)(2^2 - 1) = 315$

$B = 6! = 720$ $\therefore$ $A + B = 1035$.

5. PARTICIONES ORDENADAS Y NO ORDENADAS

5.1 PARTICIÓN DE UN CONJUNTO

Se denomina **PARTICIONAR UN CONJUNTO A DE n ELEMENTOS** (ú objetos) a dividirlo en varios subconjuntos ***disjuntos*** $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_k$, llamados **CÉLULAS**, cuya reunión coincide con todo el conjunto inicial A.



Así, la colección de estos subconjuntos A_i satisface las dos condiciones siguientes:

(1) Los subconjuntos A_i son disjuntos dos a dos:

$$A_i \cap A_j = \varnothing \ , \ i \neq j$$

(2) La **UNIÓN** de todos ellos reproduce el conjunto A:

$$A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \ldots \cup A_k = A$$

NOTA .- Alguno(s) de estos subconjuntos A_i puede ser el conjunto vacío $\varnothing$.

5.2 DEFINICIÓN .- Se denomina **PARTICIÓN DE UN CONJUNTO A** a toda colección de subconjuntos $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_k$ del conjunto A:

$$\{ A_1, A_2, A_3, \ldots, A_k \} ,$$

que son ***disjuntos dos a dos y la unión de todos ellos es igual al conjunto inicial*** A. Es decir, los A_i cumplen las condiciones (1) y (2) previas.

EJEMPLO 1 .- Dado el conjunto $A = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$, una **PARTICIÓN DE A** en 4 células A_1, A_2, A_3 y A_4 es:

- $\{\{1,2\}, \{3,4,5\}, \{6\}, \{7,8,9,10\}\}$
  $\quad A_1 \quad A_2 \quad A_3 \quad A_4$

  pues los 4 subconjuntos indicados son disjuntos dos a dos y su (re)unión es igual al conjunto dado A. Sin embargo, no es la única partición de A. Otras particiones son:

- $\{\{1,2,3\}, \{4,5,6\}, \{7,8\}, \{9,10\}\}$
  $\quad A_1 \quad A_2 \quad A_3 \quad A_4$

- $\{\{8,9\}, \{5,4,2\}, \{7,6,10\}, \{3\}, \{1\}\}$
  $\quad A_1 \quad A_2 \quad A_3 \quad A_4 \quad A_5$

- $\{\varnothing, \{1\}, \{2,3\}, \{4,10\}, \{8,6\}, \{9\}, \{7,5\}\}$
  $\quad A_1 \quad A_2 \quad A_3 \quad A_4 \quad A_5 \quad A_6 \quad A_7$

NOTA .- Debido a que una **CÉLULA** A_i es un subconjunto de A el orden de los elementos ***dentro de una célula no interesa***.

EJEMPLO 2 .- Consideremos el conjunto $A = \{1,2,3,4,5\}$ y todas las Particiones de A en 2 CÉLULAS A_1 y A_2 en las que la primera célula (subconjunto) A_1 contenga 3 elementos y la segunda célula A_2 contenga 2 *elemenios*:

$\{\{1,2,3\},\{4,5\}\}, \{\{1,2,4\},\{3,5\}\}, \{\{1,2,5\},\{3,4\}\}$
$\{\{1,3,4\},\{2,5\}\}, \{\{1,3,5\},\{2,4\}\}, \{\{1,4,5\},\{2,3\}\}$
$\{\{2,3,4\},\{1,5\}\}, \{\{2,3,5\},\{1,4\}\}, \{\{2,4,5\},\{1,3\}\}$
$\{\{3,4,5\},\{1,2\}\}$.

Vemos que hay en total (10) maneras distintas de obtener una PARTICIÓN de un conjunto de $N = 5$ objetos en 2 subconjuntos (células) que contengan $n_1 = 3$ elementos en la PRIMERA CÉLULA y $n_2 = 2$ elementos en la SEGUNDA CÉLULA.

Este número de particiones también se obtiene mediante las COMBINATORIAS; así el número de maneras de obtener un primer subconjunto A_1 conteniendo $n_1 = 3$ elementos de un total de $n = 5$ es: $\binom{5}{3}$, y una vez obtenido y puesto que quedan 2 elementos en el conjunto inicial, el número de maneras de obtener un segundo subconjunto A_2 que contenga $n_2 = 2$ elementos es: $\binom{2}{2}$.

Por lo tanto, el número total de maneras distintas de obtener una PARTICIÓN de un conjunto A que tiene 5 elementos, en 2 células la primera A_1 con 3 elementos y la segunda A_2 con 2 elementos es el producto:

$$\binom{5}{3} \cdot \binom{2}{2} = \binom{5}{3,2} = \frac{5!}{3!\,2!} = 10 .$$

NOTA .- A este tipo de particiones donde se exige que *la primera célula* A_1 contenga 3 elementos y *la segunda célula* A_2 contenga 2 elementos se les denomina **PARTICIONES ORDENADAS**, y se les denota:

$(\{1,2,3\},\{4,5\}),(\{1,2,4\},\{3,5\})$, etc.,

como en los pares ordenados. Sin embargo, dentro de cada célula A_1 y A_2 el orden en que se presentan los elementos no interesa.

EJEMPLO .- Calcularemos el número de **PARTICIONES ORDENADAS** de un conjunto con $n = 10$ elementos $A = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$ en 4 células A_1, A_2, A_3, A_4 de modo que:

la primera célula A_1 contenga $n_1 = 2$ elementos ,
la segunda célula A_2 contenga $n_2 = 2$ elementos ,
la tercera célula A_3 contenga $n_3 = 5$ elementos ,
la cuarta célula A_4 contenga $n_4 = 1$ elemento .

SOLUCIÓN .-

La primera célula A_1 puede ser elegida de $\binom{10}{2}$ maneras distintas.

Una vez fijada ésta , como se disponen de 8 elementos , la segunda célula A_2 puede ser elegida de $\binom{8}{2}$ maneras distintas.

Una vez fijada esta segunda célula, y como se disponen de 6 elementos en A , la tercera célula A_3 puede ser elegida de $\binom{6}{5}$ maneras distintas.

Fijada esta tercera célula y quedando 1 solo elemento disponible en A , la cuarta célula A_4 puede ser elegida de $\binom{1}{1}$ manera.

Por lo tanto, el número total de PARTICIONES ORDENADAS distintas de A que se pueden formar con las condiciones exigidas es el producto :

$$\binom{10}{2}\binom{8}{2}\binom{6}{5}\binom{1}{1} = \frac{10!}{2!\,2!\,5!\,1!} = \binom{10}{2,2,5,1} = 7\,560 .$$

5.3 OBSERVACIÓN .- Con las condiciones requeridas en el ejemplo previo note que las particiones:

$$(\{1,2\},\{3,4\},\{5,6,7,8,9\},\{10\})$$
y $$(\{3,4\},\{1,2\},\{5,6,7,8,9\},\{10\})$$

representan DOS PARTICIONES ORDENADAS DISTINTAS de A , *pero* representan una misma PARTICIÓN *propiamente dicha* como corresponde a la Definición [5.2], a saber: $\{\{1,2\},\{3,4\},\{5,6,7,8,9\},\{10\}\}$

5.4

TEOREMA .- Dado un conjunto A con N elementos, el número de PARTICIONES ORDENADAS de A *en* k *células* de la forma:

$$(A_1, A_2, \ldots, A_K)$$

donde *la primera célula* A_1 contiene n_1 elementos, *la segunda célula* A_2 contiene n_2 elementos , . . . , y la *k–ésima célula* A_k contiene n_k elementos, está dado por el *número multinomial*:

$$\binom{N}{n_1, n_2, \ldots, n_k} = \frac{N!}{n_1!\; n_2! \ldots n_k!}$$

donde $n_1, n_2, \ldots, n_k$ son enteros positivos que satisfacen la relación $n_1 + n_2 + \ldots + n_k = N$.

OBSERVACIÓN .-

$$\binom{N}{n_1, n_2, \ldots, n_k} = \binom{N}{n_1}\binom{N-n_1}{n_2}\binom{N-n_1-n_2}{n_3}\ldots\binom{N-n_1-n_2-\ldots-n_{k-1}}{n_k}$$
$$= \frac{N!}{n_1!\; n_2! \ldots n_k!} .$$

EJEMPLO 4. ¿De cuántas maneras distintas se pueden distribuir 12 juguetes diferentes entre 4 niños, si el menor debe recibir 5 juguetes, el que le sigue 3 juguetes y los dos mayores 2 juguetes cada uno?

SOLUCIÓN .- NIÑOS (A, B, C, D), Particiones Ordenadas. Del Teorema [5.4]:

$$\binom{12}{5}\cdot\binom{7}{3}\cdot\binom{4}{2}\cdot\binom{2}{2} = \binom{12}{5,3,2,2} = \frac{12!}{5!\,3!\,2!\,2!} = 166\,320 \text{ maneras}$$

Note que: $5 + 3 + 2 + 2 = 12 = N$.

EJEMPLO 5. En un hotel, ¿de cuántas maneras se pueden distribuir 9 turistas en 1 habitación triple y 3 habitaciones dobles?

SOLUCIÓN .- El número total de Particiones Ordenadas: $(\{3\},\{2\},\{2\},\{2\})$ del conjunto de 9 turistas en 4 habitaciones A (triple) y B , C y D (dobles) es

$$\binom{9}{3}\binom{6}{2}\binom{4}{2}\binom{2}{2} = \binom{9}{3,2,2,2} = \frac{9!}{3!\,2!\,2!\,2!} = 7\,560 \text{ maneras.}$$

EJEMPLO 6. ¿De cuántas maneras distintas pueden repartirse 6 libros de cuentos, diferentes, entre 3 niños en forma equitativa?

SOLUCIÓN .- NIÑOS A , B y C , LIBROS : L1 , L2 , ... , L6 . A cada niño le corresponde 2 libros. El número total de **PARTICIONES ORDENADAS** de la forma

$$(\underset{A}{\{2\}},\underset{B}{\{2\}},\underset{C}{\{2\}}) \quad \text{es:} \quad \binom{6}{2,2,2} = \frac{6!}{2!\,2!\,2!} = \binom{6}{2}\binom{4}{2}\binom{2}{2} = 90$$

EJEMPLO 7. ¿De cuántas maneras pueden 6 estudiantes E1, E2, ... , E6 formar grupos que contengan 2 estudiantes cada uno?

SOLUCIÓN .- A diferencia del EJEMPLO [6] , aquí las Particiones Ordenadas (distintas) : $(\{E1,E2\},\{E3,E4\},\{E5,E6\})$

y $(\{E3,E4\},\{E1,E2\},\{E5,E6\})$

corresponden a la misma PARTICIÓN : $(\{E1,E2\},\{E3,E4\},\{E5,E6\})$ por contener los mismos 3 grupos.

Y puesto que cada partición como ésta corresponde a $3! = 6$ *particiones ordenadas distintas con los mismos grupos*, de 2 estudiantes cada uno, es que existen

$$\frac{1}{3!}\binom{6}{2,2,2} = \frac{1}{3!}\,\frac{6!}{2!\,2!\,2!} = 15$$

PARTICIONES NO ORDENADAS o maneras de repartir 6 estudiantes en 3 grupos de 2 estudiantes cada uno, *sin importar el orden entre estos grupos.*

NOTA .- Se llaman **PARTICIONES NO ORDENADAS** , tales como las referidas en el EJEMPLO [7] , a las PARTICIONES ***propiamente dichas*** de la Def. [5.2].

5.5 COROLARIO (PARTICIONES NO ORDENADAS o simplemente PARTICIONES)

Sea A un conjunto de N objetos distintos y sean $n_1 , n_2 , \dots , n_k$ enteros ≥ 1 tales que $n_1 + n_2 + \dots + n_k = N$.

Consideremos las PARTICIONES (es decir, PARTICIONES NO ORDENADAS) de A en $\underline{k}$ subconjuntos o grupos: $\{A_1 , A_2 , \dots , A_k\}$ (*)

donde A_1 contiene n_1 elementos , A_2 contiene n_2 elementos , ... , y A_k contiene n_k elementos , **ENTONCES** :

I) Si todos los subconjuntos (grupos) tienen distintas cantidades de elementos, es decir, ***si todos los enteros*** $n_1, n_2, \dots , n_k$ son ***distintos*** , el **NÚMERO DE PARTICIONES NO ORDENADAS** del conjunto A en $\underline{k}$ subconjuntos de la forma (*) está dado por:

$$\binom{N}{n_1, n_2, \dots , n_k} = \frac{N!}{n_1!\,n_2!\,\dots\,n_k!}$$

y coincide precisamente con el NÚMERO DE PARTICIONES ORDENADAS de A en $\underline{k}$ subconjuntos del tipo antes mencionado.

II) Si p enteros del conjunto $\{n_1 , n_2 , \dots , n_k\}$ son iguales entre sí y distintos de los demás (por ejemplo , $p = 3$ si $n_2 = n_3 = n_5 = 4$) mientras que el resto de los enteros son todos distintos entre sí, el **NÚMERO DE PARTICIONES NO ORDENADAS** del conjunto A en $\underline{k}$ subconjuntos de la forma (*) está dado por:

$$\frac{1}{p!}\binom{N}{n_1, n_2, \dots , n_k} = \frac{1}{p!}\cdot\frac{N!}{n_1!\,n_2!\,\dots\,n_k!}$$

III) Si hay p enteros iguales entre sí y distintos de los demás, y si hay otros q enteros iguales entre sí y distintos de los demás, mientras que el resto de enteros en el conjunto $\{n_1 , n_2 , \dots , n_k\}$ son distintos entre sí , el **NÚMERO DE PARTICIONES NO ORDENADAS** del conjunto A en $\underline{k}$ subconjuntos de la forma (*) está dado por:

$$\frac{1}{p!\,q!}\binom{N}{n_1, n_2, \dots , n_k} = \frac{1}{p!\,q!}\cdot\frac{N!}{n_1!\,n_2!\,\dots\,n_k!}$$

IV) El resultado de (III) se puede extender a tres o más grupos de $p , q , r , \dots$ enteros tomados del conjunto $\{n_1 , n_2 , \dots , n_k\}$ con las características de la parte (III).

EJEMPLO 8. ¿De cuántas maneras 12 estudiantes pueden repartirse (a) En 3 grupos de 3 , 4 y 5 estudiantes? , (b) En 4 grupos de 3 estudiantes cada uno? (c) En 5 grupos de modo que 2 de ellos contengan 3 estudiantes cada uno y los otros 3 grupos contengan 2 estudiantes cada uno?

(d) En 6 grupos tales que 2 de ellos contengan 2 estudiantes cada uno, otros 2 que contengan 3 estudiantes cada uno, y otros 2 grupos de 1 estudiante cada uno?

SOLUCIÓN

Como se trata de PARTICIONES NO ORDENADAS entonces

a) $\binom{12}{3,4,5} = \frac{12!}{3!\,4!\,5!} = 27\,720$, b) $\frac{1}{4!}\binom{12}{3,3,3,3} = \frac{12!}{4!\,3!\,3!\,3!\,3!}$

c) $\frac{1}{2!\,3!}\binom{12}{3,3,2,2,2} = \frac{1}{2!\,3!}\cdot\frac{12!}{3!\,3!\,2!\,2!\,2!} = 138\,600$

d) $\frac{1}{2!\,2!\,2!}\binom{12}{2,2,3,3,1,1} = 415\,800$

EJEMPLO 9. ¿De cuántas maneras se pueden agrupar 10 miembros de un club en tres comités de 3, 3 y 4 miembros respectivamente?

SOLUCIÓN

Se trata de PARTICIONES NO ORDENADAS. Y como el orden en que aparecen los 2 grupos de 3 miembros cada uno *no interesa*, se tienen

$$\frac{1}{2!}\binom{10}{3,3,4} = \frac{10!}{2!\,3!\,3!\,4!} = 2\,100 \quad \text{maneras distintas.}$$

EJEMPLO 10 ¿De cuántas maneras distintas puede distribuirse un conjunto de 3 objetos distintos en : (a) 3 cajas ordenadas (es decir, marcadas)
(b) 3 cajas idénticas , no ordenadas?

SOLUCIÓN Del enunciado se sigue que una caja puede contener: ninguno , 1, 2 , ó los 3 objetos. Luego, hay

a) $\square\square\square \rightarrow 3\times3\times3 = 3^3 = 27$ maneras distintas.

b) $\{\{3\},\{0\},\{0\}\}$ ó $\{\{2\},\{1\},\{0\}\}$ ó $\{\{1\},\{1\},\{1\}\}$

$$\binom{3}{3,0,0} + \binom{3}{2,1,0} + \frac{1}{3!}\binom{3}{1,1,1} = 1+3+1 = 5\ .$$

PROBLEMAS RESUELTOS

1. ¿De cuantas maneras se pueden repartir 8 juguetes distintos por igual entre 4 niños?

   RPTA: (PARTICIONES ORDENADAS) Cada niño es una célula bien determinada.

   Esta repartición se puede hacer de $\frac{8!}{2!\,2!\,2!\,2!} = 2\,520$ maneras .

2. ¿De cuántas maneras distintas pueden repartirse por igual 8 estudiantes en 4 grupos?

RPTA: (PARTICIONES NO ORDENADAS) : $\frac{1}{4!}\left(\frac{8!}{2!\,2!\,2!\,2!}\right) = 105$ maneras.

3. Se deben distribuir 15 bolas numeradas del 1 al 15 en tres urnas marcadas de modo que en la primera se coloquen 8 bolas, en la segunda 5 y en la tercera 2 . ¿De cuántas maneras distintas es posible hacer esto?

   RPTA: $\binom{15}{8}\binom{7}{5}\binom{2}{2} = \binom{15}{8,5,2} = \frac{15!}{8!\,5!\,2!} = 135135$ maneras.

4. Ocho chicos y ocho chicas van a ir de paseo al campo. Seis de ellos van en un auto, cuatro van en otro y el resto se va a pie. (a) ¿De cuántas maneras pueden distribuirse para el viaje? (b) ¿De cuántas maneras si ninguna chica va a pie?

   RPTA: a) $\binom{16}{6}\binom{10}{4}\binom{6}{6} = \binom{16}{6,4,6} = 1681680$ maneras.

   b) Puesto que 6 de 8 varones van a pie: $\binom{8}{6}\binom{10}{6}\binom{4}{4} = 5880$.

5. La barra de una cafetería tiene 9 asientos en una fila. Si 5 personas ocupan lugares al azar, ¿de cuántas maneras diferentes pueden quedar desocupados los cuatro asientos restantes?

   RPTA: Ello equivale a considerar el número de particiones ordenadas de la forma $(\{5\},\{4\})$, con 5 sillas ocupadas y 4 sillas desocupadas:
   $\binom{9}{5,4} = \frac{9!}{5!\,4!} = 126$ maneras diferentes.

6. La barra de una cafeteria tiene 10 asientos en una fila. Si 5 personas ocupan lugares al azar, ¿de cuántas maneras diferentes pueden quedar desocupados los cinco asientos restantes?

   RPTA: Nos piden el número de particiones ordenadas $(\{5\},\{5\})$, con 5 sillas ocupadas y 5 sillas desocupadas: $\binom{10}{5,5} = \frac{10!}{5!\,5!} = 252$.

7. ¿De cuántas maneras se pueden repartir n estudiantes en 2 grupos que contengan 1 estudiante por lo menos (a) en el caso $n = 4$?
   (b) en el caso general ?

   RPTA : (PARTICIONES NO ORDENADAS) $n \geq 2$:

   a) Si $\underline{n=4}$: $\binom{4}{1,3} + \frac{1}{2!}\binom{4}{2,2} = \frac{1}{2}\left[\binom{4}{1,3} + \binom{4}{2,2} + \binom{4}{3,1}\right]$

   $= \frac{1}{2}\left[2^4 - \binom{4}{0,4} - \binom{4}{4,0}\right] = \frac{1}{2}[2^4 - 2] = 2^3 - 1 = 7$

b) CASO GENERAL:

$$\frac{1}{2}\left[\binom{n}{1,n-1}+\binom{n}{2,n-2}+..+\binom{n}{n-2,2}+\binom{n}{n-1,1}\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[2^n-\binom{n}{0,n}-\binom{n}{n,0}\right]=\frac{1}{2}\left[2^n-2\right]=2^{n-1}-1 \quad \text{maneras.}$$

8. En un estante hay 10 libros distintos. ¿De cuántas maneras pueden ser repartidos de modo que Pedro reciba 5 libros, Carlos reciba 3 libros, y queden 2 en el estante?

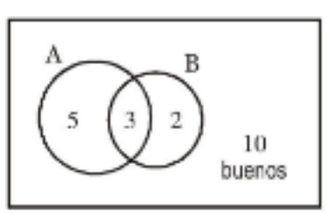
RPTA : $\binom{10}{5}\cdot\binom{5}{3}\cdot\binom{2}{2}=\frac{10!}{5!\,3!\,2!}=2\,520$

9. Una urna contiene 20 artículos marcados, de los cuales 10 son buenos, 8 tienen defecto del tipo A, 5 tienen defecto del tipo B, y 3 tienen los dos tipos de defecto. ¿De cuántas maneras distintas se pueden extraer 11 artículos de modo que 2 tengan ambos tipos de defecto, 3 sólo tengan el defecto del tipo A, 2 tengan sólo el defecto del tipo B, y 4 no tengan ninguno de estos defectos ?

RPTA: De la figura

$\binom{3}{2}\binom{5}{3}\binom{2}{2}\binom{10}{4}=6\,300$

maneras distintas.



10. Se tienen 12 bolas numeradas del 1 al 12.

a) ¿De cuántas maneras se pueden colocar en tres urnas A, B y C de modo que entren 6 bolas en A, 4 en B y 2 bolas en C ?

b) ¿De cuántas maneras se podrán disponer en las 3 urnas de modo que entren 6 bolas en alguna, 5 en otra, y 1 en la restante, sin precisar el orden?

RPTA : a) $\overset{A}{\binom{12}{6}}\overset{B}{\binom{6}{4}}\overset{C}{\binom{2}{2}}=\binom{12}{6,4,2}=\frac{12!}{6!\,4!\,2!}=13\,860$

b) $\binom{12}{6,5,1}+\binom{12}{6,1,5}+\binom{12}{5,6,1}+\binom{12}{5,1,6}+\binom{12}{1,5,6}+\binom{12}{1,6,5}$

$=3!\binom{12}{6,5,1}=3!\,\frac{12!}{6!\,5!\,1!}=33\,264$ maneras distintas.

11. Un jefe de oficina debe ubicar 16 digitadoras en tres oficinas las cuales deben contar respectivamente con 8, 5 y 3 digitadoras. ¿De cuántas maneras pueden elegirse los 3 grupos para ocupar dichas oficinas?

RPTA : Sean A, B y C tales oficinas. Estas pueden ser ocupadas de

$\binom{16}{8}\binom{8}{5}\binom{3}{3}=\binom{16}{8,5,3}=\frac{16!}{8!\,5!\,3!}=720\,720$ maneras.

12. Un total de 5 niños del primer grado deben ser matriculados en cualquiera de las 7 escuelas que existen en el pueblo. ¿ De cuántas maneras pueden ocurrir si:

a) Deben hacerlo en escuelas distintas?
b) Deben hacerlo todos juntos en una misma escuela?
c) Pueden hacerlo en cualquier forma?
d) Existen sólo 2 vacantes en cada escuela?
e) Existen sólo 3 vacantes en cada escuela?

RPTA :

a) En escuelas distintas: $P_5^7=7!/2!=2\,520$ maneras diferentes.

b) Considerando los 5 niños como 1 solo: $P_1^7=7!/6!=7$ maneras

c) $7\times7\times7\times7\times7=7^5=16\,807$ maneras distintas.

d) d1) En escuelas distintas: $P_5^7=2\,520$ maneras

d2) 2 niños en *una misma escuela* y 1 niño en cada una de 3 de las seis escuelas restantes : para ello seleccionamos 4 de las 7 escuelas ordenadamente, y para cada una de estas selecciones repartimos los 5 niños en la forma requerida:

$$P_4^7\cdot\frac{1}{3!}\binom{5}{2,1,1,1}=\frac{7!}{3!}\,\frac{5!}{3!\,2!\,1!\,1!\,1!}=8\,400 \quad \text{maneras.}$$

d3) 2 niños en una misma escuela, 2 en otra, y 1 niño en una tercera escuela:

$$\frac{1}{2!}\binom{5}{2,2,1}\cdot P_3^7=\frac{1}{2!}\,\frac{5!}{2!\,2!\,1!}\,\frac{7!}{4!}=3150 \quad \text{maneras.}$$

$\therefore$ Sumando (d1), (d2) y (d3) : $2\,520+8\,400+3150=14\,070$.

e) Quitando al resultado de (c) las maneras en que 4 niños se matriculan en una misma escuela y 1 niño en otra, y aquellas en que los 5 niños están juntos en una misma escuela:

$$7^5-\left[\binom{5}{4,1}\cdot P_2^7+P_1^7\right]=16\,807-\left[210+7\right]=16\,590.$$

SERIE DE EJERCICIOS

1. ¿De cuántas maneras se puede repartir 6 juguetes por igual entre 3 niños ?
2. ¿De cuántas maneras pueden agruparse por igual 6 estudiantes en 3 equipos?
3. ¿De cuántas maneras se pueden repartir 11 estudiantes en tres equipos, uno de 3 estudiantes y los otros dos de 4 cada uno ?
4. Hay 12 bolas distinguibles en una urna. ¿De cuántas maneras diferentes se puede extraer 4 bolas de la urna tres veces sucesivamente, sin sustitución?
5. Se tienen 12 estudiantes en una clase. ¿De cuántas maneras los 12 estudiantes pueden presentarse a 3 exámenes cistintos, si a cada examen le corresponde 4 estudiantes?
6. Se tienen 12 gimnastas en un colegio. ¿De cuántas maneras los 12 gimnastas pueden conformar 3 equipos de 4 miembros cada uno?
7. ¿De cuántas maneras se pueden repartir 9 juguetes distintos entre 4 niños si el menor recibe 3 y cada uno de los otros recibe 2 juguetes?
8. ¿De cuántas maneras se pueden agrupar 10 miembros de un club en tres comités de 2 , 3 y 5 miembros respectivamente?
9. ¿De cuántas maneras se pueden agrupar 15 jóvenes en 7 comités en los que 2 comités estén conformados de tres jóvenes, 1 de cinco y los otros 4 de un joven cada uno?
10. ¿De cuántas maneras diferentes se puede repartir un grupo de 12 niños en tres grupos de cuatro niños para canto, baile y dibujo?
11. ¿De cuántas maneras 15 estudiantes pueden dividirse en 3 grupos de modo que cada equipo conste de 5 estudiantes?
12. ¿De cuántas maneras distintas un conjunto de 12 personas puede ser dividido en tres grupos consistentes (a) de 2 , 4 y 6 personas? , (b) De 4 personas cada uno?
13. La Dirección de una institución tiene 12 miembros y propone que cada uno pertenezca a una y sólo una de 3 comisiones. Si las comisiones deben tener 3 , 4 y 5 miembros respectivamente, ¿de cuántas maneras diferentes pueden constituirse tales comisiones?
14. ¿De cuántas maneras diferentes pueden dividirse 10 estudiantes en tres equipos, uno con 4 estudiantes y los otros con 3 cada uno?
15. ¿De cuántas maneras pueden repartirse 10 estudiantes en cuatro equipos: A , B , C y D tales que A y B contengan 2 estudiantes cada uno, y C y D contengan 3 estudiantes cada uno?

CLAVE DE RESPUESTAS

1. Asumiendo que los 6 juguetes son distintos: $\binom{6}{2,2,2} = \frac{6!}{2!\,2!\,2!} = 90$.
2. Particiones No Ordenadas: $\frac{1}{3!}\binom{6}{2,2,2} = 15$
3. $\frac{1}{2!}\binom{11}{3,4,4} = 5\,775$, **(4)**. $\binom{12}{4}\binom{8}{4}\binom{4}{4} = \binom{12}{4,4,4} = 34\,650$
5. $\binom{12}{4,4,4} = 34\,650$, **(6)**. $\frac{1}{3!}\binom{12}{4,4,4} = 5\,775$
7. $\binom{9}{3,2,2,2} = 7\,560$, **(8)**. $\binom{10}{2}\binom{8}{3}\binom{5}{5} = \binom{10}{2,3,5} = 2\,520$
9. $\frac{1}{2!\,4!}\binom{15}{3,3,5,1,1,1,1} = 6\,306\,300$
10. Corresponde a Particiones Ordenadas, pues el grupo { Carlos, Juan , Julio y José } para **CANTO** es diferente del grupo { Carlos, Juan , Julio y José } para **DIBUJO** . Entonces hay

$$\binom{12}{4,4,4} = \frac{12!}{4!\,4!\,4!} = 34\,650 \quad \text{maneras diferentes.}$$

11. $\frac{1}{3!}\binom{15}{5,5,5} = \frac{15!}{3!\,5!\,5!\,5!} = 18\,018$
12. Particiones No Ordenadas (a) y (b):
    a) $\binom{12}{2}\binom{10}{4}\binom{6}{6} = \binom{12}{2,4,6} = \frac{12!}{2!\,4!\,6!} = 13\,860$
    b) $\frac{1}{3!}\binom{12}{4,4,4} = \frac{12!}{3!\,4!\,4!\,4!} = 5\,775$
13. De $\binom{12}{3}\binom{9}{4}\binom{5}{5} = \binom{12}{3,4,5} = 27\,720$ maneras diferentes.
14. $\binom{10}{4,3,3}\frac{1}{2!} = 2100$.
15. $\frac{1}{2!\,2!}\binom{10}{2,2,3,3} = 6\,300$.

* * * * *

ÍNDICE

A

ÁLGEBRA DE FUNCIONES, 414
ALGORITMO DE DIVISIÓN (POLINOMIOS), 80
APLICACIONES DE A EN B, 339
ARGUMENTO LÓGICO, 19
AXIOMAS DE LOS NÚMEROS REALES, 73

B

BICONDICIONAL, 5
BIYECTIVA, FUNCIÓN, 459

C

CÉLULAS DE UN CONJUNTO, 525
CIRCUITOS BOOLEANOS (LÓGICOS), 27
- EN PARALELO, 28
- EN SERIE, 28

CIRCUNFERENCIA, 317
COCIENTE DE FUNCIONES, 421
COEFICIENTES
- BINOMIALES O BINÓMICOS, 595
- BINOMIALES COMPLEMENTARIOS, 596
- MULTINÓMICOS O MULTINOMIALES, 597

COMBINACIONES, 601
- NÚMERO DE, 602

COMPLEMENTO DE UN CONJUNTO, 48
COMPLETACIÓN DE CUADRADOS, 124
COMPOSICIÓN DE FUNCIONES, 427
CONDICIONAL, 4
CONECTIVOS LÓGICOS, 6
CONJUNCIÓN, 3
CONJUNTO, 36
- IMAGEN, 345
- IMAGEN INVERSA, 347
- NUMÉRICO, 37
- POR COMPRENSIÓN, 36
- POR EXTENSIÓN, 36
- POTENCIA, 64
- UNITARIO, 46
- UNIVERSAL, 46
- VACÍO (NULO), 46

CONJUNTOS
- COMPARABLES, 45
- DISJUNTOS, 48
- IGUALES, 47
- INTERSECCIÓN DE, 48
- UNIÓN DE, 47

CONTEO, 556
- PRINCIPIO DE LA ADICIÓN, 566
- PRINCIPIO DE LA MULTIPLICACIÓN, 588

CONTRADICCIÓN, 8
COSENO, FUNCIÓN, 373
CRECIENTE, FUNCIÓN, 460
CUANTIFICADOR
- EXISTENCIAL, 38
- UNIVERSAL, 38

D

DECRECIENTE, FUNCIÓN, 461
DESIGUALDAD TRIANGULAR, 206
DESIGUALDADES LINEALES Y CUADRÁTICAS, 136
DIAGRAMAS DE VENN – EULER, 51
DIFERENCIA DE CONJUNTOS, 49
DIFERENCIA SIMÉTRICA, 5, 50
DISCRIMINANTE, 164
DISTANCIA ENTRE DOS PUNTOS, 299
DIVISIÓN, 79
DIVISIÓN SINTÉTICA, 92
DIVISORES DE UN POLINOMIO, 100
DISYUNCIÓN, 3
DISYUNCIÓN EXCLUSIVA, 5
DOMINIO DE UNA FUNCIÓN, 337
DOMINIO DE UNA RELACIÓN, 282

E

ECUACIONES
- BICUADRADAS, 174
- CON RADICALES, 180, 181
- DE GRADO SUPERIOR, 138
- EQUIVALENTES, 81
- EXPONENCIALES, 264
- LINEALES, 81
- LOGARÍTMICAS, 518
- RECÍPROCAS, 175
- REDUCIBLES A LAS DE SEGUNDO GRADO, 173

EJE DE LA PARÁBOLA, 315
ELEMENTO INVERSO, 73, 550
ELEMENTO NEUTRO, 73, 549
ELIPSE, ECUACIÓN DE LA, 329
EQUIVALENCIA LÓGICA, 9
EVENTOS, 569
EXPONENCIAL, FUNCIÓN, 491

F

FACTORES CUADRÁTICOS IRREDUCIBLES, 154
FACTORES DE UN POLINOMIO, 100
FACTORIALES, 580
FUNCIÓN, 336
- BIYECTIVA, 459
- COMPUESTA, 427
- CONSTANTE, 367
- CON VARIAS REGLAS DE CORRESPONDENCIA, 362
- COSENO, 373

- CRECIENTE, 460
- CUADRÁTICA, 369
- DECRECIENTE, 461
- DIFERENCIA, 415
- ESCALÓN UNITARIO, 357
- EPIYECTIVA, 456
- EXPONENCIAL, 491
- GRÁFICA DE UNA, 341
- IDENTIDAD, 367
- IMPAR, 401
- INVERSA, 467
- INVERSA DE UNA COMPOSICIÓN, 477
- INYECTIVA, 446
- LINEAL, 415
- LOGARÍTMICA, 509
- MÁXIMO ENTERO, 368
- MONÓTONA, 460
- PAR, 401
- PERIÓDICA, 402
- POLINOMIO, 372
- PROPOSICIONAL, 38
- RACIONAL, 422
- RAÍZ CUADRADA, 369
- SENO, 372
- SIGNO, 368
- SUMA, 414
- SURYECTIVA, 456
- UNIVALENTE, 446
- VALOR ABSOLUTO, 368

FUNCIONES
- ÁLGEBRA DE, 414
- COCIENTE DE, 421
- COMPOSICIÓN DE, 427
- ESPECIALES, 367
- IGUALDAD DE, 414
- MULTIPLICACIÓN DE, 415
- RESTA DE, 415
- SUMA DE, 414

G

GRÁFICA DE UNA FUNCIÓN, 341, 343
GRÁFICAS DE RELACIONES, 287

H

HIPÉRBOLA, ECUACIÓN DE LA, 330

I

I
IGUALDAD DE FUNCIONES, 414
IGUALDAD DE POLINOMIOS, 422
IMPLICACIÓN LÓGICA, 9
INCLUSIÓN, 44
INECUACIONES
- CON FACTORES CUADRÁTICOS IRREDUCIBLES, 154
- CON MÁXIMO ENTERO, 251
- CON RADICALES, 189
- CON VALOR ABSOLUTO, 215
- EXPONENCIALES, 267
- LOGARÍTMICAS, 518, 527

INFERENCIA LÓGICA, 19
INFERENCIAS VÁLIDAS NOTABLES, 20
INTERSECCIÓN DE CONJUNTOS, 48
INTERVALOS, 37
- ABIERTOS, 37
- CERRADOS, 37
- SEMIABIERTOS, 38

INVERSA,
- FUNCIÓN, 467
- FUNCIÓN COMPOSICIÓN, 477

INYECTIVA, FUNCIÓN, 446
IRREDUCIBLE, FACTOR CUADRÁTICO, 154

L

LEY DE COMPOSICIÓN INTERNA, 546
LEY DE LA ADICIÓN, 22
LEYES DE SIMPLIFICACIÓN (LÓGICA), 22
LEYES DEL
- ÁLGEBRA DE CONJUNTOS, 54
- ÁLGEBRA PROPOSICIONAL, 10, 11
- DILEMA CONSTRUCTIVO, 21
- MODUS PONENDO PONENS, 20
- MODUS TOLLENDO TOLLENS, 21
- SILOGISMO DISYUNTIVO, 21
- SILOGISMO HIPOTÉTICO, 21

LOGARITMO, 497
- FUNCIÓN, 509

LOGARITMOS COMUNES, 498
LOGARITMOS, LEYES DE LOS, 498
LOGARITMOS NEPERIANOS, 498

M

MÁXIMO ENTERO, 245
- PROPIEDAD FUNDAMENTAL, 246

MÉTODO DE COEFICIENTES INDETERMINADOS, 104
MÉTODO DE LOS PUNTOS CRÍTICOS, 146
MÉTODOS DE DEMOSTRACIÓN, 22
MONÓTONA, FUNCIÓN, 460
MULTIPLICACIÓN DE FUNCIONES, 415
MULTIPLICIDAD DE UNA RAÍZ, 102

N

NAIPES, PROBLEMAS DE, 612
NEGACIÓN LÓGICA, 2
NÚMERO DE ELEMENTOS DE UN CONJUNTO, 66
NÚMERO DE RAÍCES DE POLINOMIOS, 110, 112
NÚMEROS COMBINATORIOS, 602

O

OPERACIONES BINARIAS, 542
- ASOCIATIVAS, 545
- CONMUTATIVAS, 544
- DISTRIBUTIVAS, 547

OPERACIONES DE CONJUNTOS, 47
- APLICADAS A LOS INTERVALOS, 51

P

PARÁBOLA, 311, 325
- EJE, VÉRTICE, 315
PARES ORDENADOS, 274
PARTICIÓN DE UN CONJUNTO, 626
PARTICIONES NO ORDENADAS, 630
PARTICIONES NO ORDENADAS, 630
PENDIENTE DE UNA RECTA, 302
PERIODO MÍNIMO, 403
PERMUTACIONES, 578
- CIRCULARES, 586
- CON REPETICIÓN, 589
- DISTINGUIBLES, 589
- EN LLAVEROS CIRCULARES, 587
POLINOMIO, 88, 372
- CONSTANTE, 90
- DIVISIBLE, 100
- IDÉNTICAMENTE NULO ó CERO, 90
PRINCIPIO DE SUSTITUCIÓN
- DE LA ADICIÓN, 75
- DE LA MULTIPLICACIÓN, 76
PROPOSICIONES LÓGICAS, 1
- COMPUESTAS, 2, 6
- LÓGICAMENTE EQUIVALENTES, 9
PRODUCTO CARTESIANO, 275
PUNTO MEDIO, FÓRMULA, 300

R

RAÍCES DE UNA ECUACIÓN CUADRÁTICA, 163, 164
RAÍCES IRRACIONALES, 111
RAÍCES RACIONALES DE POLINOMIOS, 116
RAÍCES Y COEFICIENTES, RELACIONES ENTRE, 119
RAÍZ, 100
- MULTIPLICIDAD DE UNA, 102
RANGO DE UNA FUNCIÓN, 337
RANGO DE UNA RELACIÓN, 282
RAYOS, 38
RECTAS, 301
- PARALELAS, 305
- PERPENDICULARES, 306
- TANGENTES, 320
REGLA DE CORRESPONDENCIA, 341
REGLA DE LOS SIGNOS DE DESCARTES, 112
REGLAS DE LOS SIGNOS, 135
REGLA GRÁFICA DE LOS SIGNOS, 142
RELACIÓN DE ORDEN, 132
RELACIONES, 274
- DOMINIO DE, 282
- DE EQUIVALENCIA, 280
- INVERSAS, 295
- RANGO DE, 282
- REFLEXIVAS, 279
- SIMÉTRICAS, 279
- TRANSITIVAS, 280
RESTA DE FUNCIONES, 415
RUFFINI, REGLA DE, 94

S

SENO, FUNCIÓN, 372
SIMETRÍAS, 323
- RESPECTO AL EJE X, 323
- RESPECTO AL EJE Y, 323
- RESPECTO AL ORIGEN, 324
SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES,
- CON DOS INCÓGNITAS, 83
- CON TRES INCÓGNITAS, 84
SUBCONJUNTOS, 45
- COMPARABLES, 45
- PROPIOS, 45
SUMA DE FUNCIONES, 414
SURYECTIVA, FUNCIÓN, 456

T

TABLAS DE OPERACIONES BINARIAS, 543
TAUTOLOGÍA, 8
TEOREMA
- DEL BINOMIO DE NEWTON, 597
- DEL FACTOR, 101
- DEL MULTINOMIO, 597
- DEL RESIDUO O DEL RESTO, 97
- FUNDAMENTAL DEL ÁLGEBRA, 110
TRAZADO DE GRÁFICAS ESPECIALES, 393
TRIÁNGULO DE PASCAL, 596

U

UNIÓN DE CONJUNTOS, 47
UNIVALENTE, FUNCIÓN, 446
UNIVERSAL, CONJUNTO, 46
UNIVERSAL, CUANTIFICADOR, 38

V

VALOR ABSOLUTO, 201
VALOR ABSOLUTO, FUNCIÓN, 368
VARIACIONES EN SIGNO DE POLINOMIOS, 113
VÉRTICE DE UNA PARÁBOLA, 315